

621.30 (075.8)

Т33

П.И. АТАБЕКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

часть I





ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

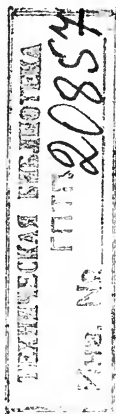
Г. И. АТАБЕКОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

Допущено

Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений



«ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА 1970

~~СПЗ~~

~~А 92~~

УДК 621.3.01 (075.8)

Т33

Атабеков Г. И.

~~А 92~~ Теоретические основы электротехники, ч. I, Линейные электрические цепи, изд. 4-е, М., «Энергия», 1970.

592 с. с илл.

Курс «Теоретические основы электротехники» состоит из трех частей: I — «Линейные электрические цепи» (автор Г. И. Атабеков), II — «Нелинейные цепи» (авторы: Г. И. Атабеков, А. Б. Тимофеев, С. С. Хухриков), III — «Электромагнитное поле» (автор С. Д. Купалян).

Содержание курса соответствует программе Министерства высшего и среднего специального образования СССР по одноименной дисциплине.

В настоящей, первой части рассмотрены основные свойства линейных электрических цепей, электромагнитные процессы в них и инженерные методы расчета, применяемые к широкому классу современных электротехнических устройств. Рассмотрены цепи однофазного, трехфазного и несинусоидального тока, четырехполюсники и электрические фильтры, цепи с распределенными параметрами, переходные процессы и синтез линейных электрических цепей. Каждая глава снабжена задачами и вопросами для самопроверки.

Книга предназначена для студентов электромеханических и радиотехнических специальностей, изучающих данную дисциплину с отрывом или без отрыва от производства.

3-3-8

132-70

6П2.1

АТАБЕКОВ ГРИГОРИЙ ИОСИФОВИЧ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ, Ч. I

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Редактор А. Б. Тимофеев

Переплет художника Д. И. Чернышева

Технический редактор Г. Г. Самсонова

Корректор В. С. Антипова

Сдано в набор 26/II 1970 г. Подписано к печати 8/VII 1970 г. Т-06391
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 31,08 Уч.-изд. л. 31,08
Тираж 70 000 экз. Цена 1 р. 29 к. Зак № 240.

Издательство «Энергия». Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Владимирская типография Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-6.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОЙ ЧАСТИ

Это издание учебника «Теоретические основы электротехники» выходит в свет после безвременной смерти возглавлявшего авторский коллектив Григория Иосифовича Атабекова.

В соответствии с пожеланиями читателей учебник выходит в трех частях, что облегчит пользование книгой, поскольку курс «Теоретические основы электротехники» читается в высших учебных заведениях в течение нескольких семестров.

Первая часть курса — «Линейные электрические цепи», написанная Г. И. Атабековым, идентична по тексту предыдущему изданию. При подготовке к печати текст был тщательно проверен и все замеченные опечатки были исправлены.

Книга рецензировалась профессором, доктором технических наук Р. И. Караевым.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий учебник по курсу «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) предназначен для студентов электромеханических и радиотехнических специальностей, изучающих этот курс с отрывом или без отрыва от производства. Он может также служить руководством для инженерно-технических работников, повышающих уровень теоретических знаний.

Действующая в настоящее время программа курса ТОЭ, утвержденная учебно-методическим управлением

по вузам МВиССО СССР в 1964 г. для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений, определяет совокупность вопросов, составляющих содержание курса. Курс ТОЭ должен читаться в соответствии с методикой, принятой кафедрой ТОЭ данного вуза, причем в зависимости от имеющихся специальностей и учебных планов института отдельные разделы программы могут излагаться более расширенно или более сжато; очередность разделов курса может варьироваться. Требуемая степень детализации изложения тех или иных вопросов устанавливается кафедрой ТОЭ по согласованию со специальными кафедрами данного вуза.

Теоретические основы электротехники представляют собой непрерывно развивающуюся и обогащающуюся новыми сведениями дисциплину. По своему содержанию курс ТОЭ разделяется на три явно выраженные части. Первая часть охватывает теорию линейных электрических цепей, вторая — теорию нелинейных цепей и третья — теорию электромагнитного поля. В связи с этим и учебник выпускается в трех частях, каждая из которых содержит соответствующую часть курса.

Деление теории цепей по принципу линейности и нелинейности — естественный результат развития современной электротехники и смежных с нею отраслей знаний; оно продиктовано спецификой нелинейных задач и возросшим значением нелинейной электротехники в науке и технике. В программе курса ТОЭ специально отмечено, что теория нелинейных цепей выделена в самостоятельную часть в связи с исключительно большим значением нелинейных цепей во всех областях современной электротехники и в первую очередь в автоматике, вычислительной технике, радиотехнике, электронике и измерительной технике.

Вместе с тем изучение нелинейных цепей после прохождения теории линейных электрических цепей согласуется и с принципом перехода от простого к сложному: нелинейные задачи, как правило, сложнее линейных и требуют предварительного знания теории линейных электрических цепей.

При решении вопроса о содержании и методике изложения отдельных разделов курса ТОЭ необходимо учитывать современный уровень физико-математической подготовки в средней и высшей школе.

Первоначальные сведения по электричеству, магнетизму и их практическому применению учащиеся средней школы черпают из курсов физики и электротехники. В последующем в высшей школе эти сведения углубляются и расширяются в курсе физики, действующая программа которого для высших технических учебных заведений предусматривает достаточно подробное изучение разделов электростатики, постоянного тока и электромагнетизма. Поэтому при написании настоящего учебника учитывалось, что комплекс знаний в области электричества и магнетизма, приобретенный учащимися до прохождения ТОЭ, вполне достаточен для усвоения первой части ТОЭ — теории линейных электрических цепей.

Устранение излишнего параллелизма и непроизводительной затраты времени на повторение некоторых вопросов, пройденных в средней школе и по курсу физики в институте, дает возможность освободить часть времени в курсе ТОЭ для изучения новых важных вопросов современной теоретической электротехники.

С другой стороны, постановка математического образования в технических вузах с каждым годом все полнее учитывает необходимость усиления математической подготовки учащихся по соответствующим разделам математического анализа (специальные функции, матрицы, преобразования Фурье и Лапласа, функции комплексного переменного и др.). Это обстоятельство позволяет излагать и изучать курс ТОЭ на должном научно-техническом уровне с привлечением математического аппарата, который ранее в курсе ТОЭ либо вовсе не использовался, либо давался в дополнительных главах курса ТОЭ, значительно увеличивая его объем (например, теория комплексных чисел, теория вычетов, основы векторного анализа и др.).

Настоящая, первая, часть курса ТОЭ, посвященная линейным электрическим цепям, начинается с краткого напоминания основных физических явлений и законов электрических цепей и основных понятий, относящихся к электрическим и магнитным полям. В начале курса рассматриваются такие основные вопросы, как положительные направления тока и напряжения; элементы и параметры электрической цепи; представление электротехнических устройств идеализированными схемами замещения и т. п.

Читатель постепенно вводится в круг вопросов, относящихся к анализу линейных электрических цепей. Вначале поясняются основные свойства простейших электрических цепей синусоидального тока, векторные диаграммы и комплексная форма расчета. Методика расчета простейших электрических цепей постоянного тока, уже известная учащимся, в учебнике не повторяется.

Последовательно накапливая сведения о преобразованиях электрических схем, резонансных цепях и геометрических местах на комплексной плоскости, учащиеся подготавливаются к сознательному выполнению лабораторных работ и усвоению общих теорем и методов расчета сложных электрических цепей. Последние даются в общей форме, применимой для цепей постоянного и переменного тока.

Вслед за теорией четырехполюсника приводится теория электрических фильтров, рассматриваемых как частные случаи четырехполюсника. Трехфазной цепью завершается изучение синусоидальных режимов в линейных цепях.

Периодические несинусоидальные процессы исследуются с помощью рядов Фурье, а после изучения переходных процессов решения даются и в замкнутой форме.

В главе, посвященной применению преобразования Лапласа, напоминаются основные теоремы и свойства преобразования Лапласа. Главное внимание уделяется не доказательствам формул, которые должны быть известны учащимся из курса высшей математики, а практическому приложению этих формул к расчету переходных процессов в линейных электрических цепях. Рассмотрение преобразования Фурье как частного случая преобразования Лапласа облегчает исследование спектральных характеристик и использование их для расчета переходных процессов.

Первая часть курса завершается ознакомлением с синтезом линейных электрических цепей.

В книге приняты термины, рекомендованные Комитетом технической терминологии АН СССР. Для ознакомления учащихся с определениями терминов, приведенными в сборнике «Терминология теоретической электротехники» (Изд-во АН СССР, 1958, отв. редактор член-корр. АН СССР Л. Р. Нейман), в сносках даны определения основных понятий, заимствованные из этого сборника (сокращенно именуемого ТТЭ).

Буквенные обозначения в книге приведены в соответствии с ГОСТ 1494-61, а условные графические обозначения для электрических схем — в соответствии с ГОСТ 7624-62.

В курсе применена Международная система единиц (СИ) по ГОСТ 9867-61, включающая в себя электрические и магнитные единицы абсолютной практической системы МКСА.

Уделено внимание сочетанию математических выводов с физическими представлениями; изучение методов расчета сопровождается рассмотрением физической стороны явлений, причем содержание материала и порядок его изложения таковы, что учащийся лишь постепенно переходит от более простых вопросов к более сложным.

Для облегчения усвоения курса при заочном обучении основные положения теории иллюстрированы примерами, объем и содержание которых рассчитаны на то, чтобы охватить принципиально важные разделы курса. Кроме того, каждая глава учебника снабжена вопросами для самопроверки и задачами (с ответами), которые учащимся предлагается выполнить самостоятельно.

Студентам, в особенности занимающимся заочно, не всегда удастся отличить все принципиальное и наиболее существенное в предмете от менее важного. В связи с этим при изложении материала в учебнике по мере необходимости оттенены курсивным шрифтом или словесными указаниями принципиальные положения как данного курса, так и последующих дисциплин.

Параграфы и отдельные места, имеющие подчиненное или прикладное значение, набраны петитом.

В третьем издании в книгу внесен ряд исправлений и добавлений (§ 1-5, 1-6, 3-4, 4-3, 5-2, 7-1, 7-10, 8-9—8-11 и др.).

Автор глубоко признателен коллективу кафедры теоретической электротехники Московского ордена Ленина авиационного института имени Серго Орджоникидзе и рецензентам проф. В. Ю. Ломоносову и доц. Л. И. Столову за множество ценных замечаний и советов, способствовавших улучшению книги.

Г. И. АТАБЕКОВ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A — параметр четырехполюсника; обозначение фазы трехфазной цепи;
 a — собственное затухание четырехполюсника; фазовый оператор e^{j120° ;
 B — параметр четырехполюсника; обозначение фазы трехфазной цепи; магнитная индукция;
 b — реактивная проводимость; коэффициент фазы четырехполюсника;
 b_C — емкостная проводимость;
 b_L — индуктивная проводимость;
 C — емкость; обозначение фазы трехфазной цепи;
 c — скорость света в пустоте ($\sim 3 \times 10^8$ м/сек); действительная часть комплексной частоты;
 E — постоянная э. д. с.; действующее значение переменной э. д. с.;
 $\dot{E}$ — комплексная э. д. с.;
 e — мгновенное значение э. д. с.; основание натуральных логарифмов ($\sim 2,718$);
 $F(j\omega)$ — спектральная характеристика;
 $F(p)$ — изображение функции по Лапласу; функция комплексной частоты;
 f — частота периодической функции;
 G — параметр четырехполюсника;
 g — активная проводимость; параметр четырехполюсника (мера или коэффициент передачи);
 H — параметр четырехполюсника;
 I — постоянный ток; действующее значение переменного тока;
 $\dot{i}$ — комплексный ток;
 i — мгновенное значение тока;
 $j = \sqrt{-1}$;
 K_I — коэффициент передачи по току;
 K_U — коэффициент передачи по напряжению;
 k — коэффициент связи, постоянная фильтра;
 L — индуктивность;
 L_S — индуктивность рассеяния;
 M — взаимная индуктивность;
 m — постоянная фильтра; индекс, обозначающий амплитуду переменной величины;
 n — коэффициент трансформации; коэффициент отражения;
 P — активная (средняя) мощность;
 p — мгновенная мощность; комплексная частота;

- Q — реактивная мощность; добротность катушки, конденсатора, контура;
 q — электрический заряд;
 r — активное сопротивление;
 S — полная мощность; площадь поперечного сечения;
 T — период;
 t — время;
 U — постоянное напряжение; действующее значение переменного напряжения;
 $\dot{U}$ — комплексное напряжение;
 u — мгновенное значение напряжения;
 W — энергия (постоянная);
 w — число витков, мгновенное значение энергии;
 L, w_C — энергия, запасенная в индуктивности и емкости;
 x — реактивное сопротивление;
 x_C — емкостное сопротивление;
 x_L — индуктивное сопротивление;
 x_M — сопротивление взаимной индукции;
 Y — комплексная проводимость; параметр четырехполюсника;
 Y_{ii} — входная проводимость i -го контура (ветви) или узла;
 Y_{ki} — передаточная проводимость контуров (ветвей) или узлов;
 $Y_{(ii)}$ — собственная проводимость ветвей, сходящихся в узле;
 $Y_{(ik)}$ — общая проводимость между узлами i и k ;
 $Y(p)$ — обобщенная (операторная) проводимость;
 y — полная проводимость (модуль комплексной проводимости);
 Z — комплексное сопротивление; параметр четырехполюсника;
 Z_B — комплексное волновое сопротивление линии;
 Z_c — характеристическое сопротивление;
 Z_{ii} — входное сопротивление i -го узла или контура (ветви);
 Z_{ki} — передаточное сопротивление узлов или контуров (ветвей) i и k ;
 $Z_{(ii)}$ — собственное сопротивление контура i ;
 $Z_{(ik)}$ — общее сопротивление контуров i и k ;
 $Z(p)$ — обобщенное (операторное) сопротивление;
 z — полное сопротивление (модуль комплексного сопротивления);
 α — коэффициент затухания линии;
 β — коэффициент фазы линии;
 γ — коэффициент распространения линии;
 δ — угол потерь; относительная расстройка частоты;
 Δ — определитель системы уравнений;
 Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента i -й строки k -го столбца;
 ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость;
 ϑ — температура;
 Λ — магнитная проводимость;
 λ — длина волны;
 μ_a — абсолютная магнитная проницаемость;
 ρ — удельное электрическое сопротивление;

волновое сопротивление контура;
 τ — время; постоянная времени;
 Φ — магнитный поток;
 φ — фазовый сдвиг;
 Ψ — потокосцепление;

ψ — начальная фаза;
 ω — угловая частота;
 1, 2 и 0 — индексы, обозначающие составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей.

Приставки для дольных и кратных единиц

Наименование единиц измерения	Обозначение	Отношение к основной единице	Наименование единиц измерения	Обозначение	Отношение к основной единице
Пико . . .	<i>p</i>	10^{-12}	Санти . . .	<i>c</i>	10^{-2}
Нано . . .	<i>n</i>	10^{-9}	Гекто . . .	<i>g</i>	10^2
Микро . . .	<i>mk</i>	10^{-6}	Кило . . .	<i>k</i>	10^3
Милли . . .	<i>m</i>	10^{-3}	Мега . . .	<i>M</i>	10^6

Основные электрические и магнитные единицы измерения в системе СИ

Величина	Единица измерения	
	наименование	обозначение
Ток	ампер	<i>a</i>
Заряд	кулон	<i>к</i>
Потенциал, напряжение, э. д. с.	вольт	<i>в</i>
Напряженность электрического поля	вольт на метр	<i>в/м</i>
Сопротивление	ом	<i>ом</i>
Емкость	фарада	<i>ф</i>
Магнитный поток	вебер	<i>вб</i>
Магнитная индукция	тесла	<i>тл</i>
Индуктивность	генри	<i>гн</i>
Магнитодвижущая сила	ампер	<i>a</i>
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	<i>a/м</i>
Энергия	джоуль	<i>дж</i>
Мощность	ватт	<i>вт</i>

ВВЕДЕНИЕ

Роль и значение электрической энергии в развитии народного хозяйства общеизвестны. Электричество стало основой развития всех отраслей техники, базой для развития промышленности, транспорта, сельского хозяйства, электросвязи; оно стало основой комплексной механизации и автоматизации производственных процессов. Электричество и радио прочно вошли в быт. Исключительно важное значение они имеют и в современной авиации; установленная мощность источников электрической энергии на самолетах, исчислявшаяся долями киловатта в начальный период развития авиации, в настоящее время достигает сотен киловатт на крупных самолетах. Продвижение науки по пути освоения космического пространства и изучения планет солнечной системы было бы невозможным без применения электричества и радио.

Столь широкому распространению электрической энергии во всех областях народного хозяйства и всех отраслях техники способствовали удобство передачи электромагнитной энергии на расстоянии и удобство преобразования ее в другие формы энергии: механическую, световую, тепловую, химическую и др.

Классики марксизма-ленинизма с первых же шагов развития науки об электричестве предсказали ей великое будущее. Известно, с каким пристальным вниманием следили К. Маркс и Ф. Энгельс за опытами по передаче электроэнергии на расстояние, предсказав огромное революционное значение применения электричества в промышленности. В 1850 г. К. Маркс, обращаясь к В. Либнехту, говорил: «Царствование его величества пара, перевернувшего мир в прошлом столетии, окончилось; на его место станет неизмеримо более революционная сила — электрическая искра»¹. Говоря о передаче электри-

¹ Воспоминания о Марксе и Энгельсе, Госполитиздат, 1956, стр. 91.

ческой энергии на расстояние, Ф. Энгельс в 1883 г. писал Э. Бернштейну, что «это открытие окончательно освобождает промышленность почти от всяких границ, налагаемых местными условиями, делает возможным использование также и самой отдаленной водяной энергии, и если в начале оно будет полезно только для городов, то в конце концов оно станет мощным рычагом для устранения противоположности между городом и деревней. Совершенно ясно, что благодаря этому производительные силы настолько вырастут, что управление ими будет все более и более не под силу буржуазии»¹.

Энергетическая база дореволюционной России была крайне слаба. С первых дней существования Советской власти Коммунистическая партия придавала решающее значение делу электрификации страны для победы нового общественного строя. Всем памяты слова В. И. Ленина «Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны». Выступая в 1920 г. на VIII Всероссийском съезде Советов, В. И. Ленин говорил: «...если Россия покроется густой сетью электрических станций и мощных технических оборудований, то наше коммунистическое хозяйственное строительство станет образцом для грядущей социалистической Европы и Азии»².

Общеизвестно, что первый хозяйственный план, Государственный план электрификации России (ГОЭЛРО), был назван В. И. Лениным второй программой партии.

Благодаря преимуществам социалистической системы планирования и развития народного хозяйства, обеспечившим успешное выполнение и перевыполнение пятилетних планов, в СССР создана мощная энергетическая база, которая дает возможность быстрыми темпами повышать электроснабжение и производительность труда во всех отраслях промышленности и сельского хозяйства. По производству электроэнергии наша страна вышла на первое место в Европе и на второе в мире.

В СССР сооружена и пущена в 1954 г. первая в мире электрическая станция, использующая атомную энергию.

Ведущая роль электрификации в развитии всех отраслей народного хозяйства, в осуществлении всего современного технического прогресса раскрыта в Программе КПСС, принятой XXII съездом КПСС.

¹ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. XXVII, стр. 289.

² В. И. Ленин. Соч., изд. 5-е, т. 42, стр. 161.

Советский Союз вступил в решающую стадию претворения в жизнь идеи В. И. Ленина о сплошной электрификации страны. Планом электрификации предусмотрено довести годовое производство электроэнергии к 1970 г. примерно до 900—1 000 млрд. *квт·ч*. Одновременно с дальнейшей электрификацией промышленности и транспорта, автоматизацией производственных процессов и т. п. будут также электрифицированы все колхозы, совхозы и рабочие поселки. Будет создана Единая энергетическая система СССР, которая позволит перебрасывать электроэнергию из восточных районов в европейскую часть страны и будет связана с энергосистемами других социалистических стран.

Большое внимание будет уделено освоению новых источников энергии и новых способов ее получения, в частности решению проблемы прямого преобразования различных видов энергии в электрическую.

Электрификация народного хозяйства была бы немыслима без развития учения об электричестве. В течение XIX и XX вв. учение об электричестве непрерывно развивалось, причем электротехника на ранних ступенях развития являлась разделом физики.

Первый трактат по электричеству, вышедший на русском языке в 1753 г., принадлежит отцу русской науки М. В. Ломоносову. Его «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих» явилось одной из крупных работ в области электричества, написанных учеными XVIII в.

Исследования Ломоносова и его друга Рихмана, а также Франклина, Гальвани, Вольты и др., приведшие к изобретению громоотвода и источников электрической энергии (вольтова столба, гальванических элементов), положили начало систематическому изучению электрических явлений.

В. В. Петров, производя опыты в электрической цепи, обнаружил и исследовал в 1802 г. явление электрической дуги между угольными электродами при атмосферном давлении. Результаты этих исследований были опубликованы им в книге «Известие с гальвани-вольтовых опытах» (1803 г.).

В 1819 г. Эрстед обнаружил механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку, а в 1820 г. Ампер открыл магнитные свойства соленоида с током.

Таким образом, было установлено, что прохождение тока сопровождается магнитными явлениями.

В 1831 г. М. Фарадей открыл и описал явление электромагнитной индукции. В 1833 г. Э. Х. Ленц установил правило определения индуктированного тока, выражающее фундаментальный принцип электродинамики — принцип электромагнитной инерции. В 1844 г. Ленцем и независимо от него Джоулем был открыт важный закон электротехники, известный под названием закона Джоуля — Ленца.

На основании теоретического обобщения экспериментальных данных по электричеству и магнетизму во второй половине XIX в. Д. Максвелл выдвинул гипотезу существования электромагнитного поля излучения. Разработанная им теория электромагнитного поля изложена в его труде «Трактат об электричестве и магнетизме» (1873 г.).

В 1888 г. Г. Герц опубликовал свои работы, в которых экспериментально доказал существование поля излучения. Однако Г. Герц и современные ему физики, занимавшиеся исследованием электромагнитного поля, не считали возможным выйти за пределы своих лабораторий и применить электромагнитные волны для беспроводной связи.

Такую задачу впервые поставил и блестяще разрешил выдающийся русский ученый Александр Степанович Попов, практически осуществивший в 1895 г. первую в мире радиосвязь. Изобретение радио открыло новую эру в истории человечества.

В России формирование самостоятельной дисциплины «Теоретические основы электротехники» относится к концу XIX и началу XX вв. В 1904 г. проф. В. Ф. Миткевич начал читать курс «Теория электрических и магнитных явлений» в Петербургском политехническом институте. Примерно тогда же началась подготовка инженеров электротехнической специальности в Московском высшем техническом училище, где проф. К. А. Круг приступил в 1905 г. к чтению курса «Теория переменных токов».

Предметом курса «Теоретические основы электротехники» является изучение как с качественной, так и с количественной сторон электромагнитных процессов, происходящих в цепях и полях. Этот курс, базирующийся на курсах физики и высшей математики, содержит инже-

нерные методы расчета и анализа, применимые к широкому классу современных электротехнических устройств. Он имеет исключительно важное значение для формирования научного кругозора специалистов по электротехнике и радиотехнике и на нем основываются все специальные электротехнические и радиотехнические дисциплины.

В курсе ТОЭ применяются два способа описания электрических и магнитных явлений: при помощи понятий теории цепей и теории поля. Выбор того или другого способа диктуется условиями постановки задачи.

Теория цепей исходит из приближенной замены реального электротехнического устройства идеализированной схемой замещения. Эта схема содержит участки цепи, на которых определяются искомые напряжения и токи.

Теория цепей позволяет с достаточной для инженерной практики точностью определять непосредственно напряжение между концами рассматриваемого участка цепи, не прибегая к вычислению его между промежуточными точками. Токи также находят непосредственно, без вычисления их плотностей в различных точках сечения проводника.

Теория поля изучает изменение электрических и магнитных величин от точки к точке в пространстве и времени. Она исследует напряженности электрического и магнитного полей и с их помощью такие явления, как излучение электромагнитной энергии, распределение объемных зарядов, плотностей токов и т. п.

Разграничение областей применения теории цепей и теории поля является условным. Например, процессы распространения электрических сигналов в линиях электропроводной связи исследуются как методами теории цепей, так и методами теории поля. Здесь сочетаются такие понятия, как напряжение и ток, характерные для теории цепей, и скорость распространения электромагнитной энергии, характерная для теории поля.

Первая и вторая части настоящего курса посвящены теории цепей; третья часть посвящена теории поля.



ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ, ЭЛЕМЕНТЫ И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1-1. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

Электрической цепью называется совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий напряжения и тока. В общем случае электрическая цепь состоит из источников и приемников электрической энергии и промежуточных звеньев (проводов, аппаратов), связывающих источники с приемниками.

Источниками электрической энергии являются гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы, генераторы и другие устройства, в которых происходит процесс преобразования химической, молекулярно-кинетической, тепловой, механической или другого вида энергии в электрическую. К источникам можно отнести и приемные антенны, в которых в отличие от перечисленных выше устройств, не происходит изменения вида энергии.

Приемниками электрической энергии, или так называемой нагрузкой, служат электрические лампы, электронагревательные приборы, электрические двигатели и другие устройства, в которых электрическая энергия превращается в световую, тепловую, механическую и др. К нагрузкам относятся и передающие антенны, излучающие электромагнитную энергию в пространство.

Расчеты электрических цепей и исследования процессов, происходящих в них, основываются на различных допущениях и некоторой идеализации реальных объектов электрических цепей. Под элементами в теории электрических цепей подразумеваются обычно не физические существующие составные части электротехнических устройств, а их идеализированные модели, которым

теоретически приписываются определенные электрические и магнитные свойства, так что они в совокупности приближенно отображают явления, происходящие в реальных устройствах.

В теории электрических цепей различают активные и пассивные элементы. Активными элементами считаются источники электрической энергии: источники напряжения и источники тока. К пассивным элементам электрических цепей относятся сопротивления, индуктивности и емкости. Соответственно различают активные и пассивные цепи.

Эти важные понятия, лежащие в основе теоретической электротехники, подробно рассмотрены ниже.

1-2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

Электрический ток в проводящей среде есть упорядоченное движение электрических зарядов. Известно, что электрический ток проводимости в металлах, так же как и ток переноса в электровакуумных приборах, представляет собой перемещение отрицательно заряженных частиц (электронов), а ток проводимости в электролитах и газах — перемещение как положительно, так и отрицательно заряженных частиц (ионов).

Электрическому току приписывается направление. Хотя в общем случае ток представляет собой движение электрических зарядов того и другого знаков в разные стороны, однако за направление тока принимают направление перемещения положительных зарядов; это направление противоположно направлению движения отрицательных зарядов.

Численно ток определяется как предел отношения количества электричества, переносимого заряженными частицами сквозь рассматриваемое поперечное сечение проводника за некоторый промежуток времени, к этому промежутку времени, когда он стремится к нулю. Следовательно, если обозначить через q количество электричества, прошедшего через рассматриваемое сечение проводника за время t , то мгновенное значение тока, т. е. значение его в любой момент времени t , определится как производная q по t : $i = dq/dt$. Здесь $q = q_+ + q_-$, где q_+ и q_- — положительный и отрицательный заряды, переместившиеся в противоположные стороны за время t .

В Международной системе единиц i измеряется в амперах¹ (a), q — в кулонах (κ) или ампер-секундах ($a \cdot \text{сек}$), t — в секундах (сек).

Электрический ток может быть постоянным (неизменяющимся) или переменным, т. е. изменяющимся в зависимости от времени.

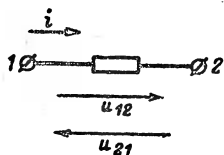


Рис. 1-1. Участок электрической цепи с выбранными положительными направлениями тока и напряжения.

Направление тока характеризуется знаком тока. Понятия положительный ток или отрицательный ток имеют смысл, только если сравнивать направление тока в проводнике с некоторым заранее выбранным ориентиром — так называемым положительным направлением.

Положительное направление тока выбирается произвольно; оно обычно указывается стрелкой. Если в результате расчета тока, выполненного с учетом выбранного положительного направления, ток имеет знак плюс ($i > 0$), то это означает, что его направление совпадает с выбранным положительным направлением. В противном случае, когда ток отрицателен ($i < 0$), он направлен противоположно.

Таким образом, выбранное для тока положительное направление само по себе не означает направления, в котором перемещаются электрические заряды; оно только придает определенный смысл знаку тока.

Изобразим некоторый участок электрической цепи, через который проходит ток i , в виде прямоугольника и обозначим концы (зажимы) этого участка цифрами 1 и 2 (рис. 1-1). Разность электрических потенциалов точек 1 и 2 представляет собой напряжение на данном участке цепи². Напомним, что разность электрических

¹ Ампер — величина неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ единиц силы Международной системы на каждый метр длины (ГОСТ 9867-61).

² Разность электрических потенциалов двух точек — скалярная величина, характеризующая потенциальное электрическое поле, равная линейному интегралу напряженности электрического поля от одной данной точки до другой (ТТЭ).

потенциалов определяется работой, затрачиваемой на перенос единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Значение напряжения в любой текущий момент времени обозначается через u ; оно может быть постоянным или переменным. В системе СИ напряжение измеряется в вольтах (в).

Для придания определенного смысла знаку напряжения на рассматриваемом участке цепи для напряжения, так же как и для тока, произвольно выбирается положительное направление. Чаще всего его выбирают совпадающим с положительным направлением тока и указывают стрелкой.

В выбранном положительном направлении и отсчитывается напряжение. Пусть на рис. 1-1 отсчет напряжения ведется от точки 1 к точке 2. Когда потенциал точки 1 выше потенциала точки 2, напряжение положительно; в противном случае оно отрицательно.

Для уяснения выбранного направления отсчета напряжения можно вместо стрелки пользоваться обозначением с помощью индексов, при котором порядок расположения индексов, соответствующих точкам цепи, отвечает положительному направлению, выбранному для напряжения. Так, применительно к рис. 1-1 напряжение, отсчитываемое в положительном направлении тока, равно u_{12} . Напряжение, отсчитываемое в обратном направлении, имеет противоположный знак: $u_{21} = -u_{12}$.

Двойное индексное обозначение возможно и для тока. Например, i_{12} обозначает ток, который имеет положительное направление на участке цепи от точки 1 к точке 2. Однако на практике большее распространение нашло обозначение с помощью стрелок.

Положительными направлениями токов и напряжений пользуются при исследовании процессов, происходящих в электротехнических устройствах, и расчете электрических цепей. Для краткости положительное направление будем называть просто направлением.

Отчетливое уяснение этих важных понятий совершенно обязательно для усвоения всего последующего материала.

1-3. МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ

Предположим, что через участок электрической цепи (приемник энергии) под воздействием приложенного напряжения u проходит электрический заряд q . Совершаемая при этом элементарная работа, или, что то же, поступающая в приемник элементарная энергия, равна:

$$dw = udq = ui dt.$$

Производная энергия по времени, т. е. скорость поступления в цепь электрической энергии в данный момент времени, представляет собой мгновенную мощность. Следовательно, мгновенная мощность, поступающая в приемник, равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = \frac{dw}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui.$$

Мгновенная мощность p — величина алгебраическая; она положительна при одинаковых знаках u и i и отрицательна при разных знаках.

Если положительные направления для напряжения и тока приняты совпадающими, то при $p > 0$ энергия поступает в приемник, а при $p < 0$ она возвращается из рассматриваемого участка цепи к источнику.

Энергия, поступившая в приемник за промежуток времени от t_1 до t_2 , выражается интегралом

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

В отличие от мгновенной мощности p , которая может иметь любой знак, энергия, поступившая в приемник, не может быть отрицательной.

В системе СИ работа и энергия измеряются в джоулях (дж), мощность p — в ваттах (вт).

1-4. СОПРОТИВЛЕНИЕ

Сопротивлением называется идеализированный элемент цепи, приближенно заменяющий резистор¹, в

¹ Получивший распространение в последние годы термин «резистор» дает возможность более точно применять термин «сопротивление».

котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую. При этом термин «сопротивление» и соответствующее ему буквенное обозначение r применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки величины, равной отношению напряжения на данном элементе цепи к току, проходящему через него:

$$r = \frac{u}{i}. \quad (1-1)$$

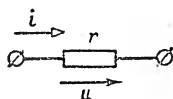


Рис. 1-2. Условное обозначение сопротивления.

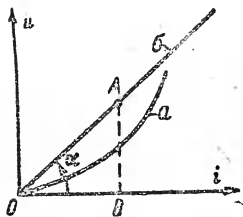


Рис. 1-3. Вольт-амперная характеристика сопротивления.
а — нелинейная; б — линейная.

Здесь предполагается, что положительные направления тока и напряжения совпадают; при этом знаки u и i одинаковы и $r > 0$.

Величина $g = 1/r$, обратная сопротивлению, называется проводимостью. В системе СИ сопротивление r измеряется в омах (ом), а проводимость g — в сименсах (сим).

Формула (1-1) выражает закон Ома, экспериментально установленный Омом в 1826 г.

Условное графическое изображение сопротивления (резистора) с указанием выбранных положительных направлений тока и напряжения приведено на рис. 1-2.

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление, равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p_r = ui = ri^2 = gu^2.$$

Следовательно, параметр r может быть численно определен как отношение мгновенной мощности к квадрату мгновенного значения тока, проходящего через сопротивление:

$$r = \frac{p_r}{i^2}.$$

Электрическая энергия, поступившая в сопротивление r и превращенная в тепло, начиная с некоторого момента времени, например $t=0$, до рассматриваемого момента t , равна:

$$w_r = \int_0^t p_r dt = \int_0^t ri^2 dt = \int_0^t gu^2 dt.$$

В случае постоянного тока ($i=I=\text{const}$) $w_r=rI^2t$.

Превращение электрической энергии w_r в тепловую впервые было доказано опытным путем Джоулем и Ленцем, установившими тепловой эквивалент электрической энергии, равный $0,24 \text{ кал/дж}$. Следовательно, теплота, эквивалентная израсходованной электрической энергии w_r , составляет $Q=0,24 w_r \text{ кал}$ (точнее, $Q=0,239 w_r$ — см. ГОСТ 8550-61).

Выделение током тепловой энергии впервые использовано для целей освещения А. Н. Лодыгиным, создавшим в 1873 г. лампу накаливания¹. Оно целесообразно используется в технике — электронагревательных приборах и т. п. К вредным последствиям теплового действия тока относятся потери электрической энергии в проводах, машинах, аппаратах, порча изоляции проводов от нагрева и т. п.

Параметр r в общем случае зависит от тока i (например, вследствие нагрева сопротивления током). Зависимость напряжения на сопротивлении от тока, проходящего через данное сопротивление, называется вольт-амперной характеристикой, которая в общем случае нелинейна.

Если сопротивление r не зависит от величины и направления тока, то имеет место прямая пропорциональность между напряжением и током, выражающая закон Ома. В этом случае сопротивление называется линейным. На рис. 1-3 показаны вольт-амперные характеристики сопротивления. — нелинейная (кривая a) и линейная (прямая b). В этой книге рассматриваются линейные сопротивления.

Очевидно, величина линейного сопротивления r пропорциональна тангенсу угла наклона прямолинейной вольт-амперной характеристики к оси тока:

$$r = \frac{u}{i} = \frac{m_u AB}{m_i OB} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \alpha,$$

¹ Эдисон изобрел лампу накаливания в 1879 г., после Лодыгина.

где m_u и m_i — масштабы напряжения, v/mm , и тока, a/mm , на чертеже.

1-5. ИНДУКТИВНОСТЬ

Индуктивностью называется идеализированный элемент электрической цепи, приближающийся по свойствам к индуктивной катушке, в которой накапливается энергия магнитного поля¹. При этом термин «индуктивность» и соответствующее ему условное обозначение L применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения потокоцепления самоиндукции к току в данном элементе²:

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Потокоцеплением самоиндукции цепи называется сумма произведений магнитных потоков, обусловленных только током в этой цепи, на число витков, с которыми они сцеплены. Если все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то потокоцепление равно произведению магнитного потока на число витков.

В Международной системе единиц Ψ измеряется в веберах (*вб*), L — в генри (*гн*). При этом всегда потокоцепление и ток имеют одинаковый знак, так что $L > 0$.

Зависимость потокоцепления от тока в общем случае нелинейна, и параметр L зависит от тока. В случае, когда характеристика $\Psi(i)$ прямолинейна, индуктивность L постоянна (линейная индуктивность). На рис. 1-4 показаны нелинейная и линейная зависимость потокоцепления от тока. В этой книге рассматриваются линейные индуктивности.

На основании закона электромагнитной индукции Фарадея — Максвелла изменение потокоцепления само-

¹ Магнитное поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами движущихся заряженных частиц и тел и изменением электрического поля, оказывающая силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы и выявляемая по силовому воздействию, направленному нормально к направлению движения этих частиц и пропорциональному их скорости (ТТЭ).

² Термином «индуктивность» заменен ранее применявшийся в литературе и ныне не рекомендуемый термин «коэффициент самоиндукции».

индукции вызывает электродвижущую силу (э. д. с.) самоиндукции, которая выражается формулой

$$e_L = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (1-2)$$

По закону Ленца, выражающему принцип электромагнитной инерции, эта э. д. с. противодействует изменению потокосцепления, что и учитывается знаком минус в (1-2), поскольку положительное направление для e_L выбрано совпадающим с положительным направлением i .

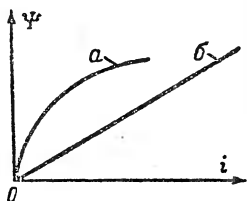


Рис. 1-4. Зависимость потокосцепления от тока.

a — нелинейная; b — линейная.

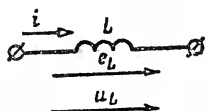


Рис. 1-5. Условное обозначение индуктивности и положительные направления тока, э. д. с. самоиндукции и напряжения.

Ввиду совпадения положительных направлений e_L и i положительные направления магнитного потока вдоль оси витков и наводимой им э. д. с. самоиндукции, точно так же как и положительные направления тока и создаваемого им магнитного потока, связаны правилом правого хода винта.

Условное графическое изображение индуктивности с указанием выбранных положительных направлений тока и э. д. с. самоиндукции приведено на рис. 1-5.

Если L не зависит от i , то предыдущая формула принимает вид:

$$e_L = - L \frac{di}{dt}. \quad (1-3)$$

Величина

$$u_L = - e_L = L \frac{di}{dt} \quad (1-4)$$

называется падением напряжения в индуктивности или, что то же, напряжением на индуктивности.

Положительное направление u_L совпадает с положительным направлением i (рис. 1-5).

На основании (1-4) ток в индуктивности

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt.$$

или

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

Нижний предел интеграла принят равным $-\infty$, так как до рассматриваемого момента времени t процесс мог длиться сколь угодно долго.

При $t=0$ ток в индуктивности равен:

$$i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt;$$

следовательно,

$$i = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt,$$

т. е. в интервале времени от нуля до t ток в индуктивности изменяется на величину $\frac{1}{L} \int_0^t u_L dt$, определяемую площадью, ограниченной в этом интервале кривой напряжения u_L .

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, равна произведению мгновенных значений тока и напряжения:

$$p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}.$$

Она связана с процессом нарастания или убывания энергии магнитного поля. Энергия магнитного поля в произвольный момент времени t определяется по формуле

$$w_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_0^i Li di = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Здесь учтено, что при $t=-\infty$ ток в индуктивности $i(-\infty)=0$.

Если часть магнитного потока, связанного с индуктивным элементом, связана одновременно и с другим индуктивным элементом, то эти два элемента, кроме параметров L_1 и L_2 , обладают параметром M , называемым взаимной индуктивностью. Последний, как это будет показано в § 8-1, представляет собой отношение потокоцепления взаимной индукции одного из элементов к току в другом элементе:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}; \quad (1-5)$$

здесь Ψ_{12} — потокоцепление первого элемента, обусловленное током второго элемента; Ψ_{21} — потокоцепление второго элемента, обусловленное током первого элемента.

В этом случае в первом и втором элементах наводятся э. д. с. взаимной индукции, равные соответственно:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= - \frac{d\Psi_{12}}{dt} = - M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= - \frac{d\Psi_{21}}{dt} = - M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

Выражения (1-6) получены в предположении, что M не зависит от i_1 и i_2 , так как здесь рассматриваются линейные цепи.

M измеряется, так же как и L , в генри. Однако в отличие от параметра L взаимная индуктивность M обозначает не какой-либо самостоятельный элемент электрической цепи, а лишь магнитную связь между индуктивными элементами.

Вопрос взаимной индуктивности подробнее рассмотрен в гл. 8.

1-6. ЕМКОСТЬ

Емкостью называется идеализированный элемент электрической цепи, приближенно заменяющий конденсатор, в котором накапливается энергия электрического поля¹. При этом термин «емкость» и соответствующее

¹ Электрическое поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывающая силовое воздействие на заряженные частицы и тела и выявляемая по силовому воздействию на неподвижные заряженные тела и частицы (ТТЭ).

ему буквенное обозначение C применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения заряда к напряжению на этом элементе:

$$C = \frac{q}{u_C}. \quad (1-7)$$

Если q и u_C измеряются в кулонах (κ) и вольтах (в), то C измеряется в фарадах (ϕ). При этом всегда заряд и напряжение имеют одинаковый знак, так что $C > 0$.

Зависимость заряда от напряжения в общем случае нелинейна, и, следовательно, параметр C зависит от напряжения.

В случае, когда характеристика $q(u)$ прямолинейна, емкость C постоянна (линейная емкость). На рис. 1-6 показаны нелинейная и линейная зависимости заряда от напряжения. В этой книге рассматриваются линейные емкости.

Предположим, что емкость образована двумя пластинами, разделенными диэлектриком. Под влиянием приложенного напряжения на пластинах сосредоточатся равные количества электричества противоположных знаков; пластина с более высоким потенциалом зарядится положительным электричеством, а пластина с более низким потенциалом — отрицательным.

При изменении напряжения, приложенного к пластинам, изменится в соответствии с (1-7) электрический заряд: к пластине, потенциал которой возрастет, поступит дополнительный положительный заряд, а к пластине, потенциал которой снизится, поступит такой же отрицательный заряд.

Ток равен производной электрического заряда по времени. Поэтому с изменением напряжения на емкости в присоединенной к ней последовательно электрической цепи создается ток, величина которого определяется скоростью изменения заряда на емкости:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1-8)$$

Здесь знак заряда q соответствует знаку пластины, к которой направлен ток i .

Этот ток рассматривается как ток проводимости в проводниках, присоединенных к емкостному эле-

менту (ток, обусловленный движением заряженных частиц под действием электрического поля в веществе, обладающем электропроводностью), переходящий в ток смещения¹ в диэлектрике емкостного элемента. Последнее понятие, применяемое в теории поля, означает величину, прямо пропорциональную скорости изменения напряженности электрического поля (в случае однородного поля и $\epsilon = \text{const}$).

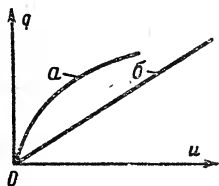


Рис. 1-6. Зависимость электрического заряда от напряжения.

a — нелинейная; *b* — линейная.

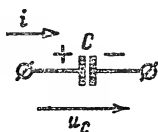


Рис. 1-7. Условное обозначение емкости и положительные направления тока и напряжения.

Напомним, что напряженность электрического поля определяется силой, действующей на электрический заряд, равный единице².

Ток смещения имеет размерность тока. Благодаря введению этого понятия ток в цепи с емкостью представляется замкнутым через диэлектрик.

Согласно (1-8) ток положителен, когда заряд q и соответственно напряжение u_c возрастают.

На основании (1-8) напряжение на емкости

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

¹ Электрический ток смещения — скалярная величина, равная пределу отношения приращения потока вектора электрического смещения сквозь рассматриваемую поверхность за некоторый промежуток времени к этому промежутку времени, когда он стремится к нулю (ТТЭ).

² Напряженность электрического поля — векторная величина, характеризующая силовое действие электрического поля на электрически заряженные тела и частицы, равная пределу отношения силы, с которой электрическое поле действует на неподвижное точечное заряженное тело, внесенное в рассматриваемую точку поля, к заряду этого тела, когда этот заряд стремится к нулю, и направление которой принимается совпадающим с направлением силы, действующей на положительно заряженное точечное тело (ТТЭ).

или

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt.$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что до рассматриваемого момента времени t процесс мог длиться сколь угодно долго, и поэтому нижний предел интеграла принят равным $-\infty$.

При $t=0$ напряжение на емкости равно:

$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i \, dt.$$

Следовательно,

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt,$$

т. е. в интервале времени от нуля до t напряжение на емкости изменяется на величину $\frac{1}{C} \int_0^t i \, dt$, определяемую площадью, ограниченной в этом интервале кривой тока i .

Условное графическое изображение емкости с указанием положительных направлений тока и напряжения приведено на рис. 1-7. Полярность емкости, указанная на рис. 1-7 знаками $+$ и $-$, соответствует положительному напряжению u_C , т. е. положительному заряду на пластине $+$.

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна $p_C = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt}$. Она связана с процессом накопления или убыли электрического заряда в емкости.

Когда заряд положителен и возрастает, ток положителен и в емкость поступает электрическая энергия из внешней цепи.

Когда заряд положителен, но убывает, т. е. ток отрицателен, энергия, ранее накопленная в электрическом поле емкости, возвращается во внешнюю цепь.

Допустим, что к емкости C приложено некоторое напряжение u_C . Энергия электрического поля в произвольный момент времени t определяется по формуле

$$w_c = \int_{-\infty}^t p_c dt = \int_0^u C u_c du_c = \frac{C u_c^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Здесь учтено, что при $t = -\infty$ напряжение на емкости $u_c(-\infty) = 0$.

1-7. ЗАМЕЩЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ИДЕАЛИЗИРОВАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ЦЕПИ

Представление о сопротивлении, индуктивности и емкости как идеализированных элементах электрической цепи основано на предположении, что потери энергии, магнитное и электрическое поля сосредоточиваются в отдельных, не зависящих друг от друга элементах цепи. Раздельное рассмотрение сопротивления, индуктивности и емкости представляет приближенный метод исследования цепи. В действительности потери энергии, магнитные и электрические поля сопутствуют друг другу.

Электропроводность всякого изотропного вещества характеризуется так называемой удельной электрической проводимостью, равной отношению величины плотности тока проводимости к величине напряженности электрического поля. Величина, обратная удельной электрической проводимости, называется удельным электрическим сопротивлением.

Электрическое сопротивление проводника при постоянном токе, равное отношению постоянного напряжения на рассматриваемом проводнике к постоянному току в нем, зависит от длины проводника l (м), площади поперечного сечения S (м²) и удельного сопротивления ρ (ом·м):

$$r = \rho \frac{l}{S}, \text{ ом.}$$

В широких пределах изменения температуры зависимость удельного сопротивления проводника от температуры практически прямолинейна, причем в случае металлических проводников кривая $\rho = f(\theta)$ с повышением температуры возрастает, а в случае неметаллических материалов (например, угля) и электролитов — падает.

Если обозначить через ρ_1 и ρ_2 удельные сопротивления при температурах θ_1 и θ_2 , а через θ_0 — температуру, соответствующую точке пересечения спрямленной харак-

теристики $\rho = f(\theta)$ с осью (рис. 1-8), то получится пропорция

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\theta_0 - \theta_2}{\theta_0 - \theta_1}.$$

Эта пропорция служит для вычисления ρ_2 , если известно ρ_1 .

Значения ρ_1 (при $\theta_1 = 20^\circ \text{C}$) и θ_0 для некоторых проводников приведены ниже:

алюминий $\rho_1 = 2,83 \cdot 10^{-8} \text{ ом} \cdot \text{м}$; $\theta_0 = -236^\circ \text{C}$;

медь $\rho_1 = 1,724 \cdot 10^{-8} \text{ ом} \cdot \text{м}$; $\theta_0 = -234^\circ \text{C}$;

уголь $\rho_1 = 3\,500 \text{ ом} \cdot \text{м}$; $\theta_0 = +1\,825^\circ \text{C}$.

Как было пояснено выше, понятие сопротивления непосредственно связано с потерей энергии, т. е. с необратимым процессом поглощения электромагнитной энергии.

Количество тепла, выделяемого при прохождении тока через какой-либо проводник, зависит от ряда факторов, в том числе от частоты тока. При невысоких частотах сопротивление проводника мало отличается от сопротивления при постоянном токе. С повышением же частоты ток распределяется по сечению проводника неравномерно: внутри проводника плотность тока уменьшается, ток вытесняется к поверхности проводника, что вызывает как бы уменьшение сечения проводника, а значит, увеличение сопротивления. Последнее приводит к увеличению тепловых потерь в проводнике. Это явление носит название поверхностного эффекта (см. ч. III).

Неравномерность распределения тока по сечению проводника и возрастание вследствие этого тепловых потерь происходят также под влиянием тока, проходящего по соседнему проводнику. Это явление носит название эффекта близости.

Кроме того, переменное магнитное поле наводит в окружающей проводник проводящей среде вихревые токи, что вызывает дополнительную потерю энергии на нагрев.

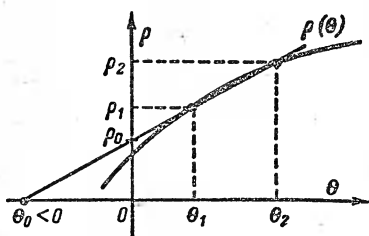


Рис. 1-8. Спрявленная характеристика $\rho = f(\theta^\circ)$.

К этому можно еще добавить излучение в пространство электромагнитной энергии, наблюдаемое при высоких частотах и вызывающее дополнительное увеличение сопротивления.

Вследствие наличия магнитного и электрического полей проводник наряду с сопротивлением имеет некоторые индуктивность и емкость.

Вычисление сопротивления, индуктивности и емкости проводника с учетом указанных выше факторов относится к задачам теории поля.

Для уменьшения индуктивности и собственной емкости проволочные резисторы выполняются в виде пластинчатых или плетеных элементов. Применяются также непроволочные резисторы. Последние представляют собой фарфоровые цилиндрики, на которые нанесен слой углерода (так называемые углеродистые резисторы), или стержни из глинистого материала, смешанного с графитом (объемные карбокерамические резисторы).

Теперь представим себе простейшую и н д у к т и в н у ю к а т у ш к у в виде нескольких круговых витков проводника, по которому проходит ток.

При постоянном токе напряжение на зажимах катушки определится величиной падения напряжения на ее сопротивлении в соответствии с (1-1) и ток во всех точках будет одинаковым.

При переменном же токе изменяющееся магнитное поле будет наводить в витках э. д. с. самоиндукции. Между витками, так же как и между отдельными точками смежных витков, электрическое поле станет переменным. В связи с этим ток в различных витках будет неодинаковым, так как появится ток смещения между витками. Чем выше частота переменного тока, тем больше будут э. д. с. самоиндукции и ток смещения. При низких частотах током смещения можно пренебречь; при высоких же частотах ток смещения, обусловленный изменением напряженности электрического поля, может быть соизмерим по величине с током в витках или даже может превышать его. Таким образом, в зависимости от выбранного диапазона частот индуктивная катушка может быть представлена либо как сопротивление r (при постоянном токе — рис. 1-9, а), либо как индуктивность L с последовательно включенным сопротивлением r (при низких частотах — рис. 1-9, б), либо как индуктивность L и сопро-

тивление r , соединенные параллельно с емкостью C (при высоких частотах — рис. 1-9, в).

Если катушка имеет много витков, то проходящий через нее ток создает магнитный поток, пропорциональный числу витков.¹ Считая, что этот магнитный поток сцеплен со всеми витками катушки, приходим к выводу, что потокосцепление самоиндукции и соответственно индуктивность катушки пропорциональны квадрату числа витков.

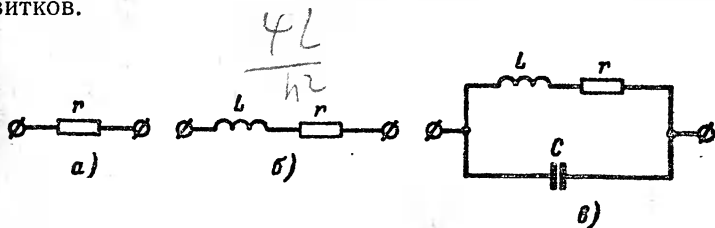


Рис. 1-9. Электрические схемы замещения индуктивной катушки.
а — при постоянном токе; б — при низких частотах; в — при высоких частотах.

Положим, например, что катушка, состоящая из w витков, насажена на тороид или достаточно длинный прямоугольный сердечник, длина которого l (м) и площадь поперечного сечения S (м²).

Обозначим через μ_a абсолютную магнитную проницаемость¹ сердечника (равную произведению относительной магнитной проницаемости μ на магнитную постоянную $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м).

Магнитный поток в сердечнике определяется отношением намагничивающей силы (н. с.) всей катушки iw к магнитному сопротивлению магнитопровода $r_m \approx \frac{l}{\mu_a S}$:

$$\Phi \approx \frac{iw\mu_a S}{l}, \text{ вб.}$$

Поэтому индуктивность катушки согласно определению

$$L = \frac{w\Phi}{i} \approx \frac{w^2 \mu_a S}{l}, \text{ гн.}$$

¹ Абсолютная магнитная проницаемость для изотропного вещества — скалярная величина, характеризующая магнитные свойства вещества, равная отношению величины магнитной индукции к величине напряженности магнитного поля (ТТЭ).

Она определяется геометрическими размерами катушки, магнитной проницаемостью сердечника и квадратом числа витков.

Перейдем теперь к рассмотрению плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных пластин, разделенных диэлектриком. При постоянном напряжении и идеальном диэлектрике тока в цепи не будет. Если напряжение переменное, то в процессе изменения

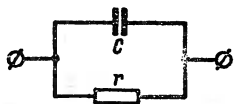


Рис. 1-10. Электрическая схема замещения конденсатора.

электрического заряда возникает переменный ток, создающий переменное магнитное поле. Эффект, вызываемый магнитным полем, может быть учтен в электрической схеме замещения с помощью некоторой индуктивности, включенной последовательно с емкостью конденсатора. Обычно этой индуктивностью пренебрегают из-за ее относительной малости. Наконец, в диэлектрике благодаря некоторой проводимости возникают тепловые потери, которые возрастают с частотой. Потери на нагрев учитываются в схеме замещения конденсатора посредством сопротивления r , включенного параллельно емкости C (рис. 1-10).

Емкость конденсатора определяется размерами пластин, расстоянием между ними и диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между пластинами.

Если расстояние между пластинами конденсатора (толщина диэлектрика) достаточно мало по сравнению с размерами пластин, то емкость конденсатора вычисляется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_a S}{d}, \text{ ф},$$

где ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость изоляции между пластинами¹ (равная произведению относительной диэлектрической проницаемости ϵ на электрическую постоянную $\epsilon_0 = 8,855 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$); S — площадь поверхности каждой пластины, м^2 ; d — расстояние между пластинами, м .

¹ Абсолютная диэлектрическая проницаемость для изотропного вещества — скалярная величина, характеризующая электрические свойства диэлектрика, равная отношению величины электрического смещения к величине напряженности электрического поля (ТТЭ).

Чем выше частота и больше линейные размеры самих устройств, тем в большей мере проявляются взаимосвязь электрических и магнитных параметров и неотделимость друг от друга электрического и магнитного полей, являющихся лишь двумя сторонами единого электромагнитного поля.

Строго разграничить области частот, при которых справедлива та или иная схема замещения, не представляется возможным, так как это зависит от множества факторов.

1-8. ИСТОЧНИК НАПРЯЖЕНИЯ И ИСТОЧНИК ТОКА

В теории электрических цепей пользуются идеализированными источниками электрической энергии: источником напряжения и источником тока. Им приписываются следующие свойства.

Источник напряжения (или источник э. д. с.) представляет собой активный элемент с двумя зажимами, напряжение на которых не зависит от тока, проходящего через источник. Предполагается, что внутри такого идеального источника пассивные элементы (r , L , C) отсутствуют и поэтому прохождение через него тока не вызывает в нем падения напряжения.

Упорядоченное перемещение положительных зарядов в источнике от меньшего потенциала к большему возможно за счет присущих источнику сторонних сил. Величина работы, затрачиваемой сторонними силами на перемещение единицы положительного заряда от зажима — к зажиму +, называется электродвижущей силой (э. д. с.) источника и обозначается $e(t)$.

В соответствии со сказанным выше напряжение на зажимах рассматриваемого источника равно его э. д. с., т. е. $u(t) = e(t)$.

Условные обозначения идеального источника напряжения приведены на рис. 1-11, а и б. Здесь стрелкой или знаками + и — указаны положительное направление э. д. с. или полярность источника, т. е. направление возрастания потенциала в источнике для моментов времени, соответствующих положительной функции $e(t)$.

Величина тока в пассивной электрической цепи, подключенной к источнику напряжения, зависит от параметров этой цепи и э. д. с. $e(t)$. Если зажимы идеального источника напряжения замкнуть накоротко, то ток

теоретически должен быть бесконечно велик. Поэтому такой источник рассматривается как источник бесконечной мощности (теоретическое понятие). В действительности при замыкании зажимов реального источника электрической энергии — гальванического элемента, аккумулятора, генератора и т. п. — ток может иметь только конечное значение, так как э. д. с. источника уравновешивается падением напряжения от тока внутри источника (например, в сопротивлении r , индуктивности L).

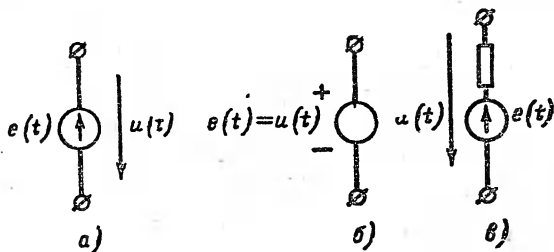


Рис. 1-11. Источники напряжения: идеальные (а, б) и конечной мощности (в).

Источник напряжения конечной мощности изображается в виде источника э. д. с. с подключенным к нему последовательно пассивным элементом, который характеризует внутренние параметры источника и ограничивает мощность, отдаваемую во внешнюю электрическую цепь (рис. 1-11, в). Обычно внутренние параметры источника конечной мощности незначительны по сравнению с параметрами внешней цепи; они могут быть отнесены к последней или в некоторых случаях могут вовсе не учитываться (в зависимости от соотношения величин и требуемой точности расчета).

Источник тока представляет собой активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах. Предполагается, что внутреннее сопротивление такого идеального источника бесконечно велико и поэтому параметры внешней электрической цепи, от которых зависит напряжение на зажимах источника, не влияют на ток источника.

Условные обозначения идеального источника тока приведены на рис. 1-12, а и б. Стрелка в источнике тока или знаки $+$ и $-$ указывают положительное направление

ние тока $i(t)$ или полярность источника, т. е. направление перемещения положительных зарядов, или, что то же, направление, противоположное направлению движения отрицательных зарядов, для тех моментов времени, когда функция $i(t)$ положительна.

По мере неограниченного увеличения сопротивления внешней электрической цепи, присоединенной к идеальному источнику тока, напряжение на его зажимах и соответственно мощность, развиваемая им, неограниченно

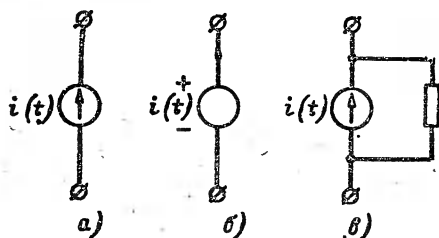


Рис. 1-12. Источники тока: идеальные (а, б) и конечной мощности (в).

возрастают. Поэтому идеальный источник тока, так же как и идеальный источник напряжения, рассматривается как источник бесконечной мощности.

Источник тока конечной мощности изображается в виде идеального источника тока с подключенным к его зажимам пассивным элементом, который характеризует внутренние параметры источника и ограничивает мощность, отдаваемую во внешнюю электрическую цепь (рис. 1-12, в).

Представляя собой теоретическое понятие, источник тока, как будет показано ниже (см. гл. 4 и 7), применяется в ряде случаев для расчета электрических цепей.

Некоторым подобием источника тока может служить устройство, состоящее из аккумулятора, соединенного последовательно с дополнительным большим сопротивлением. Другим примером источника тока может являться пятиэлектродная усилительная электронная лампа (пентод). Имея внутреннее сопротивление, несоизмеримо большее, чем сопротивление внешней электрической цепи, эти устройства отдают ток, почти не зависящий от изменения внешней нагрузки в широких пределах, и

именно в этом отношении они аналогичны источнику тока.

Вольт-амперные характеристики идеальных источников напряжения и тока представляются прямыми, параллельными осям i и u (рис. 1-13, а). Реальные источники электрической энергии по своим вольт-амперным характеристикам могут приближаться к идеальным источникам напряжения или тока. Так, например, в значительной части характеристики $u = f(i)$ напряжение на зажи-

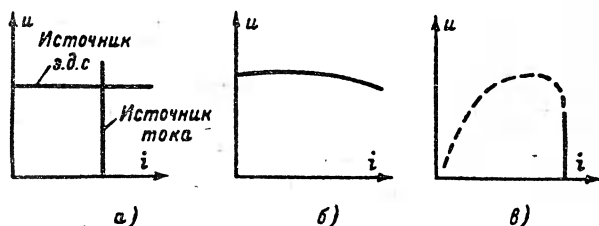


Рис. 1-13. Вольт-амперные характеристики источников напряжения и тока.

а — идеальные источники; б — генератор постоянного тока с независимым возбуждением; в — генератор постоянного тока с последовательным возбуждением.

мах генератора постоянного тока с независимым возбуждением¹, а также ток i генератора постоянного тока с последовательным возбуждением² изменяются незначительно. На рис. 1-13, в соответствующая часть характеристики показана сплошной линией.

1-9. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Как уже указывалось выше, настоящая книга посвящена рассмотрению электрических цепей, в которых сопротивления, индуктивности и емкости не зависят от величин и направлений токов и напряжений. Такие электрические цепи, как и сами элементы, из которых они состоят, называются линейными, так как напряжение и ток в каждом элементе связаны линейным уравнением — алгебраическим или дифференциальным первого порядка.

¹ Обмотка возбуждения питается от постороннего источника.

² Обмотка возбуждения соединена последовательно с цепью якоря.

Действительно, в случае если параметр r не зависит от u и i , то закон Ома (1-1) выражает линейную зависимость между напряжением и током. Если L и C не зависят от u и i , то напряжение и ток связаны линейным дифференциальным уравнением (1-4) в случае индуктивности и уравнением (1-8) в случае емкости.

Что касается активных элементов линейных электрических цепей, то условием линейности идеального источника напряжения является независимость величины э. д. с. от тока, проходящего через источник, а условием линейности идеального источника тока является независимость тока от напряжения на его зажимах.

Реальные электротехнические и радиотехнические устройства, строго говоря, не подчиняются линейному закону. При прохождении тока через проводник выделяется тепло, проводник нагревается и его сопротивление изменяется. С изменением тока в индуктивной катушке с ферромагнитным сердечником соотношение между потокосцеплением и током, т. е. параметр L , не остается постоянным. В зависимости от диэлектрика в большей или меньшей степени изменяется и емкость конденсатора в функции заряда (или приложенного напряжения). К нелинейным устройствам относятся, кроме того, электронные, ионные и полупроводниковые приборы, параметры которых зависят от тока и напряжения.

Если в рабочем диапазоне, на который рассчитывается то или иное устройство, т. е. при заданных ограниченных пределах изменений напряжения, тока и т. п., закон линейности с достаточной для практики степенью точности сохраняется, то такое устройство рассматривается как линейное.

Исследование и расчет линейных цепей сопряжены, как правило, с меньшими трудностями, чем исследование и расчет нелинейных цепей. Поэтому в тех случаях, когда линейный закон достаточно близко отражает действительность, цепь рассматривается как линейная.

1-10. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ,

ОТНОсяЩИЕСЯ К ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

Электрическая схема представляет собой графическое изображение электрической цепи. Она показывает, как осуществляется соединение элементов рассматриваемой электрической цепи.

«Электрическими» элементами схемы служат активные и пассивные элементы цепи. «Геометрическими» элементами схемы являются ветви и узлы.

Ветвь образуется одним или несколькими последовательно соединенными элементами цепи (рис. 1-14). При

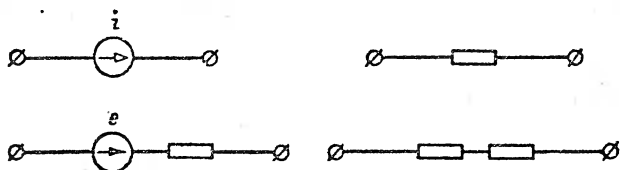


Рис. 1-14. Изображение ветвей электрической схемы.

этом под последовательным соединением элементов цепи понимается такое их соединение, при котором через все эти элементы проходит один и тот же ток¹. В общем случае, если состав ветви неизвестен, последняя изображается прямоугольником.

Узел — место соединения трех или большего числа ветвей (рис. 1-15). Линии, связывающие ветви в схеме,

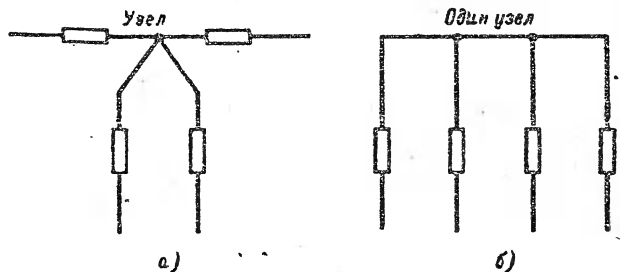


Рис. 1-15. Изображение узла электрической схемы.

представляют соединения без сопротивлений. Поэтому, например, схемы рис. 1-15, *а* и *б* в электрическом смысле одинаковы: они содержат один узел.

¹ Место соединения двух ветвей рассматривается как «устранимый» узел.

Ветви, присоединенные к одной паре узлов (рис. 1-16), называются параллельными.

Рисунок 1-17 в виде примера иллюстрирует электрическую схему, содержащую пять ветвей и три узла.

Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, называется контуром. На рис. 1-17 указано стрелкой направление обхода одного из контуров, образованных в данной электрической схеме.

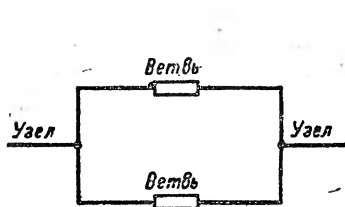


Рис. 1-16. Параллельное соединение двух ветвей.

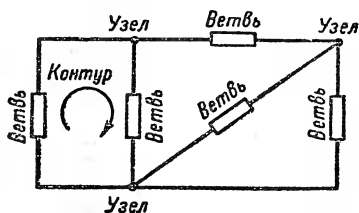


Рис. 1-17. Схема электрической цепи.

В зависимости от числа контуров, имеющих в схеме, различают одноконтурные и многоконтурные схемы. Одноконтурная схема является простейшей. Пользуясь правилами преобразования схем (см. гл. 4), в ряде случаев представляется удобным заменить многоконтурную схему одноконтурной, что упрощает расчеты.

Если ток в электрической цепи постоянен, т. е. его значение не изменяется во времени, то отсутствует явление самоиндукции: производная потокосцепления по времени равна нулю и напряжение, например, на индуктивной катушке определяется только величиной падения напряжения от тока в сопротивлении катушки. Схема замещения индуктивной катушки для этого случая приводилась на рис. 1-9, а.

В свою очередь, если не учитывать проводимости диэлектрика конденсатора, т. е. рассматривать конденсатор как идеальную емкость, то ветвь с такой емкостью представится в электрической схеме цепи постоянного тока разомкнутой: постоянный ток через емкость не проходит.

Таким образом, при рассмотрении электрической цепи постоянного тока в установившемся режиме, при котором напряжения и токи в цепи являются постоянными,

пассивными элементами схемы являются сопротивления, а активными — источники постоянной э. д. с. или постоянного тока.

Индуктивности и емкости учитываются в схемах цепей переменного тока и при переходных (неустановившихся) процессах, возникающих в электрических цепях при переходе от одного режима к другому (см. гл. 14).

1-11. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧАСТКА ЦЕПИ С ИСТОЧНИКОМ

Закон Ома может быть применен к участку цепи с источниками, и для такого участка может быть построена вольт-амперная характеристика.

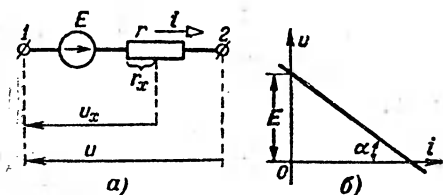


Рис. 1-18. Последовательное соединение сопротивления и источника постоянной э. д. с.

a — схема; *б* — вольт-амперная характеристика.

На рис. 1-18, *a* показана ветвь с последовательно соединенными источником постоянной э. д. с. E и сопротивлением r . Через ветвь проходит ток i , величина и знак которого в общем случае зависят не только от данного источника э. д. с., но и от источников остальной части электрической цепи, присоединенной к зажимам 1 и 2.

При указанных на рис. 1-18, *a* направлениях э. д. с. и тока потенциал зажима 2 выше потенциала зажима 1 на величину э. д. с. за вычетом падения напряжения от тока i в сопротивлении r . Следовательно, напряжение на зажимах ветви равно:

$$u = u_{21} = E - ri. \quad (1-9)$$

По этому уравнению строится вольт-амперная характеристика, которая называется также внешней характеристикой (рис. 1-18, *б*).

Тангенс угла α пропорционален сопротивлению r .

При отрицательном знаке тока i напряжение на сопротивлении r складывается с э. д. с. E и в этом случае $u > E$.

На рис. 1-19, *а* показан участок цепи, состоящий из источника постоянного тока I с параллельным сопротивлением r . Так же как и в предыдущем случае, величина и знак тока i , проходящего через зажимы 1 и 2, зависят

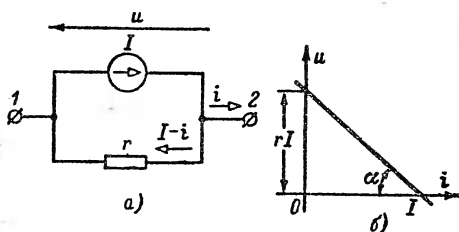


Рис. 1-19. Параллельное соединение сопротивления и источника постоянного тока.

а — схема; *б* — вольт-амперная характеристика.

не только от данного источника, но и от источников остальной части цепи, присоединенной к зажимам 1 и 2.

При указанных на рис. 1-19, *а* направлениях токов через сопротивление r от зажима 2 к зажиму 1 проходит ток $I - i$, создающий напряжение

$$u = rI - ri.$$

По этому уравнению строится вольт-амперная характеристика (рис. 1-19, *б*).

Таким образом, вольт-амперные характеристики участков цепи, состоящих из линейного сопротивления, соединенного последовательно с источником э. д. с. или параллельно с источником тока, прямолинейны.

Из сопоставления вольт-амперных характеристик рис. 1-18 и 1-19 видно, что источник напряжения конечной мощности эквивалентен источнику тока конечной мощности при условии $E = rI$ и потому они могут быть взаимно заменяемы.

В общем случае этот вопрос разобран в § 4-6.

1-12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВДОЛЬ ЦЕПИ С СОПРОТИВЛЕНИЯМИ И ИСТОЧНИКАМИ НАПРЯЖЕНИЯ

Допустим, что на участке цепи, изображенном на рис. 1-18, *а*, величина тока $i = I$ задана. Обозначив через r_x и u_x некоторую часть сопротивления r и соответствующее напряжение относительно зажима 1, получим по аналогии с (1-9) $u_x = E - r_x I$. Следовательно, зависимость $u_x(r_x)$ представляется прямой линией (рис. 1-20), причем тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс пропорционален I :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{rI}{m_u} : \frac{r}{m_r} = I \frac{m_r}{m_u},$$

где m_u и m_r — масштабы, в которых отложены на рис. 1-20 напряжения и сопротивления.

При переходе через источник э. д. с. по направлению, совпадающему с направлением действия э. д. с., потенциал возрастает скачкообразно на величину E , затем при прохождении через сопротивление r_x (по направлению

тока) убывает прямолинейно на величину падения напряжения $r_x I$. Если не выделять сопротивление r , а рассматривать его как сопротивление источника напряжения, равномерно распределенное внутри самого источника, то график изменения потенциала внутри источника представится в виде прямой OA (рис. 1-20).

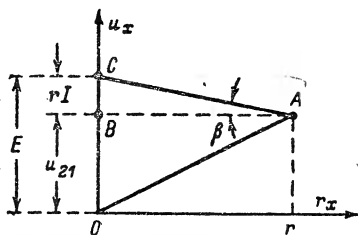


Рис. 1-20. Зависимость напряжения от сопротивления (при заданном токе).

Теперь рассмотрим какую-нибудь неразветвленную электрическую цепь постоянного тока, содержащую сопротивления и источники э. д. с. (рис. 1-21, *а*), и построим для нее график изменения потенциала. Приравняем нулю потенциал одной точки этого контура. Начав обход контура с этой точки, придем к исходному потенциалу. Примерный график распределения потенциала в этом случае показан на рис. 1-21, *б*. Следует обратить внимание на то, что при переходе через источник э. д. с. в направлении, противоположном э. д. с., потенциал снижается на величину этой э. д. с.

На графике наклон прямых линий одинаков, так как ток во всех сопротивлениях один и тот же (одноконтурная цепь). В случае разветвленной цепи, где токи в вет-

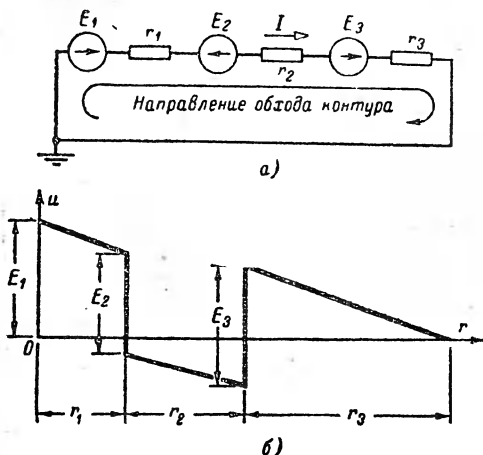


Рис. 1-21. Распределение потенциала вдоль цепи постоянного тока.

а — схема; б — график потенциала.

вях различны, наклон прямых линий графика потенциала неодинаков.

1-13. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Основными законами теории цепей наряду с законом Ома являются законы баланса токов в разветвлениях (первый закон Кирхгофа) и баланса напряжений на замкнутых участках цепи (второй закон Кирхгофа).

Распределение токов и напряжений в электрических цепях подчиняется законам Кирхгофа, которые должны быть основательно усвоены для отчетливого понимания материала всех последующих разделов курса.

Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum i = 0. \quad (1-10)$$

Суммирование распространяется на токи i в ветвях, сходящихся в рассматриваемом узле. При этом знаки токов берутся с учетом выбранных положительных направлений токов: всем токам, направленным к узлу, в уравнении (1-10) приписывается одинаковый знак, например положительный, и соответственно все токи, направленные от узла, входят в уравнение (1-10) с противоположным знаком. Иначе говоря, всякий ток, на-

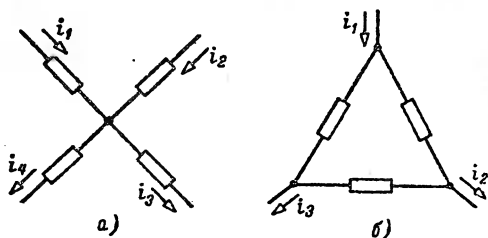


Рис. 1-22. Иллюстрация к первому закону Кирхгофа.

правленный от узла, может рассматриваться как ток, направленный к узлу, но имеющий противоположный знак.

На рис. 1-22, а в качестве примера показан узел, в котором сходятся четыре ветви. Уравнение (1-10) имеет в этом случае вид:

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа выражает тот факт, что в узле электрический заряд не накапливается и не расходуется. Сумма электрических зарядов, приходящих к узлу, равна сумме зарядов, уходящих от узла за один и тот же промежуток времени.

Первый закон Кирхгофа применим не только к узлу, но и к любому контуру или замкнутой поверхности, охватывающей часть электрической цепи, так как ни в каком элементе цепи, ни в каком режиме электричество одного знака не может накапливаться.

Так, например, для схемы рис. 1-22, б имеем:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма э. д. с. в любом контуре цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура:

$$\sum e = \sum u. \quad (1-11)$$

Обход контура совершается в произвольно выбранном направлении, например по ходу часовой стрелки. При этом соблюдается следующее правило знаков для э. д. с. и падений напряжения входящих в (1-11): э. д. с. и падения напряжения, совпадающие по направлению с направлением обхода, берутся с одинаковыми знаками.

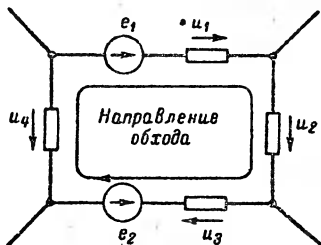


Рис. 1-23 Иллюстрация ко второму закону Кирхгофа.

Например, для схемы рис. 1-23 имеем:

$$e_1 - e_2 = u_1 + u_2 + u_3 - u_4.$$

Уравнение (1-11) можно переписать так:

$$\sum (u - e) = 0. \quad (1-12)$$

Здесь $(u - e)$ — напряжение на ветви. Следовательно, *алгебраическая сумма напряжений на ветвях в любом замкнутом контуре равна нулю.*

Формулы (1-10) и (1-11) написаны в общем виде для мгновенных значений токов, напряжений и э. д. с.; они справедливы для цепей как переменного, так и постоянного тока.

График изменения потенциала, рассмотренный в предыдущем параграфе, служит графической иллюстрацией второго закона Кирхгофа.

1-14. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1-1. Определить сопротивление медного провода при 10°C , если при 60°C оно равно 5 ом .

Ответ: $4,15 \text{ ом}$.

1-2. Показать, что величины rC , L/r и $\sqrt{LC}$ имеют размерность времени.

1-3. Показать, что r^2C имеет размерность индуктивности, $\sqrt{\frac{L}{C}}$

— размерность сопротивления, L/r^2 — размерность емкости.

1-4. Ток $i = e^{-at}$ проходит через ветвь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности L .

Определить напряжения на сопротивлении, индуктивности и на всей ветви, приняв $a = r/L$; объяснить физически полученный результат.

1-5. Начиная с момента $t = 0$ через сопротивление 1 ом проходит ток $i = 1 - e^{-t} [a]$. Какое количество энергии выделится в виде тепла к моменту времени, когда ток достигнет значения $0,632 a$?

Ответ: $0,168 \text{ дж}$.

1-6. Начиная с момента $t = 0$ через индуктивность $L = 1 \text{ гн}$ проходит ток $i = 1 - e^{-t} [a]$. Определить напряжение на индуктивности и энергию магнитного поля в момент времени, когда ток достигнет значения $0,632 a$.

• Ответ: $0,37 \text{ в}$; $0,2 \text{ дж}$.

1-7. Емкость $C = 1 \text{ ф}$, имеющая электрический заряд $q = 1 \text{ к}$, в момент $t = 0$ начинает разряжаться через сопротивление $r = 1 \text{ ом}$. Ток изменяется по закону $i = e^{-t} [a]$. Определить напряжение на емкости и энергию электрического поля в момент, когда ток достигнет значения $0,37 a$.

Ответ: $0,37 \text{ в}$; $0,068 \text{ дж}$.

1-8. Сохранив условия предыдущей задачи, определить, какое количество энергии выделится в виде тепла к моменту времени, когда ток достигнет значения $0,37 a$.

Ответ: $0,432 \text{ дж}$.

1-9. Сохранив условия задачи 1-7, убедиться в том, что энергия, выделенная в виде тепла за бесконечно большое время, равна энергии электрического поля до начала разряда. Определить эту энергию.

Ответ: $0,5 \text{ дж}$.

1-10. Плоский конденсатор состоит из двух листов фольги, каждый площадью 40 см^2 , разделенных парафинированной бумагой толщиной $0,05 \text{ мм}$. Вычислить емкость конденсатора, приняв диэлектрическую проницаемость ϵ парафинированной бумаги равной $1,8$.

Ответ: $1,275 \cdot 10^{-3} \text{ мкф}$.

1-11. Плоский конденсатор, диэлектриком которого служит слюда толщиной 3 мм , имеет емкость $C = 0,0443 \cdot 10^{-3} \text{ мкф}$. Площадь каждой пластины конденсатора равна 25 см^2 . Чему равна диэлектрическая проницаемость слюды?

Ответ: 6 .

1-12. Вычислить приближенно индуктивность катушки без ферромагнитного сердечника, имеющей 300 витков, длину 10 см и сечение 1 см^2 .

Ответ: $0,113 \text{ мГн}$.

1-13. Торондальная катушка состоит из w витков, насаженных на сердечник, поперечное сечение которого — прямоугольник: d_1 и d_2 — внутренний и внешний диаметры тороида; h — толщина тороида. Доказать, что индуктивность катушки равна:

$$L = \frac{\mu_a w^2 h}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}.$$

Указание. Следует составить выражение для кольцевого магнитного потока бесконечно малого сечения и провести интегрирование по сечению тороида.

1-14. В цепи, изображенной на рис. 1-18, a , при токе $i = 2$ а напряжение $u = 10$ в, а при $i = 1$ а $u = 12$ в. Определить э. д. с. E и сопротивление r .

Ответ: 14 в; 2 ом.

1-15. Определить ток I источника тока и сопротивление r в схеме рис. 1-19, a , если ток i и напряжение u изменяются так же, как и в предыдущей задаче.

Ответ: 7 а; 2 ом.

1-16. В цепи, изображенной на рис. 1-21, a , $E_1 = 10,5$ в, $E_3 = 19,5$ в, $r_1 = 2$ ом, $r_2 = 3$ ом, $r_3 = 5$ ом. Найти э. д. с. E_2 , при которой потенциал точки между сопротивлением r_1 и источником э. д. с. E_2 равен по величине и противоположен по знаку потенциалу точки между сопротивлением r_2 и источником э. д. с. E_2 .

Ответ: 15 в.

1-17. Сохранив условия предыдущей задачи, найти э. д. с. E_2 , при которой точка с нулевым потенциалом будет находиться посредине сопротивления r_2 .

Ответ: 0.

1-18. В цепи, изображенной на рис. 1-21, a , $E_1 = 17$ в, $E_2 = 10$ в, $E_3 = 13$ в, $r_1 = 6$ ом, $r_3 = 1$ ом. Определить сопротивление r_2 , при котором потенциал точки между сопротивлением r_1 и источником э. д. с. E_2 равен по величине и противоположен по знаку потенциалу точки между сопротивлением r_2 и источником э. д. с. E_2 .

Ответ: 3 ом.

1-19. Сохранив условия предыдущей задачи, определить сопротивление r_2 , если известно, что точка с нулевым потенциалом находится внутри сопротивления r_2 , причем одна четвертая часть r_2 находится левее этой точки.

Ответ: 35,5 ом.

1-20. Что такое положительное направление тока?

1-21. Зависит ли выбор положительного направления напряжения от положительного направления тока?

1-22. Что понимается под полярностью источника напряжения и источника тока?

1-23. Почему результат расчета электрической цепи не зависит от выбора положительных направлений токов?

1-24. Как выбрано положительное направление э. д. с. самоиндукции в формулах (1-2) и (1-3)? Пояснить связь с законом Ленца.

1-25. Пояснить процесс прохождения переменного тока через конденсатор.

1-26. Исходя из выражений энергии, показать, что сопротивление, индуктивность и емкость всегда положительны.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2-1. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Электромагнитный процесс в электрической цепи, при котором мгновенные значения напряжений и токов повторяются через равные промежутки времени, называется периодическим. Наименьшее время, по истечении которого мгновенные значения периодической величины повторяются, называется периодом. Если величину, являющуюся периодической функцией времени t , обозначить через $F(t)$, то для любого положительного или отрицательного значения аргумента t справедливо равенство

$$F(t \pm T) = F(t),$$

где T — период.

Геометрически это значит, что ординаты двух произвольных точек графика $F(t)$ с абсциссами, различающимися на T , одинаковы.

Величина, обратная периоду, т. е. число периодов в единицу времени, называется частотой:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота имеет размерность $1/\text{сек}$, а единицей измерения частоты служит герц (гц); частота равна 1 гц , если период равен 1 сек .

Преобладающим видом периодического процесса в электрических цепях является синусоидальный режим, характеризующийся тем, что все напряжения и токи являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. Это возможно только при заданных синусоидальных э. д. с. и токах источников. Тем самым обеспечивается наиболее выгодный эксплуатационный режим работы электрических установок.

Как известно из курса математического анализа, синусоида является простейшей периодической функцией; всякие другие несинусоидальные периодические функции могут быть разложены в бесконечный ряд синусоид, имеющих кратные частоты (см. гл. 13). Поэтому для исследова-

дования процессов в цепях переменного тока в первую очередь необходимо изучить особенности цепей синусоидального тока.

На рис. 2-1 изображена синусоидальная функция

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi); \quad (2-1)$$

здесь U_m — максимальное значение, или амплитуда; ω — скорость изменения аргумента (угла), называемая угловой частотой; она равна произведению частоты на 2π :

$$\omega = 2\pi f, \text{ рад/сек}; \quad (2-2)$$

ψ — начальная фаза, определяемая величиной смещения синусоиды относительно начала координат; она измеряется абсциссой точки перехода отрицательной полуволны в положительную.

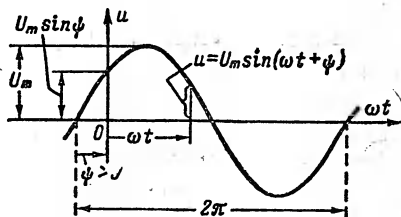


Рис. 2-1. Синусоидальная функция.

Начальная фаза ψ представляет собой алгебраическую величину. Угол ψ положителен и отсчитывается вправо, к точке $t = 0$, когда синусоидальная функция смещена влево относительно начала координат (рис. 2-1).

Косинусоида может рассматриваться как синусоида с начальной фазой $\psi = \frac{\pi}{2}$. Если функция задана в косинусоидальной форме $u = U_m \cos(\omega t + \psi_1)$, то она может быть приведена к виду (2-1) путем замены $\psi_1 = \psi - \frac{\pi}{2}$.

Поэтому к синусоидальным функциям (2-1) в общем случае причисляются и косинусоидальные функции.

За аргумент функции (2-1) может быть принято время t или соответственно угол ωt . Аргументу t соответствует период T , а аргументу ωt — период $\omega T = 2\pi$. Следует иметь в виду, что аргумент ωt измеряется в радианах, причем в тех же единицах измеряется и начальная фаза.

Если угол ψ вычисляется в градусах, то аргумент ωt также переводится в градусы¹; в этом случае период составляет 360° .

¹ Напомним, что $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$.

Величина $\omega t + \psi$, определяющая стадию изменения синусоидальной величины (2-1), называется фазовым углом или фазой. С течением времени фаза возрастает, причем после увеличения фазы на 2π цикл изменения синусоидальной величины повторяется.

Рассмотренные в данном параграфе понятия, характеризующие синусоидальные электрические величины, являются исходными при изучении электрических процессов в цепях переменного тока.

2.2. ГЕНЕРИРОВАНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ Э. Д. С.

Наиболее распространенным в промышленности способом получения синусоидального тока является применение электромагнитных машин, так называемых син-

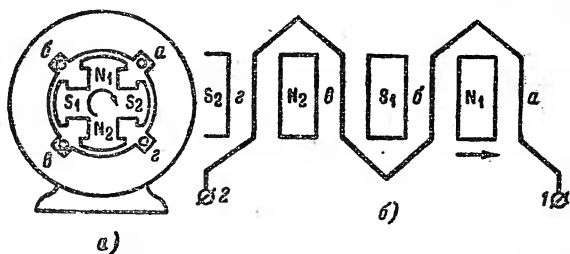


Рис. 2-2. Принцип устройства синхронного генератора.

хронных генераторов, приводимых во вращение тепловыми, газовыми, гидравлическими или другими двигателями.

Генератор переменного тока состоит из двух частей — неподвижного статора и вращающегося ротора. На одном из них (чаще на роторе) располагаются полюсы, т. е. электромагниты, обмотка которых питается от источника постоянного тока, или постоянные магниты. На другом (обычно на статоре) располагается главная обмотка, в которой наводится переменная э. д. с.

Генератор может иметь одну или несколько пар полюсов. На рис. 2-2, а упрощенно показан явнополюсный генератор с двумя парами полюсов, размещенных на роторе. Указанному на рис. 2-2, а положению ротора относительно статора соответствует на рис. 2-2, б развернутая на плоскость схема расположения обмотки и полюсов.

В каждом проводе обмотки, находящемся в пазу статора, при вращении ротора наводится по закону Фарадея э. д. с. $e = Blv$, где B — магнитная индукция поля под проводом; l — длина провода; v — линейная скорость перемещения магнитного поля. В Международной системе B измеряется в теслах (тл), т. е. вб/м².

При постоянных значениях l и v закон изменения э. д. с. $e(t)$ определяется законом распределения магнитной индукции B в воздушном зазоре машины. Благодаря специальной форме полюсных наконечников закон изменения магнитной индукции делается приблизительно синусоидальным вдоль всей окружности зазора между ротором и статором; магнитная индукция максимальна против середин и постепенно убывает к краям полюсных наконечников.

В момент времени, которому соответствует указанное на рис. 2-2 положение ротора, магнитная индукция под проводом равна нулю и поэтому э. д. с. e также равна нулю.

После поворота ротора на одну восьмую часть полного оборота (половина полюсного шага) э. д. с. достигнет максимума и будет направлена от зажима 1 к зажиму 2 (по правилу правой руки)¹. Когда ротор повернется еще на половину полюсного шага, э. д. с. вновь обратится в нуль. При последующем вращении ротора еще на одну восьмую часть оборота э. д. с. достигнет максимума, но будет противоположно направлена — от зажима 2 к зажиму 1, и т. д. Таким образом, на зажимах генератора возникнет практически синусоидальная э. д. с.

При числе пар полюсов p и числе оборотов ротора в минуту n частота наводимой переменной э. д. с. равна:

$$f = \frac{pn}{60} [гц]. \quad (2-3)$$

В энергосистемах СССР и большинства других стран частота промышленного тока равна 50 гц. В США принята частота 60 гц.

В авиации с целью уменьшения веса оборудования

¹ Это правило заключается в следующем: если вектор магнитной индукции входит в ладонь, а отогнутый большой палец показывает направление движения проводника относительно поля, то остальные четыре пальца указывают направление наводимой э. д. с.

Аналогично по правилу левой руки большой палец указывает направление силы, действующей на проводник с током.

применяются машины с повышенной скоростью вращения. Частота f при этом получается повышенной (400—800 гц). Например, генератор, имеющий $p = 2$ и $n = 12\,000$ об/мин, генерирует синусоидальную э. д. с. с частотой

$$f = \frac{2 \cdot 12\,000}{60} = 400 \text{ гц.}$$

При большой скорости вращения ($v > 50$ м/сек) крепление полюсов затруднено и для обеспечения механической прочности применяются неявнополюсные машины, у которых обмотка возбуждения укладывается в пазы цилиндрического ротора неравномерно, так чтобы форма поля была по возможности синусоидальной.

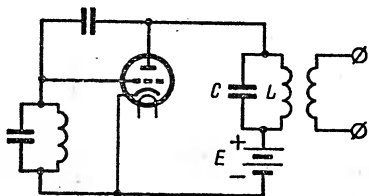


Рис. 2-3. Упрощенная схема электронного генератора.

Проводная связь использует частоты порядка 10^4 — 10^5 гц, а радиотехника — еще более высокие частоты. Генерирование токов высокой частоты осуществляется с помощью электронных или полупроводниковых устройств.

На рис. 2-3 в виде примера показана одна из схем электронного генератора высокой частоты. Анод трехэлектродной лампы (триода) присоединен через контур LC к положительному полюсу источника постоянного напряжения, например аккумуляторной батареи. В контуре LC , называемым резонансным, возникают незатухающие синусоидальные колебания тока, частота которых зависит от выбора параметров L и C . Электрическая энергия, необходимая для поддержания этих колебаний, поступает от аккумуляторной батареи.

Работа электронных генераторов здесь не рассматривается. Процессам, происходящим в резонансных цепях, посвящена гл. 5. Принцип действия электронных генераторов разобран во второй части курса. Приведенная выше схема электронного генератора предназначена для получения синусоидальных колебаний высокой частоты.

Начало практического внедрения переменного тока относится ко второй половине XIX в., когда выдающийся русский электротехник Павел Николаевич Яблочков

(1847—1894) стал применять на практике изобретенные им электрические свечи.

2-3. СРЕДНЕЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Среднее значение периодической функции $f(t)$ за период T определяется по формуле

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (2-4)$$

Отсюда видно, что среднее значение за период равно высоте прямоугольника с основанием T , площадь которого равна площади, ограниченной функцией $f(t)$ и осью абсцисс за один период.

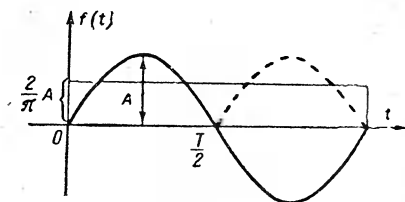


Рис. 2-4. Среднее полупериодное значение синусоидальной функции.

В случае синусоидальной функции среднее значение за период равно нулю, так как площадь положительной полуволны компенсируется площадью отрицательной полуволны синусоиды. Поэтому здесь пользуются понятием среднего значения функции, взятой по абсолютной величине, или, что то же, среднего полупериодного значения, соответствующего положительной полуволне синусоиды (рис. 2-4).

В соответствии с этим среднее значение синусоидального тока с амплитудой $A = I_m$ будет:

$$I_{\text{cp}} = \frac{2I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (2-5)$$

Аналогично среднее значение синусоидального напряжения

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m. \quad (2-6)$$

Измерительные приборы магнитоэлектрической системы реагируют на средние значения за период. Для измерения среднего полупериодного значения, соответствующего положительной полуволне, синусоидальный ток предварительно пропускается через выпрямительное устройство.

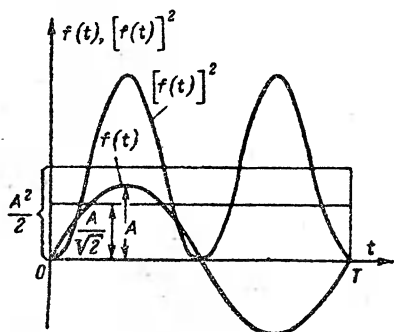


Рис. 2-5. Действующее значение синусоидальной функции.

Тепловое действие тока, а также механическая сила взаимодействия двух проводников, по которым проходит один и тот же ток, пропорциональны квадрату тока. Поэтому о величине тока судят

обычно по так называемому действующему¹ (среднеквадратичному) значению за период.

Действующее значение периодической функции $f(t)$ вычисляется по формуле

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}. \quad (2-7)$$

Из этой формулы следует, что величина F^2 представляет собой среднее значение функции $[f(t)]^2$ за период T , т. е. равна высоте прямоугольника с основанием T , площадь которого равна площади, ограниченной функцией $[f(t)]^2$ и осью абсцисс за один период (рис. 2-5).

В соответствии с (2-7) действующее значение периодического тока

¹ Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «эффективное» значение.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2-8)$$

Возведя (2-8) в квадрат и умножив обе части полученного выражения на rT , найдем:

$$r I^2 T = \int_0^T r i^2 dt.$$

Это равенство показывает, что действующее значение периодического тока равно по величине такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление r , за период времени T выделяет то же количество тепла, что и данный ток i .

Аналогично действующее значение периодического напряжения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \quad (2-9)$$

При синусоидальном токе

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{I_m^2}{2} T.$$

Следовательно, согласно (2-8)

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (2-8a)$$

Аналогично действующее значение синусоидального напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m. \quad (2-9a)$$

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, действующими значениями; поэтому действующие значения представляют наиболее распространенный электрический параметр.

Для измерения действующих значений применяются системы приборов тепловая, электромагнитная, электродинамическая и др.

2-4. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В СОПРОТИВЛЕНИИ

Если синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ подвести к сопротивлению r (рис. 2-6, а), то через сопротивление пройдет синусоидальный ток

$$i = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Следовательно, напряжение на зажимах сопротивления и ток, проходящий через это сопротивление, имеют

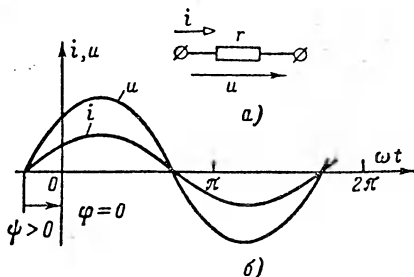


Рис. 2-6. Синусоидальный ток в сопротивлении.

одинаковую начальную фазу, или, как говорят, совпадают по фазе: они одновременно достигают своих амплитудных значений U_m и I_m и соответственно одновременно проходят через нуль (рис. 2-6, б).

Разность начальных фаз двух синусоид, имеющих одинаковую частоту, называется фазовым сдвигом. В данном случае фазовый сдвиг, между напряжением u и током i равен нулю:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

При прохождении синусоидального тока через сопротивление r не только мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока в нем, но и амплитуды и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны законом Ома:

$$U_m = r I_m; U = r I.$$

Пользуясь величиной проводимости $g = 1/r$, получаем:

$$I_m = g U_m; I = g U.$$

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление:

$$p_r = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi) = UI [1 - \cos 2(\omega t + \psi)], \quad (2-10)$$

изменяется с угловой частотой, удвоенной по сравнению с частотой напряжения и тока, и колеблется в пределах от 0 до $2UI$ (рис. 2-7).

Как видно из (2-10), кривая p_r состоит из двух слагающих: постоянной слагающей UI и косинусоидальной функции, имеющей амплитуду UI и угловую частоту 2ω .

Ввиду того что в рассматриваемом случае напряжение и ток совпадают по фазе, т. е. всегда имеют одинаковый знак (плюс или минус), их произведение всегда положительно.

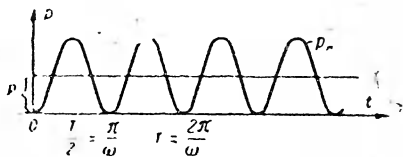


Рис. 2-7. Мгновенные значения мощности, поступающей в сопротивление ($\psi=0$).

Среднее значение мощности за период $P = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt$

называется активной мощностью¹ и измеряется в ваттах.

В рассматриваемом случае, как это видно из выражения (2-10) и рис. 2-7, активная мощность $P = UI = rI^2$. Это следует также из определений, данных в предыдущем параграфе.

Сопротивление r в свою очередь может быть определено как отношение активной мощности к квадрату действующего значения тока: $r = P/I^2$.

В § 1-7 отмечалось, что сопротивление проводника при переменном токе больше, чем при постоянном токе, вследствие явлений поверхностного эффекта, возникновения вихревых токов и излучения электромагнитной энергии в пространство (при высоких частотах). В отличие от сопротивления при постоянном токе сопротивление проводника при переменном токе называется активным сопротивлением.

¹ В радиотехнической литературе больше распространен термин «средняя» мощность.

2.5. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В ИНДУКТИВНОСТИ

Пусть через индуктивность L (рис. 2-8, а) проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Электродвижущая сила самоиндукции определяется по формуле (1-3):

$$\begin{aligned} e_L &= -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \psi) = \\ &= -U_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Значит, напряжение на индуктивности

$$u_L = -e_L = U_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Полученное выражение показывает, что *напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\pi/2$* : максимум

напряжения смещен влево относительно максимума тока на $\pi/2$ (рис. 2-8, б), когда ток проходит через нуль, напряжение достигает положительного или отрицательного максимума, так как оно пропорционально скорости изменения тока (di/dt), которая в момент прохождения тока через нуль максимальна (синусоида тока в этот момент имеет наибольшую крутизну).

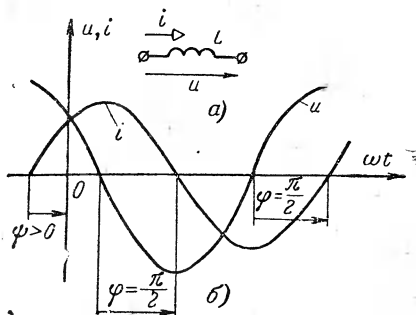


Рис. 2-8. Синусоидальный ток в индуктивности.

Когда ток достигает максимума, скорость его изменения, а следовательно, и напряжение на индуктивности обращаются в нуль.

Под фазовым сдвигом φ тока относительно напряжения понимается разность начальных фаз напряжения и тока (см. § 2-4). Следовательно, в данном случае

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Амплитуда, так же как и действующие значения напряжения и тока, связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \omega L I_m = x_L I_m; U = x_L I.$$

Величина $x_L = \omega L$, имеющая размерность сопротивления, называется индуктивным сопротивлением,

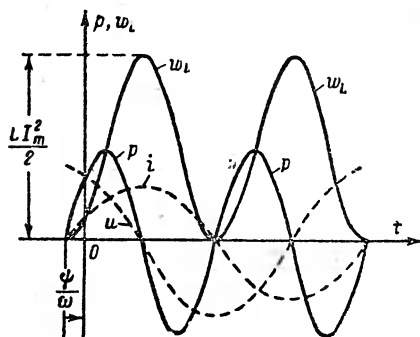


Рис. 2-9. Мгновенные значения мощности, поступающей в индуктивность, и энергии магнитного поля.

нием; обратная ей величина $b_L = 1/\omega L$ называется индуктивной проводимостью.

Итак,

$$I_m = b_L U_m; I = b_L U.$$

Индуктивное сопротивление представляет собой расчетную величину, с помощью которой учитывается явление самоиндукции.

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, будет:

$$\begin{aligned} p_L = ui &= U_m I_m \sin \left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2} \right) \sin (\omega t + \psi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} 2 \cos (\omega t + \psi) \sin (\omega t + \psi) = UI \sin 2 (\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Она колеблется по синусоидальному закону с угловой частотой 2ω , имея амплитуду UI . Мгновенная мощность в данном случае равна скорости изменения энергии магнитного поля индуктивности (см. § 1-3).

Энергия магнитного поля индуктивности

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{LI^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi)]$$

изменяется периодически с угловой частотой 2ω в пределах от 0 до $\frac{LI_m^2}{2}$ (рис. 2-9).

Поступая от источника, энергия временно запасается в магнитном поле индуктивности, затем возвращается в источник при исчезновении магнитного поля. Энергия магнитного поля достигает максимума в момент перехода тока в индуктивности через амплитудное значение, затем она убывает и обращается в нуль при токе, равном нулю.

Таким образом, *происходит колебание энергии между источником и индуктивностью, причем активная мощность, поступающая в индуктивность, равна нулю.*

Так как максимальное значение энергии, запасаемой в магнитном поле, равно $W_{L\text{ макс}} = LI^2$, то индуктивное сопротивление $x_L = \omega L$ может быть определено как

$$x_L = \frac{\omega W_{L\text{ макс}}}{I^2}.$$

2-6. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В ЕМКОСТИ

Пусть напряжение на емкости C (рис. 2-10, а) синусоидально:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

На основании (1-8)

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi) = I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2-11)$$

Изменение электрического заряда происходит по синусоидальному закону в соответствии с приложенным напряжением u . При этом попеременное накапливание положительных и отрицательных электрических зарядов на пластинах емкости обуславливает прохождение в цепи синусоидального тока i . Его величина определяется скоростью изменения заряда на емкости (dq/dt).

Выражение (2-11) показывает, что ток i опережает приложенное напряжение u на угол $\pi/2$ (рис. 2-10, б). Нулевым значениям тока соответствуют максимальные

(положительные или отрицательные) значения напряжения u . Физически это объясняется тем, что когда электрический заряд q и соответственно напряжение $u = q/C$ достигают максимального значения (положительного или отрицательного), ток i равен нулю.

Под фазовым сдвигом тока относительно напряжения здесь, как и раньше, подразумевается разность начальных фаз напряжения и тока, т. е. $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2$.

Таким образом, в отличие от цепи с индуктивностью, где $\varphi = +\pi/2$, фазовый сдвиг тока относительно напряжения в случае емкости отрицателен ($\varphi = -\pi/2$).

Амплитуды и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны соотношением, подобным закону Ома¹:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = x_C I_m; U = x_C I.$$

Величина $x_C = 1/\omega C$, имеющая размерность сопротивления, называется емкостным сопротивлением. Обратная ей величина $b_C = \omega C$ называется емкостной проводимостью. Следовательно,

$$I_m = b_C U_m; I = b_C U.$$

Мгновенная мощность, поступающая в емкость,

$$\begin{aligned} p_C = ui &= U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= UI \sin 2(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

колеблется синусоидально с угловой частотой 2ω , имея амплитуду, равную UI ; выражение p_C в рассматриваемом случае аналогично выражению для p_L в § 2-5.

¹ Следует заметить, что только в случае сопротивления r закон Ома применим к мгновенным значениям напряжения и тока; в остальных случаях отношение мгновенных величин u и i , имеющее размерность сопротивления, представляет собой некоторую функцию времени, не имеющую физического смысла и практического применения.

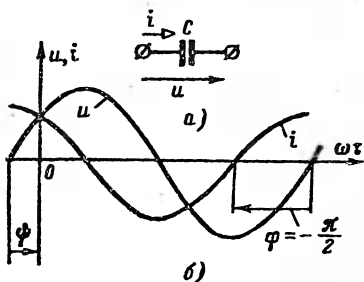


Рис. 2-10. Синусоидальный ток в емкости.

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна скорости изменения энергии электрического поля емкости.

Энергия электрического поля емкости

$$w_c = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{CU^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi)]$$

изменяется периодически с угловой частотой 2ω в пределах от 0 до $\frac{CU_m^2}{2}$ (рис. 2-11).

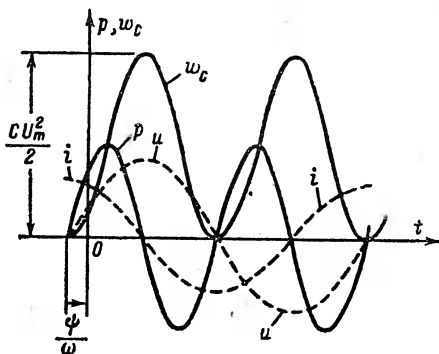


Рис. 2-11. Мгновенные значения мощности, поступающей в емкость, и энергии электрического поля.

Поступая от источника, энергия временно запасается в электрическом поле емкости, а затем возвращается в источник при исчезновении электрического поля. Энергия электрического поля достигает максимума при амплитудном значении напряжения на емкости. Затем она убывает и обращается в нуль при напряжении, равном нулю.

Таким образом, так же как в случае индуктивности, происходит колебание энергии между источником и емкостью, причем активная мощность $P = 0$.

Так как максимальное значение энергии, запасаемой в электрическом поле, равно $W_{c \text{ макс}} = CU^2$, то емкостное сопротивление $x_c = U/I = 1/\omega C$ может быть определено как

$$x_c = \frac{\omega W_{c \text{ макс}}}{I^2}.$$

2.7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ

При прохождении синусоидального тока $i = I_m \sin \omega t$ через электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов r , L и C (рис. 2-12), на зажимах этой цепи создается синусоидальное напряжение, равное алгебраической сумме синусоидальных напряжений на отдельных элементах (второй закон Кирхгофа):

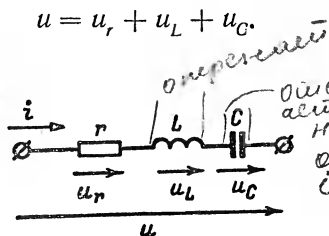


Рис 2-12. Последовательное соединение сопротивления, индуктивности и емкости.

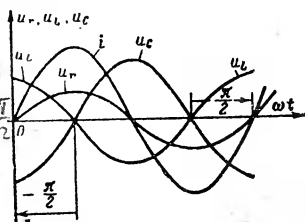


Рис. 2-13. Напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости (соединенных последовательно) при синусоидальном токе.

Напряжение u_r на сопротивлении r совпадает по фазе с током i , напряжение u_L на индуктивности L опережает, а напряжение u_C на емкости C отстает по фазе от i на $\pi/2$ (рис. 2-13). Следовательно, напряжение u на зажимах всей цепи равно:

$$\begin{aligned} U_m \sin(\omega t + \varphi) &= rI_m \sin \omega t + \omega L I_m \cos \omega t - \\ - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t &= rI_m \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos \omega t = \\ &= I_m [r \sin \omega t + x \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (2-12)$$

Уравнение (2-12) представляет собой тригонометрическую форму записи второго закона Кирхгофа для мгновенных значений напряжений. Входящая в него величина $x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ называется реактивным сопротивлением цепи, которое в зависимости от знака может иметь индуктивный ($x > 0$) или емкостный ($x < 0$) характер.

В отличие от реактивного сопротивления x величина активного сопротивления r всегда положительна.

Для нахождения U_m и φ воспользуемся тригонометрическими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} m \sin \alpha \pm n \cos \alpha &= \sqrt{m^2 + n^2} \sin(\alpha \pm \varphi); \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{n}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

Итак,

$$U_m = \sqrt{r^2 + x^2} I_m; \quad (2-14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r}. \quad (2-15)$$

Выражение (2-14) показывает, что амплитуды и действующие значения напряжения на зажимах цепи и тока, проходящего через данную цепь, связаны соотношением, аналогичным закону Ома:

$$U_m = z I_m; \quad U = z I,$$

где

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} \quad (2-16)$$

называется полным сопротивлением¹ рассматриваемой цепи.

Активное, реактивное и полное сопротивления относятся к числу основных понятий, применяемых в теории электрических цепей.

Выражения (2-12) и (2-15) показывают, что ток i отстает от напряжения u на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$.

Если задано напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на зажимах цепи с последовательно соединенными r , L и C , то ток определяется по формуле

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Угол φ , равный разности начальных фаз напряжения и тока, отсчитывается по оси ωt в направлении от напряжения к току и бывает острым или прямым

$$|\varphi| \leq \pi/2.$$

Угол φ положителен при индуктивном характере цепи, т. е. при $x > 0$; при этом ток отстает по фазе от напря-

¹ Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «кажущееся» сопротивление.

жения и φ отсчитывается по оси абсцисс вправо от напряжения к току (рис. 2-14).

Угол φ отрицателен при емкостном характере цепи, т. е. при $x < 0$; при этом ток опережает по фазе напряжение и φ отсчитывается по оси абсцисс влево от напряжения к току (рис. 2-15).

Итак, следует всегда помнить, что угол φ положителен при отстающем и отрицателен при опережающем токе.

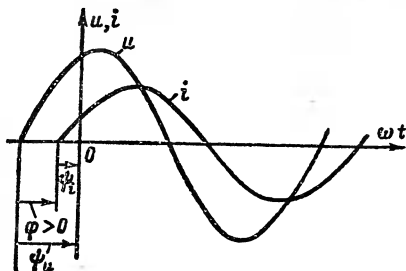


Рис. 2-14. Ток отстает от напряжения.

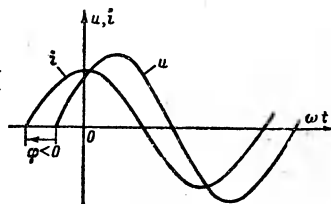


Рис. 2-15. Ток опережает напряжение.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $x = x_L$ — $x_C = 0$, т. е. при равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом напряжений (см. гл. 5).

Из выражений (2-15) и (2-16) следует, что активное и реактивное сопротивления цепи связаны с полным сопротивлением формулами:

$$r = z \cos \varphi; \quad x = z \sin \varphi. \quad (2-17)$$

Умножив правые и левые части выражений (2-17) на действующее значение тока I , получим действующие значения напряжений на активном и реактивном сопротивлениях, называемые активной и реактивной составляющими напряжения:

$$\left. \begin{aligned} U_a &= rI = z \cos \varphi I = U \cos \varphi; \\ U_p &= xI = z \sin \varphi I = U \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

Мгновенные значения напряжений на активном и реактивном сопротивлениях, суммирующиеся алгебраически в соответствии с (2-12), имеют фазовый сдвиг $\pi/2$. Поэтому непосредственное сложение действующих значений этих функций не дает действующего значения на-

пряжения во всей цепи: согласно (2-18) активная и реактивная составляющие напряжения связаны с действующим значением суммарного напряжения формулой¹

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Для характеристики индуктивных катушек, представляемых цепью с последовательным соединением элементов r и L , пользуются понятием добротности катушки $Q_L = x_L/r = \omega L/r$, которое равнозначно тангенсу угла сдвига фаз φ для катушки. Чем меньше сопротивление r , тем выше при прочих равных условиях добротность катушки.

Добротность индуктивных катушек, применяемых в радиотехнике, автоматике и приборостроении, обычно не превышает $Q_L = 200 \div 300$. Для достижения более высокой добротности применяются так называемые пьезоэлектрические резонаторы (см. § 10-6). С понятием добротности мы встретимся в гл. 5.

2-8. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Если к зажимам электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов r , L и C (рис. 2-16), приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, то синусоидальный ток, проходящий через эту цепь, равен алгебраической сумме синусоидальных токов в параллельных ветвях (первый закон Кирхгофа):

$$i = i_r + i_L + i_C.$$

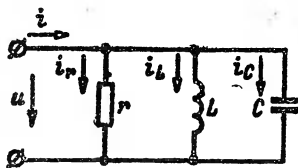


Рис. 2-16. Параллельное соединение сопротивления, индуктивности и емкости.

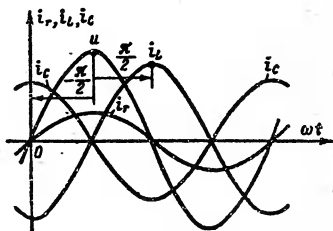


Рис. 2-17. Токи в сопротивлении, индуктивности и емкости (соединенных параллельно) при синусоидальном напряжении.

¹ U_a и U_p могут рассматриваться как катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна U ; подобный прямоугольный треугольник образуют также величины r , x и z (см. гл. 3).

Ток i_r в сопротивлении r совпадает по фазе с напряжением u , ток i_L в индуктивности L отстает, а ток i_C в емкости C опережает напряжение на $\pi/2$ (рис. 2-17).

Следовательно, суммарный ток i в цепи равен:

$$\begin{aligned} I_m \sin(\omega t - \varphi) &= \frac{1}{r} U_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \\ &+ \omega C U_m \cos \omega t = U_m \left[\frac{1}{r} \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] = \\ &= U_m (g \sin \omega t - b \cos \omega t). \end{aligned} \quad (2-19)$$

Уравнение (2-19) представляет собой тригонометрическую форму записи первого закона Кирхгофа для мгновенных значений токов. Входящая в него величина $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ называется реактивной проводимостью цепи, которая в зависимости от знака может иметь индуктивный ($b > 0$) или емкостный ($b < 0$) характер. В отличие от реактивной проводимости b величина $g = 1/r$, которая в данном случае называется активной проводимостью, всегда положительна.

Для нахождения I_m и φ воспользуемся соотношениями (2-13):

$$I_m = \sqrt{g^2 + b^2} U_m = y U_m; \quad (2-20)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}. \quad (2-21)$$

Из (2-20) следует, что

$$I_m = y U_m \text{ или } I = y U,$$

где

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (2-22)$$

— полная проводимость¹ рассматриваемой цепи.

Активная, реактивная и полная проводимости относятся к числу основных понятий, применяемых в теории электрических цепей.

Согласно (2-21) ток i отстает от напряжения u на угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{g} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}.$$

¹ Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «кажущаяся» проводимость.

Если задано напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на зажимах цепи с параллельно соединенными r , L и C , то ток определяется по формуле

$$i = yU_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Угол φ , как и в предыдущем случае, отсчитывается по оси углов ωt в направлении от напряжения к току и является острым или прямым

$$|\varphi| \leq \pi/2.$$

Угол φ положителен при индуктивном характере цепи, т. е. при $b > 0$; при этом ток отстает по фазе от напряжения.

Угол φ отрицателен при емкостном характере цепи, т. е. при $b < 0$; при этом ток опережает по фазе напряжение.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $b = b_L - b_C = 0$, т. е. при равенстве индуктивной и емкостной проводимостей. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом токов (см. гл. 5).

Из (2-21) и (2-22) следует, что активная и реактивная проводимости цепи связаны с полной проводимостью формулами:

$$g = y \cos \varphi; \quad b = y \sin \varphi. \quad (2-23)$$

Умножив правые и левые части выражений (2-23) на действующее значение напряжения U , получим действующие значения токов в ветвях с активной и реактивной проводимостями, называемые активной и реактивной составляющими тока:

$$\left. \begin{aligned} I_a &= gU = y \cos \varphi U = I \cos \varphi; \\ I_p &= bU = y \sin \varphi U = I \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

Активная и реактивная составляющие тока связаны с действующим значением суммарного тока формулой¹

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Для характеристики конденсаторов, представляемых цепью с параллельным соединением элементов r и C , применяется понятие добротности конденсатора $Q_C = b_C/g =$

¹ I_a и I_p могут рассматриваться как катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна I ; подобный прямоугольный треугольник образуют также величины g , b и y (см. гл. 3).

$=\omega Cr$, которое равнозначно тангенсу угла $|\varphi|$ конденсатора. Обратная величина называется тангенсом угла диэлектрических потерь конденсатора: $\operatorname{tg} \delta = 1/Q_c$ (угол диэлектрических потерь δ дополняет угол $|\varphi|$ до 90°).

Чем больше сопротивление r , тем больше (при прочих равных условиях) добротность конденсатора и тем меньше угол потерь.

Добротность конденсаторов, применяемых в радиотехнике, автоматике и приборостроении, определяется сотнями и тысячами (величина $\operatorname{tg} \delta$ для разных частот и диэлектриков колеблется в пределах от 10^{-1} до 10^{-4}).

2-9. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В § 2-4—2-6 рассматривались энергетические соотношения в отдельных элементах r , L и C при синусоидальном токе.

Разберем теперь более общий случай участка электрической цепи, напряжение на котором равно $u = U_m \sin \omega t$, а ток

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi).$$

Мгновенная мощность, поступающая в цепь,

$$p = U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \quad (2-25)$$

состоит из двух слагающих: постоянной величины $UI \cos \varphi$ и синусоидальной, имеющей удвоенную частоту по сравнению с частотой напряжения и тока.

Среднее значение второй слагающей за время T , в течение которого она совершает два цикла изменений, равно нулю. Поэтому активная мощность, поступающая в рассматриваемый участок цепи,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = UI \cos \varphi. \quad (2-26)$$

Множитель $\cos \varphi$ носит название коэффициента мощности. Как видно из (2-26), активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока, умноженному на коэффициент мощности.

Чем ближе угол φ к нулю, тем ближе $\cos \varphi$ к единице и, следовательно, тем большая при заданных значениях

U и I активная мощность передается источником приемнику.

Повышение коэффициента мощности промышленных электроустановок представляет важную технико-экономическую задачу.

Выражение активной мощности может быть преобразовано с учетом (2-17) и (2-23):

$$P = zI^2 \cos \varphi = rI^2;$$

$$P = yU^2 \cos \varphi = gU^2.$$

Активная мощность может быть также выражена через активную составляющую напряжения ($U_a = U \cos \varphi$) или тока ($I_a = I \cos \varphi$):

$$P = U_a I; P = UI_a.$$

Приведенные общие выражения мгновенной и активной мощности применимы и к частным случаям, разоб-

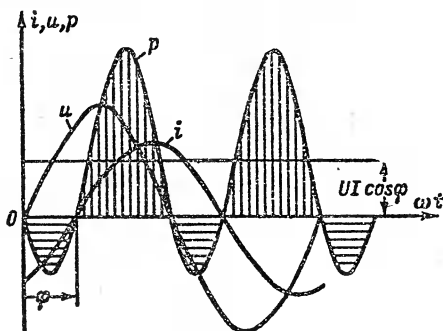


Рис. 2-18. Мощность, поступающая в активно-индуктивную цепь.

ранным выше, когда $\varphi=0$ (см. § 2-4), $\varphi=\pi/2$ (§ 2-5) и $\varphi=-\pi/2$ (§ 2-6); мы не будем здесь повторять полученных ранее результатов.

Рассмотрим более общий случай активно-реактивной цепи, например цепи, содержащей сопротивление и индуктивность; при этом

$$0 < \varphi < \pi/2 \text{ и } 0 < \cos \varphi < 1.$$

Согласно (2-25) мгновенная мощность колеблется с удвоенной угловой частотой 2ω относительно линии, отстоящей от оси времени на $P = UI \cos \varphi$ (рис. 2-18).

В промежутки времени, когда u и i имеют одинаковые знаки, мгновенная мощность положительна; энергия поступает от источника в приемник, поглощается в сопротивлении и запасается в магнитном поле индуктивности.

В промежутки времени, когда u и i имеют разные знаки, мгновенная мощность отрицательна и энергия частично возвращается приемником источнику. Как видно из рис. 2-18, в течение большей части периода мгновенная мощность положительна и соответственно положительная (расположенная над осью времени) площадь кривой p преобладает над отрицательной площадью кривой p . В результате средняя мощность за период, т. е. активная мощность, $P > 0$.

Аналогичная картина получается и в случае активностной цепи ($0 < \varphi < \pi/2$).

В электрических системах, в которых источниками электрической энергии являются генераторы переменного тока, мощность получается от первичных двигателей, приводящих генераторы во вращение. В радиотехнике и электронике, где синусоидальные колебания создаются с помощью электронных или полупроводниковых приборов, мощность получается от источников постоянного тока, питающих электронные генераторы или другого рода устройства.

Величина, равная произведению действующих значений тока и напряжения на зажимах цепи:

$$S = UI, \quad (2-27)$$

называется **полной мощностью** цепи и измеряется в вольт-амперах (va). Следует заметить, что амплитуда синусоидальной составляющей мгновенной мощности (2-25) численно равна полной мощности.

На основании (2-26) и (2-27) коэффициент мощности равен отношению активной мощности к полной:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

При расчетах электрических цепей и на практике в эксплуатации пользуются также понятием **реактивная мощность**¹, которая вычисляется по формуле

$$Q = UI \sin \varphi$$

¹ Терминами «активная», «реактивная» и «полная» мощности заменены применявшиеся ранее в литературе и ныне не рекомендуемые термины «ваттная», «безваттная» и «кажущаяся» мощности.

и является мерой потребления (или выработки) реактивного тока.

Эта мощность измеряется в реактивных вольт-амперах (*вар*).

Очевидно,

$$S^2 = P^2 + Q^2; \sin \varphi = \frac{Q}{S}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}.$$

Выражение реактивной мощности может быть преобразовано с учетом (2-17) и (2-23):

$$Q = zI^2 \sin \varphi = xI^2; Q = yU^2 \sin \varphi = bU^2.$$

Реактивная мощность может быть также выражена через реактивную составляющую тока ($I_p = I \sin \varphi$) или напряжения ($U_p = U \sin \varphi$):

$$Q = UI_p; Q = U_p I.$$

В соответствии с принятым ранее правилом знаков для угла φ реактивная мощность положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка).

Понятия активная (средняя), реактивная и полная мощности являются удобными определениями мощностей, которые прочно укоренились на практике.

Реактивные мощности, подводимые к индуктивности и емкости, могут быть представлены в следующем виде:

$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = UI = \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L \text{ макс}};$$

$$Q_C = UI \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -UI =$$

$$= -\omega CU^2 = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = -\omega W_{C \text{ макс}},$$

где $W_{L \text{ макс}}$ и $W_{C \text{ макс}}$ — максимальные значения энергии, периодически запасаемой индуктивностью и емкостью.

Реактивная мощность на зажимах цепи, содержащей индуктивность и емкость, пропорциональна разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитном и электрическом полях:

$$Q = \omega (W_{L \text{ макс}} - W_{C \text{ макс}}). \quad (2-28)$$

Предлагается читателям проверить и самостоятельно убедиться в том, что эта формула справедлива при лю-

бом соединении индуктивности и емкости: последовательном, параллельном или в какой-либо комбинации с сопротивлениями.

2-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

2-1. Вычесть напряжение $5 \sin \omega t$ из напряжения $10 \sin (\omega t + \pi/2)$.
Ответ: $11,2 \sin (\omega t + 116^\circ 30')$.

2-2. Ток изменяется по закону $i = 20 \sin \omega t$ а; частота равна $f = 50$ гц. Определить наибольшую скорость изменения тока и соответствующее этому моменту значение тока.

Ответ: 6280 а/сек; 0 .

2-3. На зажимах цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления $r = 50$ ом и индуктивности $L = 0,1$ гн задано напряжение $u = \sqrt{2} \cdot 100 \sin \omega t$ в. Частота $f = 50$ гц. Вычислить полное сопротивление цепи и действующие значения напряжения на r и L ; вывести выражения для синусоидального тока $i(t)$; построить кривые $i(t)$, $u(t)$ и напряжений на r и L .

Ответ: 59 ом, 85 в; $53,4$ в; $i = \sqrt{2} \cdot 1,7 \sin (\omega t - 32^\circ 10')$ а.

2-4. В цепи, состоящей из последовательно соединенных r и L , ток равен 1 а при частоте 400 гц и $0,8$ а при 800 гц. В обоих случаях напряжение на зажимах цепи 20 в. Определить r и L .

Ответ: 18 ом; $3,45$ мГн.

2-5. В цепи, состоящей из последовательно соединенных r и C , ток равен $0,1$ а при частоте 800 гц и $0,08$ а при 400 гц. В обоих случаях напряжение на зажимах цепи 20 в. Определить r и C .

Ответ: 180 ом; $2,3$ мкФ.

2-6. В цепи, состоящей из параллельно соединенных r и C , ток равен $0,08$ а при частоте 400 гц и $0,1$ а при 800 гц. В обоих случаях напряжение на зажимах цепи 20 в. Определить r и C .

Ответ: 277 ом; $0,688$ мкФ.

2-7. В цепи, изображенной на рис. 2-12, при частоте 1000 гц и сопротивлении $r = 25$ ом действующие значения напряжений $U_r = 25$, $U_L = 100$, $U_C = 120$ в. Определить L и C .

Ответ: $15,9$ мГн, $1,33$ мкФ.

2-8. На зажимах цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивления $r = 30$ ом и емкости $C = 6$ мкФ, задано напряжение $u = \sqrt{2} \cdot 120 \sin \omega t$ в. Частота $f = 400$ гц. Вычислить полное сопротивление цепи и действующие значения напряжений на r и C ; вывести выражение для синусоидального тока $i(t)$; построить кривые $u(t)$, $i(t)$ и напряжений на r и C .

Ответ: $72,8$ ом; $49,5$ в; $109,5$ в;

$$i = \sqrt{2} \cdot 1,65 \sin (\omega t + 65^\circ 40') \text{ а.}$$

2-9. Напряжение на зажимах сопротивления $r = 3,63$ ом и индуктивности $L = 0,02$ гн, соединенных параллельно, равно $u = \sqrt{2} \cdot 120 \sin (314 t + \pi/6)$ в. Вычислить полную проводимость це-

пи и действующие значения токов в r и L ; вывести выражение для суммарного синусоидального тока в цепи; построить кривые $u(t)$, $i(t)$ и токов в r и L .

Ответ: 0,318 *сим*; 33,1 *а*; 19,1 *а*;

$$i = \sqrt{2} \cdot 38,2 \sin 314 t \text{ а.}$$

2-10. Напряжение на зажимах сопротивления $r = 1000 \text{ ом}$ и емкости $C = 1 \text{ мкф}$, соединенных параллельно, равно $u = \sqrt{2} \cdot 120 \sin 2512 t \text{ в}$. Вычислить полную проводимость и действующие значения токов в r и C ; вывести выражение для суммарного синусоидального тока $i(t)$; построить кривые $u(t)$, $i(t)$ и токов в r и C .

Ответ: 0,00269 *сим*; 0,12 *а*; 0,301 *а*; $i = \sqrt{2} \cdot 0,323 \sin (2512 t + 68^\circ 20') \text{ а}$.

2-11. Вычислить действующее значение напряжения на зажимах цепи, имеющей активную проводимость 0,07 *сим* и реактивную проводимость 0,044 *сим*, если действующее значение синусоидального тока, проходящего через цепь, равно 10 *а*.

Ответ: 121 *в*.

2-12. К цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления $r = 1 \text{ ом}$, индуктивности $L = 0,1 \text{ гн}$ и емкости $C = 101,4 \text{ мкф}$, приложено напряжение $33,8 \sin 314 t \text{ в}$. Найти ток; построить кривые тока и напряжений на сопротивлении, индуктивности и емкости.

Ответ: $33,8 \sin 314 t \text{ а}$.

2-13. Определить напряжение на зажимах цепи, состоящей из r , L и C , соединенных последовательно, если напряжение на C равно $U_m \sin \omega t$.

Ответ:

$$U_m \sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (r\omega C)^2} \sin (\omega t + \alpha);$$

$$\alpha = \arctg \frac{r\omega C}{1 - \omega^2 LC}.$$

2-14. Напряжение на r , L и C , соединенных параллельно, равно $U_m \sin \omega t$. Определить суммарный ток.

Ответ:

$$I_m = U_m \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \sin (\omega t - \varphi);$$

$$\varphi = \arctg r \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

2-15. Через цепь, состоящую из параллельно соединенных сопротивления $r = 8,33 \text{ ом}$ и индуктивности $L = 6,36 \text{ мгн}$, проходит ток $0,141 \cos \omega t \text{ а}$; частота равна 500 *гц*. Определить напряжение на параллельных ветвях.

Ответ: $1,1 \cos (\omega t + 22^\circ 36') \text{ в}$.

2-16. На зажимах цепи, состоящей из последовательно соединенных r и L , напряжение равно 120 *в*, ток 0,5 *а*, активная мощность 30 *вт*; частота 400 *гц*. Определить r и L .

Ответ: 120 *ом*; 83 *мгн*.

2-17. Цепь состоит из источника э. д. с. $100 \sin 400 t$ в, сопротивления $r=50$ ом и индуктивности $L=0,1$ гн, соединенных последовательно. Считая ток синусоидальным, найти для момента $t=\pi/200$ сек мгновенные значения тока, напряжений на элементах и мощностей, подводимых к ним; определить действующие значения тока и напряжений на элементах.

Ответ: $-0,975$ а; $-48,8$ в; $48,8$ в; $47,5$ вт; $-47,5$ вт; $1,1$ а; 55 в; 44 в.

2-18. Сохранив условия задачи 2-17, заменить индуктивность емкостью 100 мкф.

Ответ: $0,8$ а; 40 в; -40 в; 32 вт; -32 вт; $1,26$ а; 63 в; $31,5$ в.

2-19. Цепь состоит из источника э. д. с. $100 \sin 300 t$ в, сопротивления $r=40$ ом и индуктивности $L=0,1$ гн, соединенных последовательно. Считая ток синусоидальным, найти мгновенные значения тока и напряжений на элементах при $t=0,01$ сек; вычислить энергию, поступающую от источника с момента $t=0$ до $t=0,01$ сек.

Ответ: $-1,42$ а; $56,8$ в; $-42,4$ в; $0,833$ дж.

2-20. Цепь состоит из источника э. д. с. $100 \sin 400 t$ в, сопротивления r и индуктивности $L=0,025$ гн. Найти r , если при $t=\pi/800$ сек мгновенное значение напряжения на L равно $35,35$ в; получить выражение для синусоидального тока; вычислить для $t=\pi/800$ сек энергию, запасенную в магнитном поле, и мгновенную мощность, поступающую от источника.

Ответ: $13,55$ ом; $5,95 \sin (400 t - 36^\circ 30')$ а; $0,284$ дж; 478 вт.

2-21. Цепь состоит из источника э. д. с. $100 \cos 1000 t$ в, сопротивления r и емкости C , соединенных последовательно. Ток в цепи равен $10 \cos (1000 t + \pi/3)$ а. Найти r и C ; вычислить для $t=\pi/1000$ сек мгновенные значения напряжений на r и C и мощностей, поступающих в них.

Ответ: 5 ом; 115 мкф; -25 в; -75 в; 125 вт; 375 вт.

2-22. Цепь, состоящая из r , L и C , соединенных последовательно, питается от источника э. д. с. 110 в переменной частоты. Определить коэффициент мощности цепи при 60 гц, если известно, что при частоте 45 гц напряжение на емкости, так же как и на индуктивности, составляет $200,8$ в.

Указание. При 45 гц имеет место резонанс напряжений, т. е. $\omega L = 1/\omega C$.

Ответ: $0,69$.

2-23. Что такое положительное направление синусоидального тока?

2-24. Что понимается под полярностью источника синусоидального напряжения или источника синусоидального тока?

2-25. Что такое фазовый сдвиг тока относительно напряжения? Чем вызван фазовый сдвиг?

2-26. Какова разница между активной, реактивной и полной мощностями. В каких единицах они измеряются?

2-27. Почему в общем случае активная проводимость ветви не равна величине, обратной активному сопротивлению этой ветви? В каком частном случае выполняется такое равенство?

2-28. Для чего стремятся повысить коэффициент мощности электрической установки?

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3-1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ПРОЕКЦИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВЕКТОРОВ

Тригонометрическая форма расчета электрических цепей синусоидального тока, рассмотренная в предыдущей главе, практически применима только для простейших электрических цепей, не содержащих большого числа контуров и источников, взаимных индуктивностей и т. п.

С усложнением электрических цепей тригонометрическая форма расчета становится крайне затруднительной и требуется метод, позволяющий рассчитывать электрические цепи переменного тока алгебраически аналогично цепям постоянного тока. Таким удобным расчетным методом служит метод комплексных амплитуд (комплексный метод), основанный на замене рассмотрения синусоидальных функций рассмотрением вращающихся векторов. Все последующее изложение курса ТОЭ и других электротехнических и радиотехнических дисциплин базируется на этом методе¹.

Известно, что каждая точка на комплексной плоскости определяется радиусом-вектором этой точки, т. е. вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке, соответствующей заданному комплексному числу (рис. 3-1).

Пользуясь показательной или полярной формой записи комплексного числа, имеем²:

$$\dot{A} = A e^{i\alpha} = A \angle \alpha;$$

здесь A — модуль; α — аргумент или фаза; $j = \sqrt{-1}$ (в электротехнике не пользуются обозначением $i = \sqrt{-1}$, так как буква i обозначает ток).

¹ Комплексный метод расчета электрических цепей введен в инженерную практику А. Е. Кеннели и Ч. П. Штейнметцем в 1893—1894 гг.

² В зарубежной литературе по электротехнике и радиотехнике для комплексных величин часто применяется жирный шрифт в отличие от модулей, обозначаемых светлыми буквами.

Применив формулу Эйлера, можно получить тригонометрическую форму записи комплексного числа:

$$\dot{A} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha$$

или соответственно алгебраическую форму:

$$\dot{A} = A_1 + j A_2,$$

где

$$A_1 = A \cos \alpha; \quad A_2 = A \sin \alpha.$$

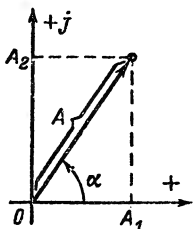


Рис. 3-1. Вектор, изображающий комплексное число.

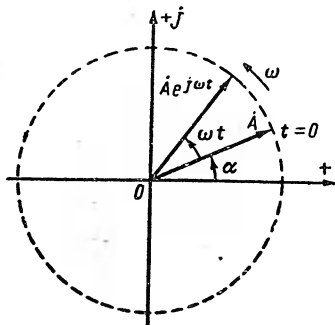


Рис. 3-2. Вращающийся вектор.

Очевидно,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2; \quad \alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}.$$

Вектор, вращающийся в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки, с угловой скоростью ω может быть выражен следующим образом:

$$A e^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A} e^{j\omega t}, \quad (3.4)$$

где $\dot{A} = A e^{j\alpha} = A \angle \alpha$ — комплексная амплитуда, представляющая данный вектор в момент $t = 0$ (рис. 3-2). Иначе говоря, это комплексная величина, не зависящая от времени, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе заданной синусоидальной функции.

Множитель $e^{j\omega t}$ является оператором вращения; умножение комплексной амплитуды $\dot{A}$ на $e^{j\omega t}$ означает поворот вектора $\dot{A}$ на угол ωt в положительном направлении.

Записывая комплексную функцию (3-1) в тригонометрической форме:

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha),$$

закключаем, что синусоидальная функция $A \sin(\omega t + \alpha)$ может рассматриваться как мнимая часть комплексной функции (3-1), взятая без множителя j , или, что то же, как проекция вращающегося вектора на мнимую ось.

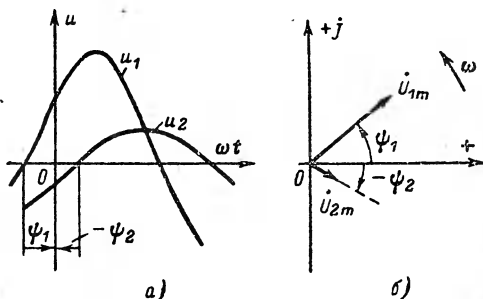


Рис. 3-3. Фазовый сдвиг.

а — между синусоидами; б — между векторами.

Условно это записывается так:

$$A \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}(\dot{A}e^{j\omega t}).$$

Символ Im обозначает, что берется мнимая часть комплексной функции.

Аналогично косинусоидальная функция может быть в случае необходимости представлена как действительная часть комплексной функции (3-1).

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\dot{A}e^{j\omega t}),$$

где символ Re обозначает, что берется действительная часть комплексной функции.

Если синусоидальные функции имеют одну и ту же частоту, то соответствующие этим функциям векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью и поэтому углы между ними сохраняются неизменными.

На рис. 3-3, а показаны две синусоидальные функции: $u_1 = U_{1m} \times \sin(\omega t + \psi_1)$ и $u_2 = U_{2m} \sin(\omega t - \psi_2)$, имеющие одинаковую угловую частоту ω . Функция u_1 опере-

жает по фазе функцию u_2 , причем фазовый сдвиг равен разности начальных фаз:

$$\varphi = \psi_1 - (-\psi_2) = \psi_1 + \psi_2.$$

Этот угол и образуют между собой векторы, показанные на рис. 3-3, б.

При равенстве начальных фаз, т. е. при фазовом сдвиге, равном нулю, векторы направлены в одну и ту же сторону (совпадают по фазе).

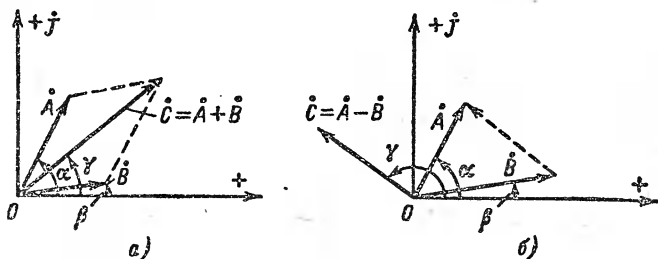


Рис. 3-4. Сложение (а) и вычитание (б) векторов.

При фазовом сдвиге 180° векторы направлены в диаметрально противоположные стороны (находятся в противофазе).

Диаграмма, изображающая совокупность векторов, построенных с соблюдением их взаимной ориентации по фазе, называется векторной диаграммой¹.

Векторное представление синусоидальных функций, частота которых одинакова, облегчает операции сложения и вычитания этих функций. Ввиду того что сумма проекций двух векторов равна проекции геометрической суммы этих векторов, амплитуда и начальная фаза результирующей кривой могут быть найдены из векторной диаграммы.

Например, если двум синусоидальным функциям соответствуют комплексные амплитуды $\dot{A}$ и $\dot{B}$, то сумме этих синусоидальных функций соответствует комплексная амплитуда $\dot{C} = \dot{A} + \dot{B}$ (рис. 3-4, а).

Из графического построения следует:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta)}; \quad (3-2)$$

¹ В отличие от векторных диаграмм кривые мгновенных значений называются временными диаграммами.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{A \cos \alpha + B \cos \beta}. \quad (3-3)$$

Здесь угол γ находится с учетом знаков числителя и знаменателя, определяющих знаки синуса и косинуса.

В случае, когда вектор $\vec{B}$ вычитается из вектора $\vec{A}$ (рис. 3-4, б), угол β в (3-2) и (3-3) заменяется $\beta + \pi$ или, что то же, $\beta - \pi$.

3-2. ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим применение метода комплексных амплитуд в случае последовательного и параллельного соединений элементов r , L и C .

Последовательное соединение r , L и C

Положим, что в уравнении Кирхгофа

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3-4)$$

заданными являются параметры r , L , C и синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на зажимах цепи, а искомой величиной является ток i . Ввиду того что здесь рассматривается установившийся режим цепи синусоидального тока, решение этого дифференциального уравнения должно дать синусоидальную функцию вида:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где I_m и $(\psi - \varphi)$ — пока неизвестные амплитуда и начальная фаза тока.

Пусть в соответствии с предыдущим параграфом заданное синусоидальное напряжение символизируется комплексной функцией $\dot{U}_m e^{j\omega t}$, а искомый синусоидальный ток — комплексной функцией $\dot{I}_m e^{j\omega t}$; комплексные амплитуды напряжения и тока равны соответственно:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}; \quad \dot{I}_m = I_m e^{j(\psi - \varphi)}.$$

Сложение, дифференцирование и интегрирование синусоидальных функций в уравнении (3-4) заменяются те-

ми же математическими операциями над мнимыми частями комплексных функций:

$$\operatorname{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = r \operatorname{Im}(I_m e^{j\omega t}) + L \frac{d}{dt} \operatorname{Im}(I_m e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} \int \operatorname{Im}(I_m e^{j\omega t}) dt. \quad (3-5)$$

Операции над мнимыми частями комплексных функций могут быть заменены операциями над самими комплексными функциями с последующим выделением мнимой части полученного результата. Объясняется это коммутативностью операций сложения, дифференцирования и интегрирования относительно символической операции Im . Итак, (3-5) преобразуется следующим образом:

$$\operatorname{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = \operatorname{Im}\left(r I_m e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} I_m e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \int I_m e^{j\omega t} dt\right).$$

Полученное уравнение удовлетворяется для любого момента времени. Поэтому заключенные в скобки комплексные выражения, от которых берется мнимая часть, должны быть равны друг другу. Производя дифференцирование и интегрирование, получаем:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = r I_m e^{j\omega t} + j\omega L I_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\omega t}. \quad (3-6)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что при интегрировании функции $e^{j\omega t}$ постоянная интегрирования опущена, так как в рассматриваемом установившемся режиме цепи синусоидального тока электрические заряды или напряжения на емкостях представляют собой синусоидальные функции, не содержащие постоянных слагающих.

В результате сокращения всех частей уравнения (3-6) на множитель $e^{j\omega t}$ получается *алгебраическое комплексное уравнение*

$$\dot{U}_m = r I_m + j\omega L I_m + \frac{1}{j\omega C} I_m. \quad (3-7)$$

Ток I_m может быть вынесен за скобки. При этом вводится условное обозначение для комплексного со-

противления рассматриваемой электрической цепи:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx. \quad (3-8)$$

Таким образом, получается уравнение

$$\dot{U}_m = Z \dot{I}_m, \quad (3-9)$$

выражающее закон Ома для комплексных амплитуд.

Разделив обе части уравнения (3-9) на $\sqrt{2}$, получим закон Ома для комплексных действующих значений¹:

$$\dot{U} = Z \dot{I}. \quad (3-10)$$

Следовательно, комплексное сопротивление электрической цепи равно отношению комплексного напряжения на зажимах данной цепи к комплексному току в этой цепи.

Комплексное сопротивление Z представлено в выражении (3-8) в алгебраической форме. Та же величина в тригонометрической и показательной (полярной) формах имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} Z &= z \cos \varphi + jz \sin \varphi; \\ Z &= ze^{j\varphi} = z \angle \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

Здесь $z = |Z|$ — модуль комплексного числа Z — представляет собой полное сопротивление цепи, а φ — аргумент комплексного числа Z :

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{x}{r}.$$

На основании (3-9) комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{U_m}{z} e^{j(\psi - \varphi)} = \frac{U_m}{z} \angle (\psi - \varphi),$$

где $\psi - \varphi$ — начальная фаза тока. Следовательно, искомый ток в тригонометрической форме

$$i = \operatorname{Im} (\dot{I}_m e^{j\omega t}) = \frac{U_m}{z} \sin (\omega t + \psi - \varphi),$$

что совпадает с результатом, полученным ранее (см. § 2-7).

¹ Комплексное действующее значение синусоидального тока (комплексный ток) — комплексная величина, не зависящая от времени, модуль и аргумент которой равны соответственно действующему значению и начальной фазе данного синусоидального тока (ТТЭ).

На рис. 3-5 дана геометрическая интерпретация на комплексной плоскости уравнения (3-10). Рисунок 3-5, *а* относится к случаю, когда реактивное сопротивление цепи имеет индуктивный характер ($x > 0$) и соответственно ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$). Рисунок 3-5, *б* относится к случаю, когда реактивное сопротивление цепи имеет емкостный характер ($x < 0$) и поэтому ток опережает по фазе напряжение ($\varphi < 0$).

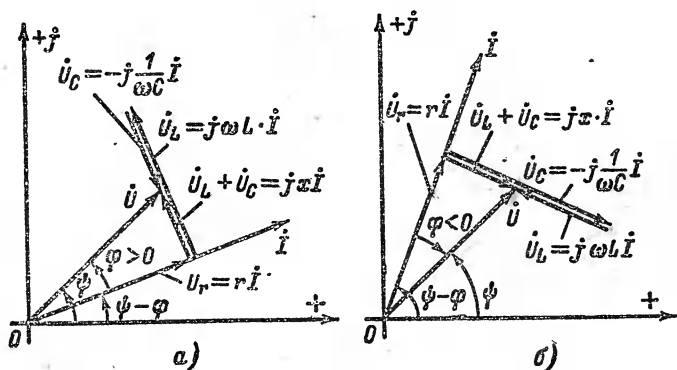


Рис. 3-5. Векторные диаграммы для последовательной цепи rLC при $x > 0$ (*а*) и $x < 0$ (*б*).

В случае чисто реактивной цепи ($r = 0$) ток отстает от напряжения по фазе на $\pi/2$, если сопротивление цепи индуктивно, и опережает напряжение на $\pi/2$ при емкостном сопротивлении цепи.

Как видно из векторных диаграмм, приведенных на рис. 3-5, $\dot{U}_r = r\dot{I}$ — напряжение на сопротивлении r (совпадает по фазе с током $\dot{I}$), $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$ — напряжение на индуктивности L (опережает ток $\dot{I}$ на угол $\pi/2$) и $\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$ — напряжение на емкости C (отстает от тока $\dot{I}$ на угол $\pi/2$).

Геометрическая сумма векторов $\dot{U}_r$, $\dot{U}_L$ и $\dot{U}_C$ дает вектор приложенного к цепи напряжения:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

Прямоугольный треугольник, катетами которого являются $\dot{U}_r$ и $\dot{U}_L + \dot{U}_C$, а гипотенуза которого равна $\dot{U}$, на-

зывается треугольником напряжений; $\dot{U}_r$ и $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ представляют собой соответственно активную и реактивную слагающие напряжения ($\dot{U}_a = \dot{U}_r$; $\dot{U}_p = \dot{U}_L + \dot{U}_C$).

Если все стороны-векторы этого треугольника разделить на вектор $\dot{I}$, то получится треугольник сопротивлений, подобный треугольнику напряжений и повернутый относительно последнего на угол $\psi - \varphi$ по ходу часовой стрелки.

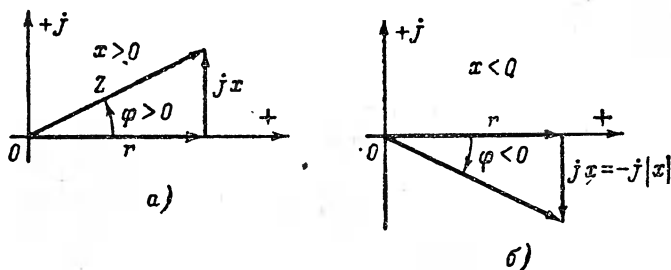


Рис. 3-6. Треугольник сопротивлений при $x > 0$ (а) и $x < 0$ (б).

Треугольник сопротивлений представляет собой геометрическую интерпретацию уравнения (3-11). Его положение не зависит от начальных фаз $\dot{U}$ и $\dot{I}$; сопротивление r откладывается на комплексной плоскости в положительном направлении действительной оси, а реактивное сопротивление x в зависимости от его знака откладывается в положительном ($x > 0$) или отрицательном ($x < 0$) направлении мнимой оси (рис. 3-6, а и б).

В треугольнике сопротивлений угол φ отсчитывается от катета r к гипотенузе Z по аналогии с тем, как отсчитывается угол φ в треугольнике напряжений от $\dot{U}_r = r\dot{I}$ к $\dot{U} = Z\dot{I}$.

Параллельное соединение r , L и C

Пользуясь рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно прийти к комплексной форме законов Ома и Кирхгофа для электрической цепи, состоящей из элементов r , L и C , соединенных параллельно.

Ограничиваясь записью для комплексных действующих значений, пропорциональных комплексным амплитудам, имеем в соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$\dot{I} = g\dot{U} + \frac{1}{j\omega L} \dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{I}_r + \dot{I}_L + \dot{I}_C; \quad (3-12)$$

здесь $\dot{I}_r = g\dot{U}$ — ток в сопротивлении r (совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}$); $\dot{I}_L = -j\frac{1}{\omega L}\dot{U}$ — ток в индуктивности (отстает от напряжения на $\pi/2$);

$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}$ — ток в емкости (опережает напряжение на $\pi/2$).

Выражение

$$Y = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb \quad (3-13)$$

представляет собой комплексную проводимость рассматриваемой цепи; g и b — активная и реактивная проводимости цепи.

Уравнение

$$\dot{I} = Y\dot{U} \quad (3-14)$$

выражает закон Ома в комплексной форме. Следовательно, комплексная проводимость электрической цепи равна отношению комплексного тока в данной цепи к комплексному напряжению на ее зажимах.

Тригонометрическая и показательная (полярная) формы комплексной проводимости имеют следующий вид:

$$Y = y \cos \varphi - jy \sin \varphi; \quad Y = ye^{-j\varphi} = y \angle -\varphi;$$

здесь $y = |Y|$ — модуль комплексного числа Y — представляет собой полную проводимость цепи, а $(-\varphi)$ — аргумент комплексного числа Y :

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{g}.$$

На основании (3-14) комплексный ток равен:

$$\dot{I} = yUe^{j(\psi - \varphi)} = yU \angle (\psi - \varphi),$$

что соответствует синусоидальному току

$$i = \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = yU_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

На рис. 3-7 дана геометрическая интерпретация на комплексной плоскости уравнения (3-12). Рисунок 3-7, а

относится к случаю, когда реактивная проводимость цепи имеет индуктивный характер ($b > 0$) и соответственно ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$). Рисунок 3-7, а относится к случаю, когда реактивная проводимость це-

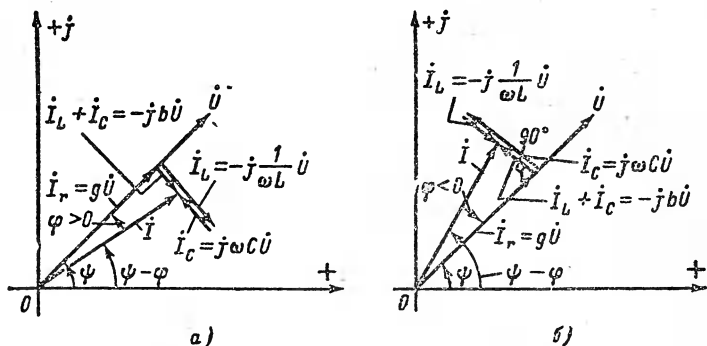


Рис. 3-7. Векторные диаграммы для параллельной цепи rLC при $b > 0$ (а) и $b < 0$ (б).

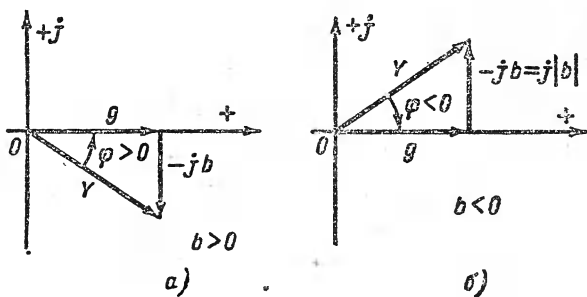


Рис. 3-8. Треугольник проводимостей при $b > 0$ (а) и $b < 0$ (б).

пи имеет емкостный характер ($b < 0$) и соответственно ток опережает по фазе напряжение ($\varphi < 0$).

Прямоугольный треугольник с катетами I_r и $(I_L + I_C)$ и гипотенузой I называется треугольником токов; I_r и $(I_L + I_C)$ представляют собой соответственно активную и реактивную слагающие тока I_a и I_p .

Если все стороны-векторы этого треугольника разделить на вектор $\dot{U}$, то получится треугольник про-

в о д и м о с т е й, подобный треугольнику токов и повернутый относительно последнего на угол ψ по ходу часовой стрелки. Треугольник проводимостей служит геометрической интерпретацией выражения (3-13): активная проводимость g откладывается на комплексной плоскости в положительном направлении действительной оси, а реактивная проводимость b в зависимости от ее знака откладывается в отрицательном ($b > 0$) или положительном ($b < 0$) направлении мнимой оси (рис. 3-8, а и б).

В треугольнике проводимостей угол φ отсчитывается от гипотенузы Y к катету g по аналогии с треугольником токов, где угол φ отсчитывается от $\dot{I} = Y\dot{U}$ к $\dot{I}_r = g\dot{U}$.

Таблица 3-1

Уравнения элементов цепи

Элемент	Общая форма	Синусоидальный режим	
		Тригонометрическая форма	Комплексная форма
Сопrotивление	$u = ri$	$u = rI_m \times$ $\times \sin(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = r\dot{I}$
	$i = gu$	$i = gU_m \times$ $\times \sin(\omega t + \psi)$	$\dot{I} = g\dot{U}$
Индуктивность	$u = L \frac{di}{dt}$	$u = \omega LI_m \times$ $\times \sin(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$
	$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$	$i = -\frac{1}{\omega L} U_m \times$ $\times \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{I} = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U}$
Емкость	$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$	$u = \frac{1}{\omega C} I_m \times$ $\times \sin(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}$
	$i = C \frac{du}{dt}$	$i = \omega CU_m \times$ $\times \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{I} = j\omega C \dot{U}$

В табл. 3-1 дана сводка уравнений основных элементов цепи в общей форме (дифференциальной, интегральной) и при синусоидальном режиме в тригонометрической и комплексной формах.

Следует обратить внимание на то, что комплексное сопротивление индуктивного элемента равно $j\omega L$, а ем-

костного элемента $\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$; комплексные проводимости составляют соответственно $\frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$ и $j\omega C$.

При последовательном соединении r , L и C складываются в комплексной форме сопротивления, а при параллельном соединении — проводимости.

Таблица 3-2

Выражения комплексных сопротивлений и проводимостей

Цепь	Z при последовательном соединении	Y при параллельном соединении
r, L	$r + j\omega L$	$\frac{1}{r} - j \frac{1}{\omega L}$
r, C	$r - j \frac{1}{\omega C}$	$\frac{1}{r} + j\omega C$
r, L, C	$r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$	$\frac{1}{r} - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)$

В табл. 3-2 приведены выражения комплексных сопротивлений и проводимостей цепи для различных сочетаний элементов r , L и C .

3.3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ И ПРОВОДИМОСТЯМИ УЧАСТКА ЦЕПИ

Пользуясь комплексной формой записи, при заданном комплексном сопротивлении $Z = r + jx$ некоторого участка цепи находим для того же участка цепи комплексную проводимость¹:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb. \quad (3-15)$$

В свою очередь если задана комплексная проводимость некоторого участка цепи $Y = g - jb$, то комплексное сопротивление того же участка цепи

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx. \quad (3-16)$$

¹ В зарубежной литературе под реактивной проводимостью обычно понимается величина $b = -\frac{x}{r^2 + x^2}$ и соответственно комплексная проводимость записывается в виде $Y = g + jb$.

Выражения (3-15) и (3-16) показывают, что реактивное сопротивление x и реактивная проводимость b одного и того же участка цепи имеют одинаковый знак.

Кроме того, каждая слагающая проводимости (g и b) зависит как от активного, так и от реактивного сопротивлений (т. е. от r и x). Соответственно каждая слагающая сопротивления (r и x) является функцией активной и реактивной проводимостей (g и b).

Соотношения $g = 1/r$ и $b = 1/x$ справедливы только в частном случае, когда элемент r , L или C рассматривается в отдельности, например:

$$b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{\omega L}; \quad b_C = \frac{1}{x_C} = \omega C.$$

Предлагается учащимся в виде упражнения написать выражения для активного и реактивного сопротивлений, активной и реактивной проводимостей для всех случаев, указанных в табл. 3-2.

3-4. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ МОЩНОСТИ

Допустим, что через электрическую цепь проходит синусоидальный ток, причем положительные направления тока и напряжения на зажимах цепи приняты совпадающими (рис. 3-9).

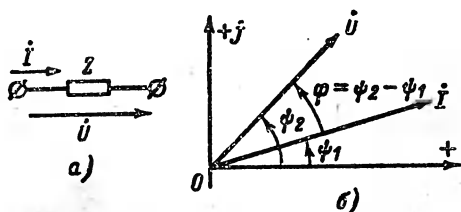


Рис. 3-9. Положительные направления (а) и комплексные напряжения и ток (б).

Комплексные ток и напряжение равны соответственно:

$$\dot{I} = I \angle \psi_1 \text{ и } \dot{U} = U \angle \psi_2.$$

Фазовый сдвиг тока относительно напряжения равен разности начальных фаз:

$$\varphi = \psi_2 - \psi_1.$$

Умножим $\dot{U}$ на комплексное значение $\dot{I}^* = \dot{I} \angle -\psi_1$, сопряженное с $\dot{I}$:

$$\dot{U}\dot{I}^* = UI \angle (\psi_2 - \psi_1) = UI \angle \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Так как напряжение $\dot{U}$ может рассматриваться как сумма активной и реактивной слагающих: $\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_p$ (см. § 3-2), то почленное умножение этих слагающих на $\dot{I}^*$ дает активную и реактивную мощности:

$$\begin{aligned} \dot{U}_a\dot{I}^* + \dot{U}_p\dot{I}^* &= U \cos \varphi I \angle 0^\circ + \\ &+ U \sin \varphi I \angle \pi/2 = P + jQ. \end{aligned}$$

Аналогично мощность может быть выражена через активный и реактивный токи.

Таким образом, комплексная величина $\tilde{S}$ определяет действительной частью активную мощность, а мнимой частью реактивную мощность, поступающую в цепь.

Модуль S равен полной

мощности. $\tilde{S}$ носит название мощности в комплексной форме, или комплексной мощности.

На комплексной плоскости $\tilde{S}$ изображает гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого служат P и Q (рис. 3-10).

Рис. 3-10. Треугольник мощностей на комплексной плоскости.

Треугольник мощностей, изображенный на рис. 3-10, подобен треугольнику сопротивлений:

$$\frac{Q}{P} = \frac{x}{r} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Если комплексно сопряженное напряжение $\dot{U}^*$ умножить на комплексный ток $\dot{I}$, то получится:

$$\dot{U}^*\dot{I} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ.$$

Поэтому мощность P и Q на зажимах цепи могут быть записаны в следующем виде

$$P = \frac{1}{2} (\dot{U}\dot{I}^* + \dot{U}^*\dot{I});$$

$$Q = \frac{1}{2j} (\dot{U}\dot{I}^* - \dot{U}^*\dot{I}).$$

Комплексное сопротивление цепи легко вычислить, если известны комплексная мощность $\tilde{S}$ и действующее значение тока I :

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Z\dot{I}\dot{I}^* = ZI^2,$$

откуда

$$Z = \frac{\tilde{S}}{I^2} = \frac{P}{I^2} + j \frac{Q}{I^2}.$$

Воспользовавшись выражением (2-28), получим:

$$Z = \frac{P}{I^2} + j \frac{\omega}{I^2} (W_{L\max} - W_{C\max}).$$

Эта формула справедлива при любой схеме соединений сопротивлений, индуктивностей и емкостей.

Энергетический метод определения комплексного сопротивления применим и к комплексной проводимости:

$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}\dot{U}\dot{Y}^* = U^2\dot{Y}^*$, откуда $\dot{Y}^* = \tilde{S}/U^2$, где $\dot{Y}^*$ — комплексная проводимость, сопряженная с Y . Следовательно,

$$Y = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2} = \frac{P}{U^2} + j \frac{\omega}{U^2} (W_{C\max} - W_{L\max}).$$

Итак, активные сопротивление и проводимость цепи зависят от поглощаемой цепью активной мощности, а реактивные сопротивление и проводимость — от разности максимальных значений энергии, запасаемых в магнитных и электрических полях (см. § 2-5, 2-6 и 2-9).

3-5. УСЛОВИЕ ПЕРЕДАЧИ МАКСИМУМА

АКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ОТ ИСТОЧНИКА К ПРИЕМНИКУ

Пусть требуется подобрать комплексное сопротивление нагрузки таким образом, чтобы при заданном комплексном сопротивлении источника обеспечивалась передача максимума активной мощности от источника к при-

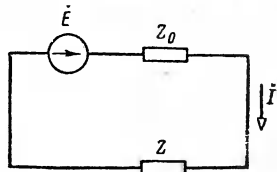


Рис. 3-11. Передача энергии от источника к приемнику.

емнику. Обозначим комплексные сопротивления источника напряжения и нагрузки соответственно через

$$Z_0 = r_0 + jx_0 \text{ и } Z = r + jx$$

(см. рис. 3-11).

Активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна:

$$P = rI^2 = \frac{rE^2}{|Z_0 + Z|^2} = \frac{rE^2}{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}.$$

Будем сначала изменять реактивное сопротивление x . Очевидно, при любом значении r ток и соответственно активная мощность достигают наибольшей величины при $x = -x_0$. При этом $P = \frac{rE^2}{(r_0 + r)^2}$.

Найдем теперь условие максимума полученной функции в предположении, что r — переменная величина, т. е. из условия, что $dP/dr = 0$; это даст:

$$(r_0 + r)^2 - 2r(r_0 + r) = 0,$$

откуда

$$r = r_0.$$

На основании найденных равенств заключаем, что *условием передачи максимума активной мощности источником приемнику является равенство*

$$Z = \bar{Z}_0, \quad (3-17)$$

где $\bar{Z}_0$ — комплексное сопротивление, сопряженное с Z_0 .

При соблюдении этого условия приемник потребляет мощность

$$P_{\text{макс}} = \frac{E^2}{4r_0}$$

и к. п. д., определяемый как отношение активной мощности, потребляемой приемником, к суммарной мощности, поглощаемой активными сопротивлениями цепи, равен 0,5.

В том случае, когда комплексное сопротивление источника имеет индуктивный характер, комплексное сопротивление приемника на основании (3-17) должно быть емкостного характера. Такая компенсация реактивного сопротивления цепи осуществляется на практике с помощью конденсаторов, включаемых последовательно или параллельно нагрузке.

Если условие (3-17) не выполняется, то относительное отклонение передаваемой активной мощности от максимальной составляет:

$$\frac{P_{\text{макс}} - P}{P_{\text{макс}}} = \frac{(r_0 - r)^2 + (x_0 + x)^2}{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}.$$

В тех случаях, когда реактивное сопротивление источника относительно невелико по сравнению с его активным сопротивлением, условия, близкие к оптимальным, получаются при активной нагрузке, если сопротивление приемника принято равным активному или полному сопротивлению источника.

Например, при $Z_0 = 618 \angle -14^\circ$ и $Z = 618 \angle 0^\circ$ поступающая в приемник активная мощность отличается от максимально возможной только на 1,5%; в этом случае компенсации реактивного сопротивления источника практически не требуется.

Формулы, приведенные выше, справедливы и для цепей постоянного тока; при этом комплексные величины заменяются действительными.

3-6. УСЛОВИЕ ПЕРЕДАЧИ ИСТОЧНИКОМ МАКСИМУМА МОЩНОСТИ ПРИ ЗАДАННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ МОЩНОСТИ ПРИЕМНИКА

На практике часто возникает необходимость подбора комплексного сопротивления нагрузки таким образом, чтобы при заданных комплексном сопротивлении источника и коэффициенте мощности приемника обеспечивалась передача максимума полной и соответственно активной мощности от источника приемнику.

Пользуясь условными обозначениями, принятыми в предыдущем параграфе, находим полную мощность на зажимах нагрузки:

$$S = zI^2 = \frac{zE^2}{|Z_0 + Z|^2} = \frac{zE^2}{z_0^2 \left| 1 + \frac{z}{z_0} \angle (\varphi - \varphi_0) \right|^2},$$

где φ и φ_0 — углы комплексных сопротивлений Z и Z_0 .

После преобразования получим:

$$S = \left(\frac{E}{z_0} \right)^2 \frac{z}{1 + 2 \frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}. \quad (3-18)$$

Приняв величину z за переменную, записываем условие максимума функции S :

$$\frac{dS}{dz} = 0,$$

откуда

$$1 + 2 \frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - \\ - z \left[2 \frac{1}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + 2 \frac{z}{z_0^2} \right] = 0,$$

или

$$1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 2 \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$z = z_0. \quad (3-19)$$

Подстановка (3-19) в (3-18) дает:

$$S_{\text{макс}} = \frac{E^2}{2z_0 [1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]}.$$

Таким образом, *передача максимума мощности в нагрузку при заданном $\cos \varphi$ достигается при равенстве полных сопротивлений нагрузки и источника*. При этом передаваемая мощность тем больше, чем больше по абсолютной величине разность углов сопротивлений нагрузки и источника $|\varphi - \varphi_0|$.

Если условие (3-19) не соблюдается, то относительное отклонение передаваемой полной мощности от максимальной составляет:

$$\frac{S_{\text{макс}} - S}{S_{\text{макс}}} = \frac{\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^2}{1 + 2 \frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}. \quad (3-20)$$

Практически допустимы отклонения от условия (3-19), при которых величина (3-20) не превышает заданного предела.

Условия передачи максимума мощности широко используются в радиотехнике, электропроводной связи, автоматике и приборостроении. В энергетических же системах, генерирующих и потребляющих большие мощности, стремятся обеспечить высокий к. п. д. генераторов; поэтому сопротивления нагрузок значительно превышают сопротивления генераторов.

3-7. БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ

Из закона сохранения энергии следует, что для любой электрической цепи соблюдается закон баланса актив-

ных мощностей: *активная мощность, генерируемая источниками, равна активной мощности, потребляемой всеми приемниками.*

В свою очередь можно показать, что и сумма *отдаваемых реактивных мощностей равна сумме потребляемых реактивных мощностей.*

Если воспользоваться комплексной формой записи токов, напряжений и мощностей, то высказанные положения будут вытекать из следующих рассуждений.

Для электрической цепи, содержащей q узлов, можно написать по первому закону Кирхгофа $q - 1$ уравнения вида:

$$\dot{I}_{k1}^* + \dot{I}_{k2}^* + \dots + \dot{I}_{k,q-1}^* + \dot{I}_{kq}^* = 0,$$

где положительные направления всех токов приняты от узла k к узлам $1, 2, \dots, q$.

Умножим каждое из этих уравнений на комплексное напряжение, отсчитываемое от соответствующего узла к узлу q , и просуммируем эти произведения:

$$\dot{U}_{1q} (\dot{I}_{12}^* + \dot{I}_{13}^* + \dots + \dot{I}_{1q}^*) + \dot{U}_{2q} (\dot{I}_{21}^* + \dot{I}_{23}^* + \dots + \dot{I}_{2q}^*) + \dots + \dot{U}_{q-1,q} (\dot{I}_{q-1,1}^* + \dot{I}_{q-1,2}^* + \dots + \dot{I}_{q-1,q}^*) = 0,$$

откуда с учетом того, что

$$\dot{U}_{kq} - \dot{U}_{mq} = \dot{U}_{km}$$

и

$$\dot{I}_{mk}^* = -\dot{I}_{km}^*,$$

получим:

$$\dot{U}_{12} \dot{I}_{12}^* + \dot{U}_{13} \dot{I}_{13}^* + \dots + \dot{U}_{q-1,q} \dot{I}_{q-1,q}^* = 0.$$

Итак сумма комплексных мощностей, потребляемых всеми ветвями электрической цепи, равна нулю; следовательно, также равны нулю в отдельности алгебраические суммы действительных и мнимых частей мощностей.

Иначе говоря, равны нулю как алгебраическая сумма потребляемых всеми ветвями цепи активных мощностей, так и алгебраическая сумма потребляемых реактивных мощностей.

Поскольку отрицательные потребляемые мощности представляют собой мощности отдаваемые, то отсюда

следует закон баланса как активных, так и реактивных мощностей.

В случае цепи постоянного тока сумма мощностей источников равна сумме мощностей, расходуемых в сопротивлениях, причем знаки мощностей источников определяются по указанному выше правилу: мощность положительна при совпадении направлений э. д. с. E и тока I , проходящего через источник, и отрицательна при встречном направлении э. д. с. и тока. В последнем случае, если источником энергии служит аккумулятор, мощность EI расходуется на его зарядку; если же источником служит генератор, то мощность EI расходуется на механическую работу (генератор работает в режиме двигателя).

3-8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ (ТОПОГРАФИЧЕСКАЯ) ДИАГРАММА

В § 1-12 рассматривался график распределения потенциала для простейшей цепи постоянного тока. В случае цепи синусоидального тока аналогично строится дру-

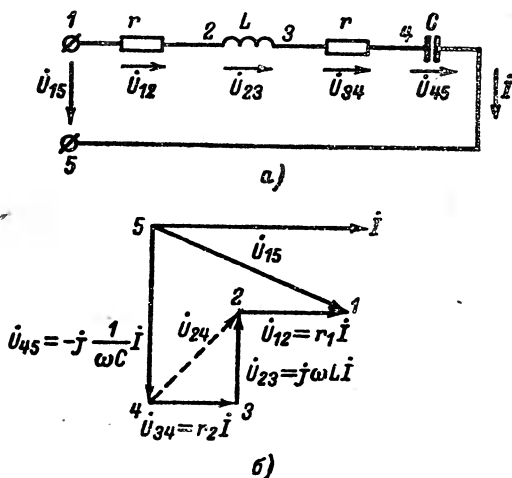


Рис. 3-12. Схема (а) и потенциальная диаграмма (б).

гой график, который называется потенциальной или топографической диаграммой напряжений. Эта диаграмма представляет собой векторную диаграмму, на ко-

торой отложены комплексные потенциалы отдельных точек заданной цепи по отношению к одной точке, потенциал которой принят за нуль. Таким образом, порядок расположения векторов падения напряжения на диаграмме строго соответствует порядку расположения элементов цепи на схеме. Конец вектора напряжения на каждом последующем элементе примыкает к началу вектора напряжения предыдущего элемента. При таком построении векторной диаграммы напряжений каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка на потенциальной диаграмме.

Потенциальная диаграмма позволяет весьма просто находить напряжения между любыми точками цепи: действующее значение и фаза искомого напряжения определяются прямой, соединяющей соответствующие точки потенциальной диаграммы.

На рис. 3-12 изображена схема неразветвленной электрической цепи и для нее построена потенциальная диаграмма напряжений. Направления векторов напряжений на потенциальной диаграмме увязаны с произвольно выбранным направлением вектора тока $\dot{I}$.

Обход схемы ведется навстречу положительному направлению тока $\dot{I}$. В соответствии с порядком расположения в схеме элементов C , r_2 , L , r_1 на диаграмме изображены векторы напряжений:

$$\dot{U}_{45} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}; \quad \dot{U}_{34} = r_2 \dot{I}; \quad \dot{U}_{23} = j\omega L \dot{I}; \quad \dot{U}_{12} = r_1 \dot{I}.$$

Начала и концы векторов (рис. 3-12, б) пронумерованы в соответствии с нумерацией точек, принятой на схеме (рис. 3-12, а).

Напряжение между какими-либо двумя точками схемы, например, на участке 2—4 схемы, взятое в положительном направлении тока $\dot{I}$, определяется по потенциальной диаграмме вектором $\dot{U}_{24}$, соединяющим точки 2 и 4 диаграммы и направленным на диаграмме от точки 4 к точке 2. Это соответствует известному правилу вычитания векторов, согласно которому какой-либо вектор $\dot{U}_{mn}$, представляющий собой разность напряжений (или потенциалов) $\dot{U}_m - \dot{U}_n$, направлен от конца вектора $\dot{U}_n$ к концу вектора $\dot{U}_m$. Итак, *вектор напряжения на диаграмме направлен к точке высшего (уменьшаемого) потенциала*, а то же напряжение на схеме указывается стрелкой, направленной от высшего потенциала к низшему.

Если при построении потенциальной диаграммы обход схемы совершался бы в положительном направлении тока $\vec{I}$, то изменилась бы нумерация начала и конца каждого вектора напряжения на потенциальной диаграмме, что противоречило бы принятому правилу расстановки индексов при вычитании векторов.

3-9. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

3-1. Произвести вычисления:

а) $10 \angle 30^\circ + 5 \angle 60^\circ$.

Ответ: $14,53 \angle 40^\circ$.

б) $10 \angle 30^\circ - 5 \angle 60^\circ$.

Ответ: $6,2 \angle 6^\circ 12'$.

в) $(8,66 + j5) (3,53 + j3,53)$.

Ответ: $50 \angle 75^\circ$.

г) $(8,66 + j5) : (2,5 + j4,33)$.

Ответ: $2 \angle -30^\circ$.

д) $(5 + j5)^3$.

Ответ: $-250 + j250$.

е)

$$\sqrt[4]{5 + j8,66}.$$

Ответ: $1,78 \angle 15^\circ, 105^\circ, -75^\circ$ или -165° .

ж) $\ln(50e^{j70^\circ})$.

Ответ: $3,91 + j1,22$.

3-2. Решить в комплексной форме следующие задачи:

а) Сложить напряжения $u_1 = 10 \sin(\omega t + \pi/3)$ и $u_2 = 5 \sin(\omega t + \pi/12)$.

б) Сложить токи $i_1 = 10 \sin \omega t$ и $i_2 = 10 \cos(\omega t + \pi/4)$.

Ответ: $u = 14 \sin(\omega t + 45^\circ 30')$;

$i = 7,65 \sin(\omega t + 67^\circ 30')$.

3-3. К цепи, состоящей из $r = 7$ ом и $L = 63,7$ мГн, соединенных последовательно, приложено напряжение $250 \sin 377 t$ в. Найти тригонометрическое и комплексное выражения тока, комплексные напряжение и сопротивление; построить векторную диаграмму.

Ответ: $10 \sin(\omega t - 73^\circ 40')$ а;

$$\frac{10}{\sqrt{2}} \angle -73^\circ 40' \text{ а; } \frac{250}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ в; } 25 \angle 73^\circ 40' \text{ ом.}$$

3-4. К цепи, состоящей из $r = 20$ ом, $L = 100$ мГн и $C = 50$ мкФ, соединенных последовательно, приложено напряжение $u = 14,14 \sin 377 t$ в. Вычислить комплексные токи и напряжения на r , L и C ; построить векторную диаграмму.

Ответ: $0,396 \angle 37^\circ 25'$ а; $7,92 \angle 37^\circ 25'$ в; $14,95 \angle 127^\circ 25'$ в; $21,15 \angle -52^\circ 35'$ в.

3-5. Сохранив условия предыдущей задачи, вычислить мгновенные значения токов и напряжений на r , L и C при $t = 0,01$ сек.

Ответ: $-0,538$ а; $-10,76$ в; $-6,22$ в; $8,52$ в.

3-6. На зажимах цепи, состоящей из последовательно соединенных r и C , напряжение равно 127 в, ток $27,6$ ма; частота 400 Гц; напряжение на сопротивлении $63,5$ в. Определить r и C .

Handwritten notes on the right side of the page:

$$130 = 45^\circ$$

$$10e^{j(\omega t + \pi/3)} + 5e^{j(\omega t + \pi/12)}$$

$$10e^{j\omega t} + 5e^{j(\omega t + \pi/4)}$$

$$e^{j\omega t} (10 + 5e^{j\pi/4})$$

$$e^{j\omega t} (10 + 5e^{j\pi/4})$$

Ответ: 2300 ом; 0,1 мкф.

3-7. Индуктивная катушка $L=5$ мГн, $r=5\sqrt{3}=8,66$ ом и соединенная с нею параллельно емкость $C=100$ мкф находятся под напряжением $u=100\sqrt{2}\sin 1000 t$ в. Найти комплексные токи и показания приборов. Построить векторную диаграмму.

Ответ: $\dot{I}=10\angle 30^\circ$; $I_C=10\angle 90^\circ$; $\dot{I}_K=10\angle -30^\circ$ а.

3-8. Комплексное сопротивление равно $3+j5$ ом. Вычислить активную и реактивную проводимости.

Ответ: 0,0882 сим; 0,147 сим.

3-9. Комплексная проводимость равна $0,2-j0,2$ сим. Вычислить активное и реактивное сопротивления.

Ответ: 2,5 ом; 2,5 ом.

3-10. Заданы в комплексном виде напряжение на ветви $\dot{U}=30$ в и ток $\dot{I}=6+j0,9$ а, проходящий через эту ветвь. Определить комплексное сопротивление и комплексную проводимость цепи; построить векторную диаграмму.

Ответ: $4,95\angle -8^\circ 30'$ ом;

$0,202\angle 8^\circ 30'$ сим.

3-11. Через ветвь, комплексное сопротивление которой равно $5\angle 30^\circ$ ом, проходит ток $\dot{I}=10\angle 30^\circ$ а. Определить напряжение на ветви в комплексной и тригонометрической форме; построить векторную диаграмму.

Ответ: $50\angle \pi/3$ в; $\sqrt{2} \cdot 50 \sin(\omega t + \pi/3)$ в.

3-12. К r и L , соединенным последовательно, подведено напряжение $U=100\angle 30^\circ$ в; $r=30$ ом; $\omega L=40$ ом. Написать выражение для мощности в комплексной форме.

Ответ: $120+j160$ ватт.

3-13. Напряжение на индуктивной катушке r , L равно 100 в при прохождении через катушку как постоянного тока 25 а, так и синусоидального тока 10 а с частотой 400 гц. Определить емкость, которую следует включить последовательно с катушкой, чтобы синусоидальный ток возрос до 20 а, а напряжение на зажимах цепи было равно 100 в.

Рассмотреть два случая, удовлетворяющие этому требованию, найти напряжение на катушке и построить векторные диаграммы.

Ответ: 64,6; 32,7 мкф; 200 в.

3-14. В цепи, изображенной на рис. 3-12, а, $r_1=25$ ом, $L=8$ мГн, $r_2=15$ ом, $C=8$ мкф.

Построить потенциальную диаграмму и определить $\dot{U}_{13}$, $\dot{U}_{24}$ и $\dot{U}_{15}$, если ток в цепи $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ а и угловая частота $\omega=2500$ рад/сек.

Ответ: $64\angle 38^\circ 40'$; $50\angle 53^\circ 10'$; $100\angle -35^\circ 50'$ в.

3-15. Доказать, что

$$P = \frac{1}{2} (\dot{U} \dot{I}^* + \dot{U}^* \dot{I}); Q = \frac{1}{2j} (\dot{U} \dot{I}^* - \dot{U}^* \dot{I}).$$

3-16. Как переходят от мгновенных значений токов к комплексным?

3-17. На какую ось проектируют вращающийся вектор при переходе от комплексных выражений к тригонометрическим?

3-18. В чем заключается удобство комплексной формы расчета электрической цепи?

3-19. Построить синусоиды и векторы напряжений и токов по табл. 3-1.

3-20. Определить модули и аргументы (углы) комплексных сопротивлений и проводимостей, приведенных в табл. 3-2, и построить треугольники сопротивлений и проводимостей.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4-1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЯ

При расчете электрических цепей часто возникает целесообразность преобразования схем этих цепей в более простые и удобные для расчета. Так, например, при одном или нескольких источниках электрической энергии в ряде случаев удается преобразовать электрическую схему в одноконтурную или в схему с двумя узлами, что весьма упрощает последующий расчет.

Описываемые ниже приемы преобразования схем электрических цепей применимы для цепей постоянного и переменного тока; ради общности изложения они приводятся в комплексной записи.

Одним из основных видов преобразования электрических схем, часто применяемых на практике, является преобразование схемы со смешанным соединением элементов. Смешанное соединение элементов представляет собой сочетание более простых соединений — последовательного и параллельного, рассмотрению которых и посвящен данный параграф. Смешанное соединение разбирается в § 4-2.

Последовательное соединение

На рис. 4-1 изображена ветвь электрической цепи, в которой последовательно включены комплексные сопротивления $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. Через все участки цепи, соединенные последовательно, проходит один и тот же ток $\dot{I}$.

Напряжения на отдельных участках цепи обозначены через $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$.

По второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n,$$

или, что то же,

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \dots + Z_n \dot{I}.$$

Сумма комплексных сопротивлений всех последовательно соединенных участков цепи

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k$$

называется эквивалентным комплексным сопротивлением.

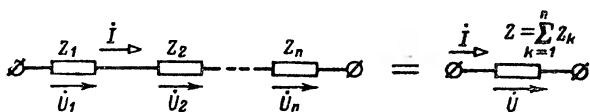


Рис. 4-1. Последовательное соединение.

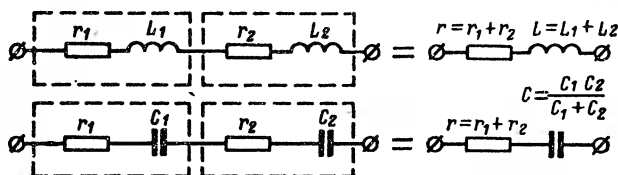


Рис. 4-2. Последовательное соединение однородных звеньев.

Если мнимые части комплексов

$$Z_k = r_k + jx_k$$

представляют собой сопротивления одинакового характера — индуктивного или емкостного (рис. 4-2), то эквивалентное комплексное сопротивление Z находится в результате арифметического сложения в отдельности сопротивлений r_k , индуктивностей L_k или величин $1/C_k$, обратных емкостям:

$$Z = r + j\omega L$$

или

$$Z = r - j \frac{1}{\omega C},$$

где

$$r = \sum_{k=1}^n r_k; \quad L = \sum_{k=1}^n L_k; \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

Ток в цепи равен:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}.$$

Напряжения на участках цепи, соединенных последовательно, относятся как комплексные сопротивления этих участков: напряжение на k -м участке равно произведению суммарного напряжения $\dot{U}$ на отношение комплексного сопротивления k -го участка к эквивалентному комплексному сопротивлению цепи:

$$\dot{U}_k = \dot{U} \frac{Z_k}{Z}.$$

Приведенные выше формулы справедливы при любых значениях Z_k .

Параллельное соединение

На рис. 4-3 изображена схема электрической цепи с двумя узлами. Между этими узлами параллельно соединены ветви с комплексными проводимостями $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Напряжение на всех ветвях одинаковое, равное $\dot{U}$.

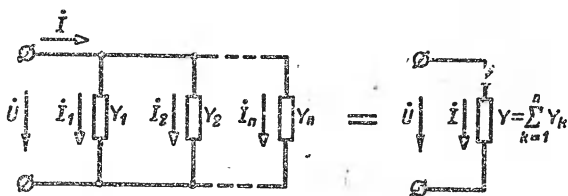


Рис. 4-3. Параллельное соединение.

Токи в ветвях обозначены через $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_n$. По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n,$$

или, что то же,

$$\dot{I} = Y_1 \dot{U} + Y_2 \dot{U} + \dots + Y_n \dot{U}.$$

Сумма комплексных проводимостей всех ветвей, соединенных параллельно,

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k$$

называется эквивалентной комплексной проводимостью.

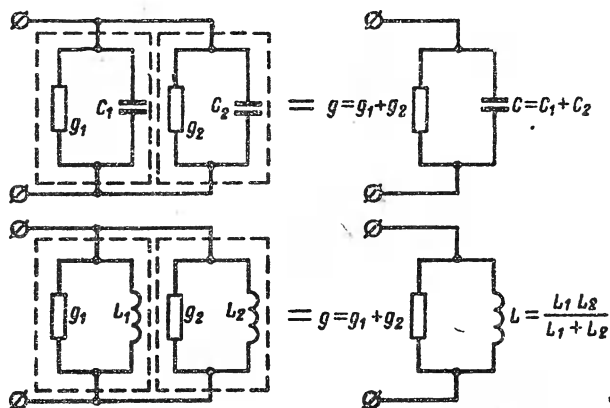


Рис. 4-4. Параллельное соединение однородных звеньев.

Если мнимые части комплексов $Y_k = g_k - jb_k$ представляют собой проводимости одинакового характера — емкостного или индуктивного (рис. 4-4), то эквивалентная комплексная проводимость Y находится в результате арифметического сложения отдельных активных проводимостей g_k , емкостей C_k или величин $1/L_k$, обратных индуктивностям:

$$Y = g + j\omega C$$

или

$$Y = g - j \frac{1}{\omega L},$$

где

$$g = \sum_{k=1}^n g_k; \quad C = \sum_{k=1}^n C_k; \quad \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}.$$

Суммарный ток в цепи равен:

$$\dot{I} = Y \dot{U}.$$

Токи в ветвях относятся, как их комплексные проводимости: ток в k -й ветви равен произведению суммарного тока всех ветвей на отношение комплексной проводимости k -й ветви к эквивалентной комплексной проводимости:

$$\dot{I}_k = \dot{I} \frac{Y_k}{Y} = \dot{I} \frac{Z}{Z_k}.$$

Данным выражением особенно удобно пользоваться при $n > 2$. При этом значения Y_k могут быть любыми.

В случае параллельного соединения двух ветвей ($n = 2$) обычно пользуются выражениями, в которые входят сопротивления $Z_1 = 1/Y_1$ и $Z_2 = 1/Y_2$ ветвей; эквивалентное комплексное сопротивление равно:

$$Z = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

т. е. ток одной из двух параллельных ветвей равен суммарному току, умноженному на сопротивление другой ветви и деленному на сумму сопротивлений обеих ветвей.

4.2. СМЕШАННОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Электрические схемы, имеющие смешанное соединение, могут быть преобразованы в более простую электрическую схему путем замены параллельных ветвей одной ветвью и соответственно последовательно соединенных участков цепи — одним участком.

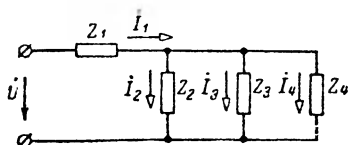


Рис. 4-5. Смешанное соединение.

На рис. 4-5 показан пример электрической цепи со смешанным соединением. Эта схема легко приводится к одноконтурной. Первоначально вычисляется эквивалентная комплексная проводимости

мость параллельных ветвей; затем находится величина, обратная проводимости, т. е. общее комплексное сопротивление параллельных ветвей; найденное комплексное сопротивление суммируется с комплексным сопротивлением последовательно включенного участка. Полученное суммарное комплексное сопротивление эквивалентно сопротивлению исходной цепи со смешанным соединением.

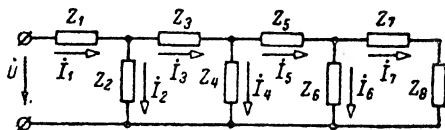


Рис. 4-6. Цепная схема.

Расчетные выражения для рассматриваемого случая будут следующие:

$$Y_9 = Y_2 + Y_3 + Y_4 = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}.$$

Суммарное комплексное сопротивление всей цепи равно:

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_9} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4},$$

а суммарный ток

$$I_1 = \frac{U}{Z}.$$

Токи в ветвях относятся, как комплексные проводимости ветвей:

$$I_2 = I_1 \frac{Y_2}{Y_9}; \quad I_3 = I_1 \frac{Y_3}{Y_9}; \quad I_4 = I_1 \frac{Y_4}{Y_9}.$$

Таким образом, многоконтурная электрическая схема со смешанным соединением приводится к одноконтурной, имеющей суммарное комплексное сопротивление Z или соответственно суммарную комплексную проводимость Y . Распределение токов и напряжений в смешанной цепи подчиняется правилам, указанным в предыдущем параграфе.

Описанный выше порядок преобразования схемы и нахождения распределения токов принципиально применим и для так называемой цепной схемы, показанной на рис. 4-6. Просуммировав комплексные сопротив-

ления Z_7 и Z_8 в последней ветви, найдем комплексную проводимость ветви, которую алгебраически сложим с $1/Z_6$ и получим суммарную комплексную проводимость двух последних ветвей; вычислив обратную величину, т. е. комплексное сопротивление, прибавим к ней Z_5 . Продолжая таким образом дальше, получим в итоге результирующее комплексное сопротивление цепи и соответственно суммарный ток I_1 , который может быть путем последовательных вычислений распределен между всеми ветвями сложной цепи.

Однако такой способ расчета цепной схемы является достаточно трудоемким и утомительным. Более целесообразно в этом случае воспользоваться другим методом, который известен под названием метода подобия или единичного тока.

Задавшись током в последней ветви, равным единице ($I'_7 = 1$), находим напряжение на комплексном сопротивлении Z_6 , равное $(Z_7 + Z_8) \cdot 1$. При этом ток $I'_6 = \frac{Z_7 + Z_8}{Z_6}$.

Следовательно,

$$I'_5 = I'_6 + I'_7 = \frac{Z_7 + Z_8}{Z_6} + 1.$$

Прибавив к напряжению на Z_6 падение напряжения от тока I'_5 в комплексном сопротивлении Z_5 , получим напряжение на Z_4 . Продолжая таким образом дальше, найдем в конечном итоге ток I'_1 и напряжение $\dot{U}'$. Ввиду того что ток I'_7 был произвольно выбран равным единице, полученное напряжение не будет равно заданному напряжению $\dot{U}$ на зажимах цепи. Для нахождения действительного распределения токов в схеме необходимо все вычисленные значения токов умножить на отношение $\dot{U}/\dot{U}'$.

4.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УЧАСТКИ ЦЕПИ

С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЯМИ

Обозначим комплексное сопротивление участка цепи, состоящего из двух последовательно соединенных элементов, через $Z = r + jx$. Комплексная проводимость данного участка цепи равна $Y = 1/Z = g - jb$, причем ак-

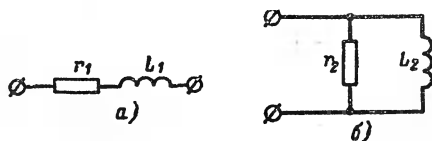
тивная и реактивная проводимости:

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}; \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2}.$$

Если два элемента с проводимостями g и b , вычисленными по этим формулам, соединить параллельно, то суммарная комплексная проводимость будет равна Y и соответственно комплексное сопротивление будет равно Z .

Такие две цепи с последовательным и параллельным соединениями, имеющие одинаковые сопротивления на зажимах, называются эквивалентными.

Рис. 4-7. Активно-индуктивные цепи, эквивалентные при определенной частоте.



Ввиду того что реактивное сопротивление x , входящее в расчетные формулы, в общем случае зависит от частоты, условие эквивалентности этих цепей выполняется только при той частоте, для которой вычислено x .

Пусть, например, задана схема с последовательным соединением сопротивления r_1 и индуктивности L_1 (рис. 4-7, а). Преобразуем ее в схему с параллельным соединением элементов (рис. 4-7, б).

Активная и реактивная проводимости исходной цепи:

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}; \quad b = \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}.$$

Из условия эквивалентности цепей следует, что параметры новой цепи будут:

$$r_2 = \frac{1}{g} = \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{r_1}; \quad \omega L_2 = \frac{1}{b} = \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{\omega L_1}.$$

Вычислив по этим формулам r_2 и L_2 , получим схему цепи, эквивалентной исходной при данной частоте ω . При других значениях частоты ω параметры r_2 и L_2 будут иметь другие значения, следовательно эквивалентность цепей нарушится.

При $r_1^2 \ll (\omega L_1)^2$, например, при достаточно высокой частоте:

$$r_2 \approx \frac{(\omega L_1)^2}{r_1} \quad \text{и} \quad L_2 \approx L_1.$$

Если исходной является схема рис. 4-7, б и заданными параметрами являются r_2 , L_2 и ω , то параметры эквивалентной цепи (рис. 4-7, а) определяются из выражений:

$$r_1 = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{\frac{1}{r_2}}{\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L_2}\right)^2};$$

$$\omega L_1 = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{\frac{1}{\omega L_2}}{\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L_2}\right)^2}.$$

Из полученных выражений видно, что числовые значения r_1 и L_1 эквивалентной цепи зависят от частоты.

Условия эквивалентности для цепей с последовательным и параллельным соединением сопротивления и емкости имеют вид:

$$r_2 = r_1 \left[1 + \frac{1}{(\omega C_1 r_1)^2} \right]; \quad C_2 = C_1 \frac{1}{1 + (\omega C_1 r_1)^2};$$

$$r_1 = r_2 \frac{1}{1 + (\omega C_2 r_2)^2}; \quad C_1 = C_2 \left[1 + \frac{1}{(\omega C_2 r_2)^2} \right].$$

При достаточно высокой частоте $(\omega C_2 r_2)^2 \gg 1$, и тогда

$$r_1 \approx \frac{1}{r_2 (\omega C_2)^2};$$

$$C_1 \approx C_2.$$

4-4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В ЭКВИВАЛЕНТНУЮ ЗВЕЗДУ

Преобразованием треугольника в эквивалентную звезду называется такая замена части цепи, соединенной по схеме треугольником, цепью, соединенной по схеме звезды, при которой токи и напряжения в остальной части цепи сохраняются неизменными. Иначе говоря, эквивалентность треугольника и звезды понимается в том смысле, что при одинаковых напряжениях между одноименными зажимами токи, входящие в одноименные зажимы, одинаковы. Это равносильно тому, что мощности в этих цепях одинаковы.

На рис. 4-8 показан случай, когда преобразование треугольника в эквивалентную звезду дает возможность

преобразовать многоконтурную схему в одноконтурную.

Для вывода расчетных выражений, служащих для преобразования треугольника в эквивалентную звезду, ниже приняты следующие обозначения (рис. 4-9):

Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} — сопротивления сторон треугольника;

Z_1, Z_2, Z_3 — сопротивления лучей звезды;

i_1, i_2, i_3 — токи, подходящие к зажимам 1, 2, 3;

i_{12}, i_{23}, i_{31} — токи в ветвях треугольника.

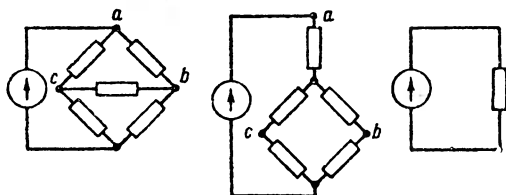


Рис. 4-8. Упрощение схемы преобразованием треугольника в звезду.

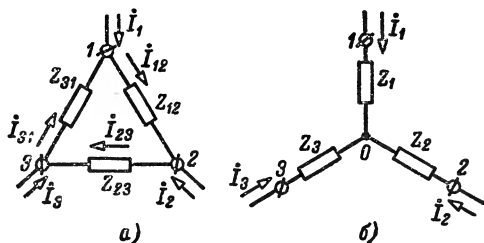


Рис. 4-9. Соединения треугольником (а) и звездой (б).

Выразим токи в ветвях треугольника через приходящие токи.

По второму закону Кирхгофа сумма напряжений в контуре треугольника равна нулю:

$$Z_{12} i_{12} + Z_{23} i_{23} + Z_{31} i_{31} = 0.$$

По первому закону Кирхгофа для узлов 2 и 1

$$i_{23} = i_{12} + i_2; \quad i_{31} = i_{12} - i_1.$$

Решение этих уравнений относительно $\dot{I}_{12}$ дает:

$$\dot{I}_{12} = \frac{Z_{31} \dot{I}_1 - Z_{23} \dot{I}_2}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

Напряжение между зажимами 1 и 2 схемы рис. 4-9, а будет:

$$\dot{U}_{12} = Z_{12} \dot{I}_{12} = \frac{Z_{31} Z_{12} \dot{I}_1 - Z_{12} Z_{23} \dot{I}_2}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}},$$

а в схеме рис. 4-9, б оно равно:

$$\dot{U}_{12} = Z_1 \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2.$$

Для эквивалентности необходимо равенство напряжений $\dot{U}_{12}$ при всяких токах $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, т. е.

$$\frac{Z_{31} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_1 - \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_2 = Z_1 \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2.$$

Это возможно при условии:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{31} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_2 &= \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_3 &= \frac{Z_{23} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

Третье выражение получается в результате круговой замены индексов.

Итак, комплексное сопротивление луча звезды равно произведению комплексных сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму комплексных сопротивлений трех сторон треугольника.

Выше было получено выражение для тока в стороне 1—2 треугольника в зависимости от токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$. Круговой заменой индексов можно получить токи в двух других сторонах треугольника:

$$\dot{I}_{23} = \frac{Z_{12} \dot{I}_2 - Z_{31} \dot{I}_3}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{31} = \frac{Z_{23} \dot{I}_3 - Z_{12} \dot{I}_1}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

4-5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗВЕЗДЫ В ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

В расчетах также возникает необходимость замены звезды эквивалентным треугольником. На рис. 4-10 показан, например, случай, когда такая замена позволяет преобразовать сложную электрическую схему в одноконтурную.

При переходе от звезды к треугольнику заданными являются сопротивления звезды Z_1, Z_2, Z_3 . Выражения для

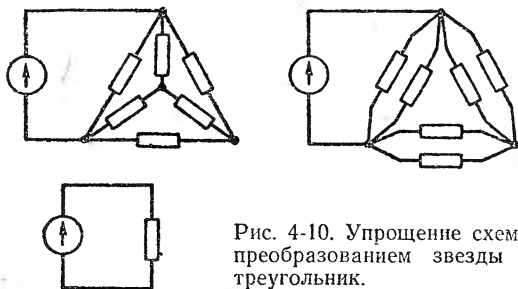


Рис. 4-10. Упрощение схемы преобразованием звезды в треугольник.

искомых сопротивлений треугольника находятся в результате совместного решения трех уравнений (4-1).

Деление третьего уравнения на первое, а затем на второе дает:

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{Z_{23}}{Z_{12}} \text{ и } \frac{Z_3}{Z_2} = \frac{Z_{31}}{Z_{12}}.$$

Выражая отсюда Z_{23} и Z_{31} через Z_{12} и подставляя их в первое уравнение (4-1), получим:

$$Z_1 \left[Z_{12} + Z_{12} \frac{Z_3}{Z_1} + Z_{12} \frac{Z_3}{Z_2} \right] = Z_{12}^2 \frac{Z_3}{Z_3},$$

откуда

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}. \quad (4-2)$$

Аналогично круговой заменой индексов получим:

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} \quad (4-2a)$$

и

$$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2}. \quad (4-2б)$$

Следовательно, комплексное сопротивление стороны треугольника равно сумме комплексных сопротивлений прилегающих лучей звезды и произведения их, деленного на сопротивление третьего луча.

Токи в лучах звезды легко выражаются через токи в сторонах треугольника. С учетом положительных направлений на рис. 4-9 имеем

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23}.$$

4-6. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИСТОЧНИКИ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА

Два разнородных источника электрической энергии — источник напряжения и источник тока — считаются эквивалентными, если при замене одного источника другим токи и напряжения во внешней электрической цепи, с которой эти источники соединяются, остаются неизменными. На рис. 4-11 изображены эквивалентные источники напряжения и тока, посылающие во внешнюю цепь ток $\dot{I}_1$ и поддерживающие на своих зажимах одинаковое напряжение $\dot{U}$.

Условием эквивалентности источников, именуемым в дальнейшем правилом об эквивалентных источниках напряжения и тока, служит следующее соотношение между э. д. с. $\dot{E}$ источника напряжения и током $\dot{I}$ источника тока:

$$\dot{E} = Z \dot{I}, \quad (4-3)$$

где Z — внутреннее комплексное сопротивление как источника напряжения, так и источника тока.

Действительно, напряжение $\dot{U}$ на зажимах источника напряжения получается в результате вычитания из э. д. с. $\dot{E}$ падения напряжения от тока $\dot{I}_1$ в комплексном сопротивлении Z источника (рис. 4-11, а).

Соответственно напряжение $\dot{U}$ на зажимах источника тока при той же величине тока $\dot{I}_1$, посылаемого во внешнюю цепь, равно падению напряжения от тока $\dot{I} - \dot{I}_1$ в комплексном сопротивлении Z источника (рис. 4-11, б).

В обоих случаях напряжения на зажимах источника одинаковы:

$$\dot{U} = \dot{E} - Z \dot{I}_1 = Z (\dot{I} - \dot{I}_1) = Z \dot{I} - Z \dot{I}_1,$$

т. е. получается условие (4-3), не зависящее от тока $\dot{I}_1$ нагрузки.

При отсоединении эквивалентных источников напряжения и тока от внешней цепи ($I_1=0$) напряжение на зажимах обоих источников равно $\dot{E}$. Именно это обстоятельство и равенство внутренних комплексных сопротивлений обоих источников и обеспечивают их эквивалентность при любом режиме работы (см. § 7-9).

Следует заметить, что мощности, расходуемые во внутренних сопротивлениях эквивалентных источников напряжения и тока, неодинаковы. В первом случае полная мощность, расходуемая в источнике, равна $z\dot{I}_1^2$, во втором случае $z|\dot{I}-\dot{I}_1|^2$.

Например, при отсоединении источников от внешней цепи в первом случае мощность в источнике не расходуется, а во втором случае она составляет $z\dot{I}^2$.

Поэтому эквивалентность источников следует понимать только в смысле неизменности токов, напряжений и мощностей во внешней электрической цепи, присоединенной к источникам.

Если внутреннее сопротивление источника напряжения равно нулю, то непосредственное применение формулы (4-3) для нахождения эквивалентного источника тока по заданной величине э. д. с. источника не представляется возможным. В таких случаях сопротивление внешней цепи, включенной последовательно с э. д. с., можно рассматривать в качестве внутреннего сопротивления источника, что позволит применить формулу (4-3).

В случае сложной электрической цепи замена источника напряжения эквивалентным источником тока или наоборот может иногда упростить расчет.

Целесообразность такой замены проиллюстрирована, в частности, в следующем параграфе.

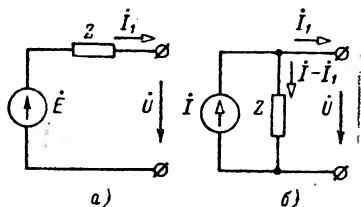


Рис. 4-11. Эквивалентные источники напряжения (а) и тока (б).

4-7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ С ДВУМЯ УЗЛАМИ

Применим правило об эквивалентных источниках напряжения и тока к преобразованию схемы с параллельным соединением n ветвей, содержащих источники напряжения (рис. 4-12, а).

Заменяя заданные источники напряжения источниками тока, получаем схему рис. 4-12, б. Источники тока в совокупности образуют эквивалентный источник тока $\dot{I}$

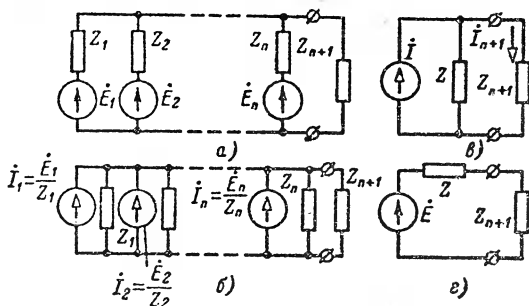


Рис. 4-12. Преобразования параллельного соединения ветвей с источниками напряжения.

(рис. 4-12, в), причем

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = \\ &= \frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2} + \dots + \frac{\dot{E}_n}{Z_n} = \sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k \end{aligned}$$

и

$$Z = \frac{1}{\sum_{k=1}^n Y_k}.$$

Пользуясь этим соотношением, можно в конечном итоге перейти от схемы в к схеме г, являющейся эквивалентом исходной схемы а. Здесь

$$\dot{E} = Z \dot{I} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k}{\sum_{k=1}^n Y_k}.$$

Таким образом, n параллельных ветвей с источниками напряжения между двумя узлами могут быть заменены

ны одним источником тока (рис. 4-12, в) или источником напряжения (рис. 4-12, г).

Ток во внешней цепи (в ветви с сопротивлением Z_{n+1}) равен:

$$i_{n+1} = i \frac{Z}{Z + Z_{n+1}} = \frac{\dot{E}}{Z + Z_{n+1}}.$$

Напряжение между двумя узлами находится по формуле

$$\dot{U} = i \left[\frac{ZZ_{n+1}}{Z + Z_{n+1}} \right] = i \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} Y_k} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k}{\sum_{k=1}^{n+1} Y_k}. \quad (4-4)$$

Выведенные здесь выражения широко используются для расчета электрических цепей с двумя узлами, а также более сложных цепей, приводящихся к двум узлам.

4-8. ПЕРЕНОС ИСТОЧНИКОВ В СХЕМЕ

Расчет электрической цепи облегчается в ряде случаев в результате переноса в схеме источников э. д. с. или тока. Как это видно из уравнений Кирхгофа, токи в схеме определяются заданными величинами суммарных э. д. с. в контурах независимо от того, из каких отдельных слагающих они состоят. Поэтому изменение расположения в схеме источников э. д. с., при котором суммарные э. д. с. во всех контурах сохраняются неизменными, не влияет на токи в ветвях. Аналогично напряжения на ветвях определяются заданными величинами суммарных токов источников тока в узлах, и поэтому изменение расположения в схеме источников тока, при котором их суммарные токи во всех узлах сохраняются неизменными, не влияет на напряжения в схеме.

Если, например, требуется исключить источник э. д. с. из какой-либо ветви, то в данную ветвь вводится компенсирующая э. д. с., причем точно такая же э. д. с. вводится одновременно во все остальные ветви, сходящиеся в одном из узлов данной ветви. Компенсирующая и дополнительные э. д. с. имеют одинаковое направление по отношению к рассматриваемому узлу. В результате этого источник э. д. с. из ветви исключается и появляются источники э. д. с. в других ветвях схемы. Суммарные

э. д. с. во всех контурах и соответственно токи в ветвях остаются прежними.

Итак, источник э. д. с. может быть перенесен из какой-либо ветви схемы во все другие ветви, присоединенные к узлу данной ветви, без изменения токов в схеме.

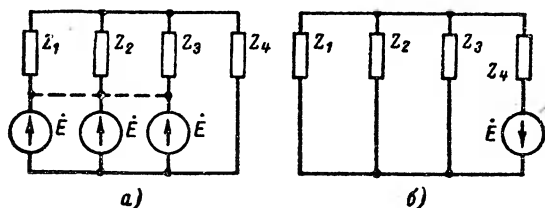


Рис. 4-13. Перенос источников э. д. с. в схеме.

Справедливо и обратное положение: если во всех ветвях, кроме одной, сходящихся в узле, имеются одинаковые источники э. д. с. (рис. 4-13, а), направленные

все к одному узлу или все от узла, то они могут быть заменены одним источником э. д. с. в ветви, в которой источник отсутствовал (рис. 4-13, б).

Это положение подтверждается тем, что суммарные э. д. с. в контурах схем на рис. 4-13, а и б одинаковы.

Имеется и другое доказательство данного положения: ввиду

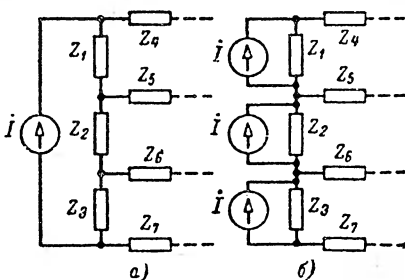


Рис. 4-14. Перенос источника тока в схеме.

равенства э. д. с. всех источников вторые зажимы их могут быть объединены, как имеющие одинаковый потенциал. В результате такого объединения, показанного на рис. 4-13, а пунктиром, получается схема рис. 4-13, б.

В случае переноса источников тока они присоединяются к узлам схемы так, чтобы оставались неизменными их суммарные токи в узлах. Так, например, несмотря на то, что источники тока размещены в схемах рис. 4-14, а и б различно, суммарные токи источников в узлах

обеих схем одинаковы. Поэтому и напряжения между узлами не изменились.

Итак, источник тока может быть заменен источниками тока, подключенными параллельно всем ветвям, которые составляли контур с рассматриваемым источником.

Перенос источников в схеме успешно сочетается на практике с различными методами преобразований и расчетов (см. пример 4-1).

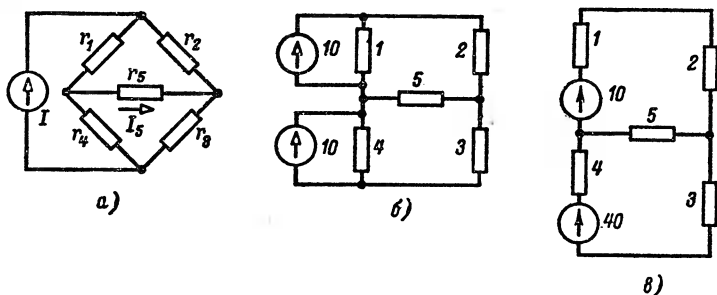


Рис. 4-15. Пример 4-1.

Пример 4-1. Вычислить ток в диагональной ветви r_5 мостовой схемы рис. 4-15. а.

Дано: $I = 10$ а; $r_1 = 1$ ом; $r_2 = 2$ ом; $r_3 = 3$ ом; $r_4 = 4$ ом; $r_5 = 5$ ом.

Заданный источник тока может быть заменен двумя источниками, подключенными параллельно сопротивлениям r_1 и r_4 (рис. 4-15, б). Пользуясь условием эквивалентности источников напряжения и тока, получаем схему рис. 4-15, в с двумя узлами. По формуле (4-4)

$$\text{напряжение на ветви } r_5 \text{ равно } \frac{\frac{40}{7} - \frac{10}{3}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 3,52 \text{ в. Искомый ток}$$

$$I_5 = \frac{3,52}{5} = 0,704 \text{ а.}$$

4-9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ СХЕМ

Схема электрической цепи, в которой имеется ось симметрии, называется симметричной. Например, схема рис. 4-16, а симметрична относительно вертикальной оси. В симметричных схемах легко выявляются точки или узлы с одинаковым потенциалом. В ветвях, присоединен-

ных к таким узлам, токи равны нулю. Поэтому эти ветви можно разрезать, не нарушая распределения токов и напряжений в схеме. Точки, имеющие одинаковый потен-

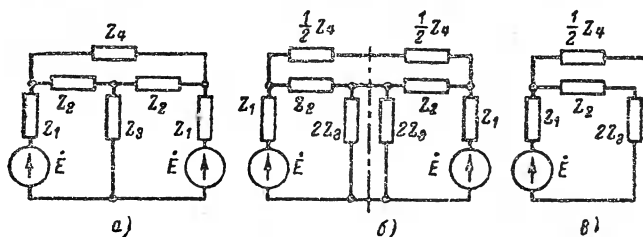


Рис. 4-16. Симметричная цепь (а и б) и ее отсеченная половина (в).

циал, могут быть объединены. Рассечение ветвей, по которым не проходит ток, и объединение точек равного потенциала упрощают схему и облегчают расчет.

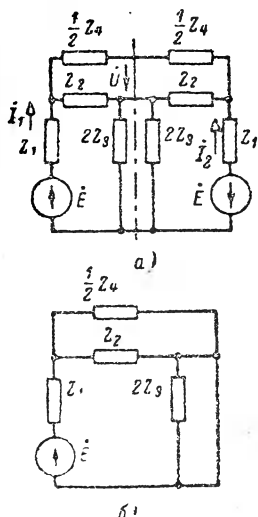


Рис. 4-17. Симметричная цепь с неодинаковой полярностью источников (а) и ее закороченная половина (б).

Так, в симметричной схеме рис. 4-16, б токи в соединениях, пересекающих ось симметрии, отсутствуют. Разрезав схему по оси симметрии, получим с обеих сторон одноконтурную схему рис. 4-16, в, которая легко рассчитывается.

Допустим теперь, что полярность источников в симметричной схеме неодинакова (рис. 4-17, а). В этом случае (равенство э. д. с. источников и различие их полярности) тески в симметричных ветвях (например, I_1 и I_2) и напряжения между соответствующими парами зажимов, симметрично расположенными относительно оси, равны по величине и противоположны по знаку. Отсюда следует, что напряжения между всеми точками, лежащими на оси симметрии, равны нулю ($\dot{U} =$

$= -\dot{U}$, т. е. $\dot{U}=0$). Поэтому все точки схемы на оси симметрии могут быть замкнуты накоротко (рис. 4-17, б).

Таким образом, расчет сложных симметричных схем приводится к расчету более простых схем.

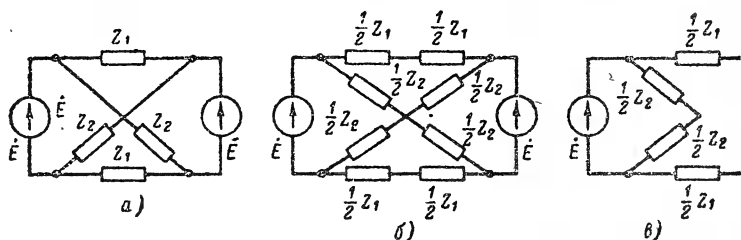


Рис. 4-18. Симметричная мостовая схема (а, б) и ее преобразованная часть (в).

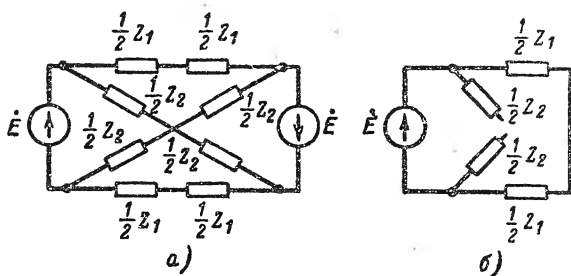


Рис. 4-19. Симметричная мостовая схема (а) и ее преобразованная часть (б).

На рис. 4-18, а и б показана симметричная мостовая схема, имеющая две оси симметрии — вертикальную и горизонтальную. В продольных ветвях ток отсутствует; потенциалы средних точек поперечных (перекрещенных) ветвей одинаковы.

Поэтому продольные ветви могут быть рассечены, а средние точки поперечных ветвей — объединены. В результате с обеих сторон получится одноконтурная схема (рис. 4-18, в), расчет которой крайне прост.

Если изменить полярность одного из источников (рис. 4-19, а), то роли продольных и поперечных ветвей поменяются и преобразованная часть схемы примет вид, показанный на рис. 4-19, б.

В разобранных выше примерах э. д. с. источников были равны. В случае неравенства э. д. с. источников преобразование симметричной схемы удобно сочетается с методом наложения (см. пример 7-5).

4-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

4-1. Сопротивление 2 *ом* и емкость 0,191 *мкф* соединены параллельно. Найти эквивалентную схему с последовательным соединением *r* и *C* при частотах $f=1; 1,5; 2$ Мгц.

Ответ: $r=0,296; 0,143; 0,083$ *ом*; $C=0,224; 0,206; 0,199$ *мкф*.

4-2. Параллельно соединены ветви, одна из которых состоит из $C=10$ *мкф*, а вторая — из последовательно соединенных $r=10$ *ом* и $L=100$ *мгн*. Вычислить комплексное сопротивление цепи при $\omega=377$ рад/сек.

Ответ: $13,5+j 43,4$ *ом*.

4-3. Добавив в схеме, взятой из предыдущей задачи, последовательно $r=10$ *ом* и подводя к цепи $\dot{U}=100\angle 0^\circ$ в, вычислить токи в ветвях и суммарный ток; построить векторную диаграмму.

Ответ: $0,347\angle 101^\circ 6'; 2,36\angle -64^\circ; 2,02\angle -61^\circ 30' a$.

4-4. Индуктивная катушка, имеющая $r=8$ *ом* и $L=0,05$ *гн*, соединена параллельно с $C=1$ *мкф*. Найти частоту, при которой напряжение на зажимах данной цепи в фазе с суммарным током; определить сопротивление цепи.

Ответ: 713 гц; 6 250 *ом*.

4-5. Параллельно соединены две ветви: первая ветвь состоит из последовательно соединенных r_1 и L и ее сопротивление равно $40+j 30$ *ом*; вторая состоит из последовательно соединенных r_2 и C и ее сопротивление равно $80-j 150$ *ом*. Определить сопротивление и проводимость всей цепи, если частота возрастет в 1,5 раза; начертить на комплексной плоскости сопротивления и проводимости ветвей и всей цепи.

Ответ: $58,4\angle 21^\circ 35'$ *ом*;
 $1,71 \cdot 10^{-2}\angle -21^\circ 35'$ *сим*.

4-6. Параллельно соединены три ветви: первая состоит из $r_1=25$ *ом*, вторая — из $C=50$ *мкф*, третья — из индуктивной катушки, имеющей $r_2=10$ *ом* и $L=50$ *мгн*. Напряжение на ветвях равно $100 \sin 400 t$ в. Вычислить действующее значение суммарного тока и активную мощность цепи.

Ответ: 4,47 а; 300 вт.

4-7. Индуктивная катушка, имеющая r и L , соединена параллельно с емкостью C . Найти L и C , при которых сопротивление всей цепи равно $500\angle 0^\circ$ *ом*, если $r=100$ *ом* и угловая частота $\omega=10^5$ рад/сек.

Ответ: $L=2$ *мгн*, $C=0,04$ *мкф*.

4-8. Последовательно с C подключена цепь, состоящая из $r=500$ *ом* и L , соединенных параллельно. Приняв $\omega=10^5$ рад/сек, найти L и C , при которых общее сопротивление равно $100\angle 0^\circ$ *ом*.

Ответ: 2,5 *мгн*; 0,05 *мкф*.

4-9. Доказать, что полное сопротивление цепи, состоящей из параллельно соединенных индуктивной катушки (r, L) и емкости (C),

при угловой частоте $\omega=1/\sqrt{2LC}$ не зависит от r .

4-10. Сопротивления $50-j20$, $100+j0$ и $40+j60$ ом соединены треугольником. Преобразовать данный треугольник в эквивалентную звезду.

Ответ: $18,5+j7,7$; $23,1-j15,4$; $26,5+j26$ ом.

4-11. Индуктивная катушка, имеющая сопротивление $15+j20$ ом, последовательно подключена к участку цепи, состоящему из параллельно соединенных $r=10$ ом и $C=\frac{1}{30\omega}$ ф. Определить действующее

значение тока в индуктивной катушке и напряжения на r и C , если к зажимам всей цепи приложено напряжение $100\angle 0^\circ$ в.

Ответ: $2,76-j1,96$ а; $19-j26$ в.

4-12. Два генератора, имеющие одинаковую частоту, работают параллельно на общую нагрузку. Заданы: комплексные э. д. с. генераторов $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$, комплексные сопротивления генераторов Z_1 и Z_2 , комплексное сопротивление нагрузки Z_3 .

Определить ток в нагрузке.

Ответ:

$$\frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}.$$

4-13. В чем заключается удобство расчета схемы с двумя узлами?

4-14. В каких случаях целесообразно применять метод единичного тока?

4-15. Привести пример, в котором требуется преобразовать звезду в треугольник (или треугольник в звезду).

4-16. Вывести условия эквивалентности (при определенной частоте) активно-емкостных цепей с последовательным и параллельным соединением сопротивления и емкости.

4-17. Пользуясь условиями (4-1), выразить токи в сторонах треугольника через токи эквивалентной звезды.

ГЛАВА ПЯТАЯ

РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

5-1. РЕЗОНАНСНЫЕ (КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ) ЦЕПИ

Резонансными или колебательными цепями называются электрические цепи, в которых могут возникать явления резонанса напряжений или токов.

Резонанс представляет собой такой режим пассивной электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, при котором реактивное сопротивление и реактивная проводимость цепи равны нулю; соответственно равна нулю реактивная мощность на зажимах цепи.

Резонанс напряжений наблюдается в электрической цепи с последовательным соединением участков, содержащих индуктивности и емкости. Неразветвленная цепь, состоящая из последовательно соединенных элемен-

тов r , L и C , рассмотренная в § 2-7, представляет собой один из простейших случаев такой цепи. В радиотехнике ее называют последовательным колебательным контуром.

При резонансе напряжений индуктивное сопротивление одной части цепи компенсируется емкостным сопротивлением другой ее части, последовательно соединенной с первой. В результате *реактивное сопротивление и реактивная мощность на зажимах цепи равны нулю*.

В свою очередь резонанс токов наблюдается в электрической цепи с параллельным соединением участков, содержащих индуктивности и емкости. Один из простейших примеров такой цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов r , L и C , был рассмотрен в § 2-8. В радиотехнике такую цепь называют параллельным колебательным контуром.

При резонансе токов индуктивная проводимость одной части цепи компенсируется емкостной проводимостью другой ее части, параллельно соединенной с первой. В результате *реактивная проводимость и реактивная мощность на зажимах цепи равны нулю*.

Частоты, при которых наблюдается явление резонанса, называются резонансными частотами.

Исследование резонансных режимов в электрических цепях заключается в нахождении резонансных частот, зависимостей различных величин от частоты¹ или параметров L и C , а также в рассмотрении энергетических соотношений при резонансе.

Резонансные цепи очень широко применяются в электротехнике и представляют собой неотъемлемую часть всякого радиотехнического устройства. Изучению явления резонанса, свойств и частотных характеристик простейших резонансных цепей посвящена данная глава. Электрические фильтры, которые также являются резонансными цепями, рассмотрены в гл. 10.

5-2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Резонансная цепь с последовательным соединением r , L и C (рис. 5-1) является простейшей цепью для изучения явления резонанса напряжений и подробно рас-

¹ Такие зависимости называются частотными характеристиками.

сма́тривается ниже. Комплексное сопротивление такой цепи зависит от частоты:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (5-1)$$

Резонанс напряжений наступает при частоте ω_0 , когда

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C};$$

отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5-2)$$

Мгновенные значения энергии выражаются формулами:

$$w_L = \frac{Li^2}{2}; \quad w_C = \frac{Cu_C^2}{2}.$$

Если принять $i = I_m \sin \omega_0 t$, то $u_C = -U_{Cm} \cos \omega_0 t$. Поэтому

$$w_L = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

и

$$w_C = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

Максимальные значения этих энергий равны друг другу, так как

$$\frac{CU_{Cm}^2}{2} = \frac{C}{2} \left(\frac{I_m}{\omega_0 C} \right)^2 = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Это следует и из того, что реактивное сопротивление цепи, содержащей индуктивность и емкость, при любой схеме соединений пропорционально разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитном и электрическом полях (см. § 3-4):

$$x = \frac{\omega}{I^2} (W_{L \text{ макс}} - W_{C \text{ макс}}).$$

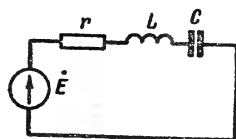


Рис. 5-1. Последовательный колебательный контур.

Поэтому условию резонанса ($x=0$) соответствует равенство

$$W_{L \text{ макс}} = W_{C \text{ макс}}.$$

Мгновенные значения w_L и w_C колеблются с удвоенной частотой около среднего значения $LI_m^2/4$, причем происходит непрерывное перераспределение энергии магнитного и электрического полей, суммарное значение которой постоянно:

$$w_L + w_C = \frac{LI_m^2}{2} [\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t] = \frac{LI_m^2}{2}.$$

В рассматриваемом случае (резонанс напряжений, рис. 5-1) в цепи не происходит обмена энергии между источником и реактивными элементами цепи, а вся электрическая энергия, поступающая от источника, расходуется в сопротивлении r .

Мы уже встречались с понятием добротности индуктивной катушки $Q_L = \omega L/r$ (см. § 2-7) и конденсатора $Q_C = \omega C r$ (§ 2-8). Умножив и разделив выражение для Q_L на $\frac{1}{2} I_m^2$, получим:

$$Q_L = \omega \frac{\frac{1}{2} LI_m^2}{\frac{1}{2} r I_m^2} = 2\pi \frac{W_{L \text{ макс}}}{PT}.$$

Здесь $W_{L \text{ макс}}$ — максимум энергии, периодически запасаемой индуктивностью L ; P — средняя мощность, расходуемая в сопротивлении при амплитуде тока I_m .

Аналогично рассуждая, т. е. умножив и разделив выражение Q_C на $\frac{1}{2} U_m^2$, получим:

$$Q_C = \omega \frac{\frac{1}{2} C U_m^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{U_m^2}{r}} = 2\pi \frac{W_{C \text{ макс}}}{PT},$$

где $W_{C \text{ макс}}$ — максимум энергии, периодически запасаемой емкостью C , а P — средняя мощность потерь в параллельном сопротивлении r при амплитуде напряжения на емкости U_m . Следовательно, в обоих случаях добротность определяется в зависимости от отношения макси-

му энергии реактивного элемента к энергии P_T , выделяемой в виде тепла за период.

В случае резонансной цепи также пользуются понятием добротности цепи, подразумевая под этим в общем случае величину

$$Q = \omega_0 \frac{\Sigma W_{\text{макс}}}{P}; \quad (5-3)$$

здесь ω_0 резонансная частота; $\Sigma W_{\text{макс}}$ — сумма максимальных значений энергии, периодически запасаемой при резонансе в индуктивных (или емкостных) элементах; P — активная мощность на зажимах цепи при резонансе.

Знак Σ в (5-3) относится к случаю, когда число индуктивных (или емкостных) элементов превышает единицу. В рассматриваемом нами случае резонанса напряжений в цепи рис. 5-1 знак Σ опускается.

Для схемы рис. 5-1 на основании (5-3) получаем:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\rho}{r}, \quad (5-4)$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

называется характеристическим (а также волновым) сопротивлением резонансного контура.

Условимся называть относительной расстройкой частоты по отношению к резонансной частоте контура величину¹

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1. \quad (5-5)$$

Сопротивление контура согласно (5-1) и с учетом (5-2) и (5-4)

$$Z = r \left[1 + j \frac{\omega_0 L}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \right) \right] = r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right],$$

¹ Следует обратить внимание на то, что частотам выше резонансной ($\omega > \omega_0$) соответствуют положительные значения расстройки δ , а частотам ниже резонансной ($\omega < \omega_0$) — отрицательные значения δ ; нулевой частоте ($\omega = 0$) соответствует $\delta = -1$; при резонансной частоте $\delta = 0$.

откуда, используя (5-5), $\frac{\omega}{\omega_0} = \delta + 1$ или $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{\delta + 1}$, получаем:

$$Z = r \left[1 + jQ \left(\delta + 1 - \frac{1}{\delta + 1} \right) \right] = r \left(1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right). \quad (5-6)$$

Следовательно, полное сопротивление цепи

$$z = r \sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left(\frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}$$

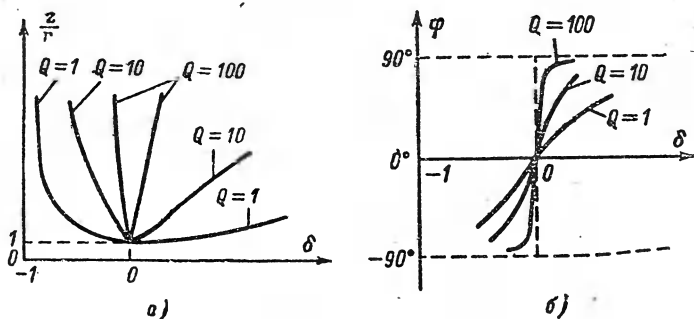


Рис. 5-2. Частотные зависимости сопротивления (а) и угла (б)..

и угол

$$\varphi = \arctg \frac{Q\delta(\delta + 2)}{\delta + 1}.$$

Ток в цепи

$$i = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{r \left(1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)}.$$

При частоте, близкой к резонансной, величина δ значительно меньше единицы, и поэтому приближенно

$$\left. \begin{aligned} Z &\approx r(1 + j2Q\delta) = r \sqrt{1 + (2Q\delta)^2} < \varphi; \\ \varphi &\approx \arctg 2Q\delta; \\ i &\approx \frac{\dot{E}}{r(1 + j2Q\delta)}. \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

Выражения (5-7) практически достаточно точны при $|\delta| < 0,1$. При $|\delta| = 0,2$ погрешность в сопротивлении z меньше 10%.

На рис. 5-2 кривые даны в относительных единицах: по оси абсцисс отложена относительная расстройка частоты δ , по оси ординат — отношение полного сопротивления z к активному сопротивлению r (рис. 5-2, а) и угол ϕ (рис. 5-2, б).

Полное сопротивление цепи минимально при резонансе напряжений; при этом ток в цепи достигает своего максимального значения I_0 .

На рис. 5-3 изображены резонансные кривые тока в относительных единицах: по оси абсцисс, как и на предыдущих графиках, отложены значения δ , по оси ординат — отношения токов к максимальному току при резонансе:

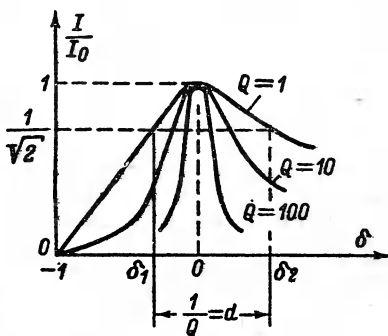


Рис. 5-3. Резонансные кривые тока в относительных единицах.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E}{z} : \frac{E}{r} = \frac{r}{z} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left(\frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}}. \quad (5-8)$$

Чем выше добротность цепи Q , тем острее резонансные кривые. Таким образом, величина Q характеризует остроту резонансной кривой («остроту настройки»); согласно (5-3) чем больше отношение максимума энергии поля реактивного элемента к тепловой энергии, рассеиваемой за один период в резонансном контуре, тем острее резонансная кривая.

Резонансные кривые были построены здесь в зависимости от относительной расстройки частоты δ . Можно вывести расчетные выражения и построить резонансные кривые в зависимости от ω или относительной частоты ω/ω_0 . Следует заметить, что максимумы резонансных кривых на рис. 5-3 равны, так как по оси ординат отложено отношение I/I_0 . Если откладывать ток I , то при разных

r максимумы резонансных кривых, естественно, не совпадут в одной точке.

Полосу частот вблизи резонанса, на границах которой ток снижается до $1/\sqrt{2} = 0,707$ максимального (резонансного) значения I_0 , принято называть полосой пропускания резонансного контура. При токе $I = I_0/\sqrt{2}$ мощность, расходуемая в сопротивлении r , равна:

$$r \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} r I_0^2,$$

т. е. составляет половину мощности, расходуемой при резонансе. Поэтому полосу пропускания характеризуют как полосу, границы которой соответствуют половине максимальной мощности. На границах полосы пропускания резонансного контура активное и реактивное сопротивление равны по величине $r_2 = |x|$. Это следует из условия

$$r \frac{E^2}{r^2 + x^2} = \frac{1}{2} r \frac{E^2}{r^2}, \text{ что дает } r^2 + x^2 = 2r^2.$$

Соответственно и фазовый сдвиг между напряжением на зажимах цепи и током составляет 45° ; на нижней границе комплексное сопротивление цепи имеет емкостный характер (ток опережает напряжение) и $\varphi = -45^\circ$; на верхней границе комплексное сопротивление цепи имеет индуктивный характер (ток отстает от напряжения) и $\varphi = 45^\circ$.

На основании (5-8) условие для границы полосы пропускания записывается в следующем виде:

$$\sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left(\frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2} = \sqrt{2},$$

или

$$Q\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} = \mp 1,$$

откуда

$$\delta_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (5-9)$$

(знак минус перед корнем, получающийся в результате решения квадратного уравнения, опускается, как не имеющий смысла). Индексы 1 и 2 и соответственно знаки минус и плюс в выражении (5-9) относятся к границам ниже и выше резонанса.

По определению полоса пропускания резонансного контура находится из условия

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{Q}$$

или

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d. \quad (5-10)$$

Величина d , обратная добротности контура, называется затуханием контура.

При достаточно высокой добротности резонансного контура ($Q \gg 1$) подкоренное выражение (5-9) может быть приравнено единице, откуда $\delta_{1,2} \approx \pm \frac{1}{2Q}$; т. е. полоса пропускания практически симметрична относительно резонансной частоты.

В радиотехнических устройствах к одному из реактивных элементов колебательного контура, например емкости, подключается нагрузка в виде сопротивления r_n . Вследствие этого возрастают потери в цепи и соответственно уменьшается добротность. Для определения добротности нагруженного контура параллельное соединение r_n и C может быть заменено эквивалентным при резонансной частоте последовательным соединением емкости и «вносимого сопротивления» $r_{вн}$. С этой целью используются условия эквивалентности цепей с последовательным и параллельным соединениями (см. § 4-3).

Так как обычно $\omega_0 C r_n \gg 1$, то $r_{вн} \approx \frac{1}{r_n (\omega_0 C)^2}$. С учетом того, что $\frac{1}{\omega_0 C} = \rho$, получаем: $r_{вн} \approx \rho^2 / r_n$. При этом, как отмечалось в конце § 4-3, емкости эквивалентных схем могут быть практически приравнены друг другу.

Таким образом, добротность нагруженного контура равна:

$$Q_n = \frac{\rho}{r + r_{вн}} \approx \frac{\rho}{r + \frac{\rho^2}{r_n}},$$

а затухание увеличивается на величину вносимого затухания $d_{вн}$:

$$d_n = \frac{1}{Q_n} \approx \frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r_n} = d + d_{вн}.$$

Если вносимое сопротивление $r_{вн}$ значительно превышает сопротивление r , то

$$Q_n \approx \frac{r_n}{\rho}; \quad d_n \approx \frac{\rho}{r_n} = d_{вн}.$$

Внутреннее сопротивление источника напряжения R_i , добавляемое к сопротивлению r , влияет на добротность и полосу пропускания колебательного контура: чем больше R_i , тем ниже добротность и шире полоса пропускания контура. Поэтому с точки зрения сокращения полосы пропускания последовательно-колебательного контура *выгоден источник напряжения с малым внутренним сопротивлением*.

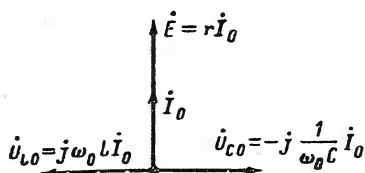


Рис. 5-4. Векторная диаграмма при резонансе напряжений.

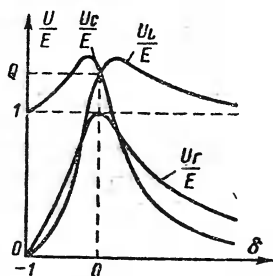


Рис. 5-5. Частотные зависимости напряжений на индуктивности и емкости в относительных единицах.

В условиях, близких к резонансу, напряжения на индуктивности и емкости могут быть весьма велики, что необходимо учитывать во избежание повреждения изоляции.

На рис. 5-4 показана векторная диаграмма тока и напряжений при резонансе. Напряжения на реактивных элементах при резонансе определяются из выражения

$$\dot{U}_{L0} = -\dot{U}_{C0} = \frac{\dot{E}}{r} j\omega_0 L = j\dot{E}Q. \quad (5-11)$$

При $Q > 1$ эти напряжения превышают по величине напряжение $U=E$, приложенное к резонансному контуру. Однако значения, получаемые на основании (5-11), не являются максимальными: максимум напряжения U_L располагается несколько выше (правее), а максимум U_C — ниже (левее) резонансной частоты (рис. 5-5).

Напряжение на индуктивности $U_L = \omega LI$, равное нулю при $\omega=0$, с увеличением ω может возрастать только до тех пор, пока ток не начнет снижаться быстрее, чем возрастает ω . После этого U_L спадает, стремясь в пределе к E . Напряжение на емкости $U_C = \frac{1}{\omega C} I$, равное при

$\omega=0$ приложенному напряжению $U=E$, увеличивается, пока ток растет быстрее, чем ω ; затем U_C спадает, стремясь в пределе к нулю. Кривые U_L и U_C пересекаются при резонансе, причем ордината точки пересечения в соответствии с (5-11) равна QE .

Это также вытекает из анализа следующих ниже выражений, полученных с учетом (5-5) и (5-6):

$$\dot{U}_L = \dot{E} \frac{j\omega L}{Z} = \dot{E} \frac{jQ(\delta+1)}{1+jQ\delta \frac{\delta+2}{\delta+1}}$$

и

$$\dot{U}_C = \dot{E} \frac{-j \frac{1}{\omega C}}{Z} = \dot{E} \frac{-j \frac{Q}{\delta+1}}{1+jQ\delta \frac{\delta+2}{\delta+1}}.$$

Напряжение U_L достигает максимума при

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} - 1,$$

а напряжение U_C — при¹

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} - 1.$$

Пренебрегая δ по сравнению с единицей, получаем приближенную формулу

$$\dot{U}_L \approx -\dot{U}_C \approx \dot{E} \frac{jQ}{1+j2Q\delta}. \quad (5-12)$$

Возвращаясь к определению понятия добротности рассматриваемой резонансной цепи, мы видим, что наряду с формулами (5-3) и (5-4) добротность цепи характеризуется выражениями (5-10) и (5-11), а именно:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}; \quad Q = \frac{U_{L0}}{E} = \frac{U_{C0}}{E}.$$

¹ Следует отметить, что при $Q \leq 1/\sqrt{2}$ максимум функции U_L наступает при $\delta = \infty$, т. е. в этом случае U_L с ростом частоты непрерывно стремится к значению приложенного напряжения $U=E$; максимум же функции U_C в рассматриваемом случае имеет место при $\delta = -1$, т. е. при нулевой частоте ($\omega=0$), когда $U_C = E$.

Последняя формула показывает, что добротность рассматриваемой цепи определяется как кратность перенапряжения на L и C при резонансной частоте.

Выше была рассмотрена неразветвленная электрическая цепь с последовательно соединенными r , L и C . Для исследования явления резонанса в более сложных разветвленных цепях, где резонанс напряжений может возникать на одной или нескольких частотах, наряду с аналитическим методом расчета, иллюстрированным выше, целесообразно также пользоваться методом геометрических мест (см. гл. 6).

5-3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. РЕЗОНАНС ТОКОВ

Явление резонанса токов удобно изучать применительно к электрической цепи с параллельно соединенными r , L и C (рис. 5-6), так как при этом можно непосредственно воспользоваться результатами, полученными в предыдущем параграфе.

Действительно, комплексная проводимость такой цепи

$$Y = g - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \quad (5-13)$$

по своей структуре аналогична выражению (5-1), причем резонансная частота определяется согласно (5-2).

Добротность резонансной цепи на основании (5-3)

$$Q = \omega_0 \frac{CU_m^2}{2 \frac{U^2}{r}} = \omega_0 Cr = \frac{r}{\rho}.$$

По аналогии с предыдущим выражение (5-13) приводится к виду:

$$Y = g \left(1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right).$$

Сравнивая полученный результат с (5-6), убеждаемся в том, что выражение Y/g для схемы рис. 5-6 имеет тот же вид, что и выражение Z/r для схемы рис. 5-1.

Поэтому кривые рис. 5-2 применимы и в данном случае: кривые рис. 5-2, а выражают зависимость от δ отношения y/g , а кривые рис. 5-2, б — зависимость угла $-\varphi$ от δ .

Кривые рис. 5-2, а показывают, что при резонансе токов полная проводимость цепи минимальна, т. е. входное сопротивление достигает максимума.

При заданном напряжении $\dot{U}$ на зажимах цепи ток, идущий от источника в цепь, равен:

$$\dot{I} = Y\dot{U} = g\dot{U} \left(1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right).$$

Величина этого тока достигает минимума при резонансной частоте, так как при этом

$$\dot{I}_0 = g\dot{U}.$$

Следовательно, отношение величин токов I_0 и I определяется из выражения

$$\frac{I_0}{I} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\delta^2 \left(\frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}};$$

правая часть которого полностью совпадает с (5-8).

В связи с этим резонансные кривые рис. 5-3 выражают применительно к схеме рис. 5-6 зависимость I_0/I от δ .

В случае резонанса токов токи в индуктивном и емкостном элементах схемы рис. 5-6 равны по величине и противоположны по знаку:

$$\dot{I}_{C0} = -\dot{I}_{L0} = j\omega_0 C\dot{U} = j\dot{I}_0 Q.$$

Полученное выражение показывает, что добротность рассматриваемой цепи определяется как кратность токов в L и C по отношению к суммарному току I_0 .

При $Q > 1$ эти токи превышают по величине I_0 .

Если параллельный колебательный контур питается от источника тока с внутренним сопротивлением R_i , то чем меньше сопротивление R_i , присоединяемое параллельно сопротивлению r , тем ниже добротность и шире полоса пропускания контура. Поэтому в отличие от последовательного колебательного контура с точки зрения сокращения полосы пропускания параллельного колебательного контура *выгоден источник тока с большим внутренним сопротивлением.*

Для схемы рис. 5-6 при резонансе токов остается в силе вывод, сделанный в предыдущем параграфе о непрерывном обмене энергией между индуктивным и емкостным элементами при резонансе напряжений.

Схема рис. 5-6 является идеализированной, так как она не учитывает активных потерь в ветвях L и C . Поэтому рассмотрим другие схемы, приняв во внимание активные сопротивления в ветвях L и C (рис. 5-7, a и b).

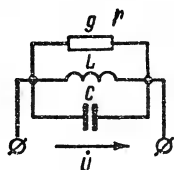


Рис. 5-6. Параллельный колебательный контур.

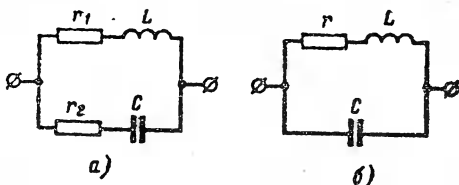


Рис. 5-7. Колебательные контуры с двумя параллельными ветвями.

Условие резонанса токов для схемы рис. 5-7, a записывается в виде равенства реактивных проводимостей:

$$\frac{\omega_0 L}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}, \quad (5-14)$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}}. \quad (5-15)$$

Явление резонанса возможно при этом только в случае, если подкоренное выражение (5-15) имеет положительный знак или, что то же, величины $\frac{L}{C} - r_1^2$ и $\frac{L}{C} - r_2^2$ имеют одинаковый знак. Если $r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, то цепь резонирует на любой частоте.

На рис. 5-8 показана векторная диаграмма при резонансе токов в цепи рис. 5-7, a . Токи в индуктивной и емкостной ветвях складываются из активных (I_{La} , I_{Ca}) и реактивных (I_{Lp} , I_{Cp}) составляющих, причем

$$I_{Lp} = -I_{Cp}; \quad I_{La} + I_{Ca} = I_0.$$

Чем меньше r_1 и r_2 по сравнению с $\omega_0 L$ и $\frac{1}{\omega_0 C}$, тем ближе к 180° угол фазового сдвига между I_{L0} и I_{C0} ; при этом токи в ветвях образуют как бы один контурный ток $I_K \approx I_{L0} \approx I_{C0}$, замыкающийся в колебательном контуре.

При резонансе вся цепь имеет только активную проводимость

$$Y_0 = g_0 = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2},$$

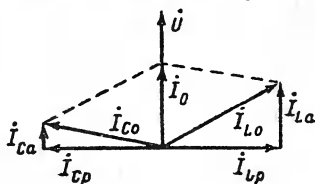


Рис. 5-8. Векторная диаграмма при резонансе токов.

откуда с учетом (5-14)

$$Y_0 = \frac{r_1 + r_2 \omega_0^2 LC}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2}.$$

Для колебательного контура с малыми потерями можно пренебречь слагаемым r_1^2 по сравнению с $(\omega_0 L)^2$ и считать, что $\omega_0^2 LC \approx 1$. При этом проводимость колебательного контура приблизительно выразится формулой, широко распространенной в практике радиотехнических расчетов:

$$Y_0 \approx \frac{r_1 + r_2}{(\omega_0 L)^2} \approx \frac{(r_1 + r_2) C}{L}.$$

При $r_1 = r_2 = r$ согласно (5-15)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ и } Y_0 = g_0 = \frac{2r}{r^2 + \frac{L}{C}}.$$

Кроме того, если $r = \sqrt{\frac{L}{C}}$, то $Y = \sqrt{\frac{C}{L}}$, при любой частоте (резонанс в такой цепи называют «безразличным» резонансом).

Легко убедиться в том, что и в случае резонансной цепи с двумя параллельными ветвями (см. рис. 5-7) соблюдается условие $W_{L\max} = W_{C\max}$. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (5-14) на $\frac{1}{2\omega_0} U_m^2$.

Выше отмечалось, что в схеме с параллельно соединенными r , L и C (см. рис. 5-6) полная проводимость всей цепи имеет минимум при резонансной частоте.

Для схемы рис. 5-7, б нетрудно показать, что при изменении частоты ω или индуктивности L минимум полной проводимости цепи, а также минимум общего тока наступают не при резонансной частоте. В том же случае, когда переменным параметром является емкость C , проводимость и общий ток достигают минимума при резонансе токов [Л. 2].

Добротность параллельного колебательного контура рис. 5-7, а на основании (5-3) равна:

$$Q = \omega_0 \frac{W_{L\text{макс}}}{P} = \frac{\omega_0 L U_m^2}{2z_1^2 g_0 U^2} = \frac{\omega_0 L}{z_1^2 g_0},$$

но

$$g_0 = \frac{r_1}{z_1^2} + \frac{r_2}{z_2^2} = \frac{r_1 + r_2 \omega_0^2 LC}{z_1^2},$$

откуда

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r_1 + r_2 \omega_0^2 LC},$$

где резонансная частота ω_0 определяется по формуле (5-15).

Часто в ветви с емкостью сопротивлением r_2 можно пренебречь. Тогда формулы значительно упрощаются.

Рассмотрим этот случай (см. рис. 5-7, б).

Резонансная частота такого контура согласно (5-15)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}, \quad (5-16)$$

а добротность цепи в соответствии с полученным выше выражением

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r}. \quad (5-17)$$

Из сопоставления (5-16) и (5-2) видно, что при одних и тех же параметрах r , L и C резонансные частоты для схем рис. 5-1 и 5-7, б отличаются множителем

$$\sqrt{1 - (r/\rho)^2}.$$

При $r/\rho < 0,1$ разность резонансных частот не превышает 1%. Кроме того, выражение (5-16) показывает, что резонанс токов возможен в схеме рис. 5-7, б только при $r/\rho < 1$.

Общее сопротивление колебательного контура (см. рис. 5-7, б).

$$Z = \frac{(r + j\omega L) \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{L}{rC} \frac{1 - j \frac{r}{\omega L}}{1 + j \frac{\omega L}{r} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}.$$

На основании соотношений (5-16) и (5-17) можно получить:

$$\left(\frac{\rho}{r} \right)^2 = \frac{L}{Cr^2} = 1 + Q^2.$$

Учитывая также соотношения

$$\frac{r}{\omega L} = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{r}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q(\delta + 1)};$$

$$\frac{1}{\omega^2 LC} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \omega_0^2 LC} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) (\delta + 1)^2} = \frac{1 + Q^2}{Q^2 (\delta + 1)^2},$$

получаем выражение для сопротивления колебательного контура:

$$Z = \frac{r(1 + Q^2) \left[1 - j \frac{1}{Q(\delta + 1)} \right]}{1 + jQ(\delta + 1) \left[1 - \frac{1 + Q^2}{Q^2 (\delta + 1)^2} \right]}. \quad (5-18)$$

При резонансной частоте ($\delta=0$) $Z_0=r(1+Q^2)$.

В тех случаях, когда величина Q^2 весьма велика по сравнению с единицей, выражение (5-18) упрощается:

$$Z \approx rQ^2 \frac{1 - j \frac{1}{Q(\delta + 1)}}{1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1}}.$$

В режиме, близком к резонансу, когда δ несоизмеримо меньше единицы, данное выражение заменяется приближенным:

$$Z \approx rQ^2 \frac{1 - j \frac{1}{Q}}{1 + j2Q\delta}.$$

При высокой добротности колебательного контура

$$Z \approx \frac{rQ^2}{1 + j2Q\delta}.$$

При этом токи в ветвях:

$$\left. \begin{aligned} i_L &= \frac{Z}{r + j\omega L} i \approx -i \frac{jQ}{1 + j2Q\delta}; \\ i_C &= j\omega CZ i \approx i \frac{jQ}{1 + j2Q\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

Здесь i — ток, входящий в цепь.

Напряжение на зажимах цепи $\dot{U}$ связано с током i следующим образом:

$$\dot{U} = Zi \approx i \frac{rQ^2}{1 + j2Q\delta}. \quad (5-20)$$

Приближенные выражения (5-19) и (5-20) аналогичны при заданном Q выражениям (5-12) и (5-7), выведенным для цепи рис. 5-1, при условии замены напряжений токами и обратно. Поэтому кривые сопротивлений, токов и напряжений, соответствующие схеме рис. 5-1, в известном масштабе приближенно выражают проводимости, напряжения и токи в схеме рис. 5-7, б.

Следует обратить внимание на то, что в схеме рис. 5-6 мгновенная мощность на зажимах цепи при резонансе токов равна мгновенной мощности, расходуемой в сопротивлении r , в схемах с двумя параллельными ветвями (рис. 5-7) мгновенная мощность на зажимах цепи отлична от мгновенной мощности, расходуемой в сопротивлениях ветвей. Например, в тот момент, когда ток, входящий в цепь, проходит через нулевое значение, мгновенная мощность на зажимах цепи равна нулю; в этот момент токи в ветвях, сдвинутые по фазе относительно суммарного тока цепи, отличны от нуля и поэтому мгновенная мощность, расходуемая в сопротивлениях ветвей, также не равна нулю. Объясняется это тем, что в схемах рис. 5-7, а и б энергия, накапливаемая реактивными элементами, периодически преобразуется частично в тепловую энергию (в сопротивлениях ветвей), а затем вновь пополняется за счет энергии источника.

Для повышения крутизны резонансных характеристик, необходимой для более четкого разделения колебаний разных частот, в радиотехнике широко применяются двухконтурные резонансные цепи: два резонансных контура, настроенных каждый в отдельности на одну и ту же частоту, связываются индуктивно или электрически. В отличие от «одногогорбой» резонансной кривой одиночного контура в связанных цепях получаются «двугорбые» кривые; например, ток в каждом контуре может иметь максимумы при двух частотах, расположенных ниже и выше резонансной частоты одиночного контура (см. § 8-9—8-11).

Индуктивно связанные резонансные контуры как фильтрующая система рассмотрены в § 10-5.

5-4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Двухполусником называется любая электрическая цепь или часть электрической цепи, имеющая два вывода. Ниже рассматриваются только линейные двухполусники, т. е. такие, которые состоят из линейных элементов.

Различают двухполусники активные и пассивные.

Активным называется двухполусник, содержащий источники электрической энергии, которые не компенсируются взаимно внутри двухполусника.

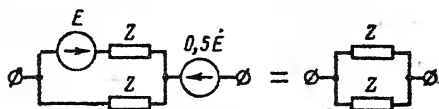


Рис. 5-9. Двухполусник, внутренние источники которого взаимно компенсированы.

Пассивным называется двухполусник, не содержащий источников электрической энергии; в случае линейного двухполусника он может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующие таким образом, что напряжение на его разомкнутых зажимах равно нулю. Такой линейный двухполусник относится к категории пассивных; его сопротивление, измеренное на зажимах, не изменится, если источники электрической энергии внутри него заменить пассивными элементами — внутренними сопротивлениями источников напряжения или соответственно внутренними проводимостями источников тока. Пример двухполусника, содержащего компенсированные источники, показан на рис. 5-9.

По числу элементов, входящих в двухполусник, различают одноэлементный, двухэлементный и многоэлементный двухполусники.

По характеру этих элементов двухполусники делятся на реактивные, т. е. состоящие из индуктивностей и емкостей, и двухполусники с потерями, содержащие активные сопротивления. Реактивные двухполусники представляют собой идеализированные электрические системы, приближающиеся по своим свойствам к физически существующим цепям с малыми потерями.

Частотные характеристики сопротивлений или проводимостей двухполюсников, образующих электрическую цепь, определяют частотные и резонансные свойства цепи, т. е. зависимости амплитуд и фаз токов и напряжений от частоты.

Настоящий параграф посвящен изучению частотных характеристик пассивных реактивных двухполюсников.

Одноэлементные реактивные двухполюсники

Индуктивность и емкость представляют собой простейшие одноэлементные реактивные двухполюсники. Знак комплексного сопротивления и комплексной проводимости каждого из этих двухполюсников не зависит от частоты; этим они существенно отличаются от других, более сложных реактивных двухполюсников, содержащих неоднородные реактивные элементы, т. е. индуктивности и емкость в разных сочетаниях.

Комплексное сопротивление индуктивного элемента во всем спектре частот имеет положительный знак, а комплексная проводимость — отрицательный:

$$Z_L = jx_L = j\omega L; \quad Y_L = -jb_L = -j \frac{1}{\omega L}.$$

Комплексное сопротивление емкостного элемента во всем спектре частот имеет отрицательный знак, а комплексная проводимость — положительный:

$$Z_C = -jx_C = -j \frac{1}{\omega C}; \quad Y_C = jb_C = j\omega C.$$

В рассматриваемом случае реактивных двухполюсников комплексные сопротивления и проводимости являются мнимыми. Поэтому для сохранения знаков частотные характеристики сопротивлений и проводимостей удобно рисовать в прямоугольной системе координат, в которой вверх откладываются мнимые величины со знаком плюс, а вниз — со знаком минус.

Частотные характеристики Z_L и Y_C , построенные в прямоугольной системе координат, представляют собой прямые линии, а частотные характеристики Z_C и Y_L — равнобочные гиперболы (рис. 5-10). Таким образом, кривые Z_L и Z_C аналогичны кривым Y_C и Y_L .

Следует заметить, что как сопротивления, так и проводимости рассматриваемых здесь одноэлементных реак-

тивных двухполюсников возрастают (с учетом знака) по мере повышения частоты, т. е.

$$\frac{dZ}{jd\omega} > 0; \quad \frac{dY}{jd\omega} > 0.$$

Это является общим свойством всех реактивных двухполюсников, а не только одноэлементных.

Двухполюсник, состоящий из последовательно или параллельно соединенных однородных элементов (индук-

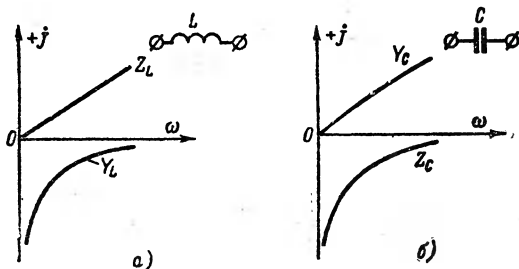


Рис. 5-10. Частотные характеристики индуктивного (а) и емкостного (б) элементов.

тивностей или емкостей), относится к числу одноэлементных двухполюсников, так как последовательно или параллельно соединенные однородные элементы могут быть заменены одним эквивалентным реактивным элементом того же характера.

Двухэлементные реактивные двухполюсники

Двухэлементные двухполюсники, составленные из индуктивности и емкости, представляют собой простейшие резонансные цепи.

При последовательном соединении индуктивности и емкости алгебраически складываются комплексные сопротивления. На рис. 5-11, а жирной линией показана частотная характеристика двухполюсника, полученная в результате графического сложения кривых Z_L и Z_C . Она пересекает ось абсцисс при резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (резонанс напряжений). Эта частота, при которой функция $Z = Z_L + Z_C$ обращается в нуль, называется нулем данной функции; точка на оси абсцисс, которая соответствует нулю функции, обозначается кружком.

Частотная характеристика проводимости того же двухполюсника представляет собой функцию, обратную сопротивлению: $Y = 1/Z$.

Кривая Y показана на рис. 5-11, б.

При резонансной частоте проводимость рассматриваемого двухполюсника обращается в бесконечность; эта точка носит название полюса функции Y и обозначается на чертеже крестиком.

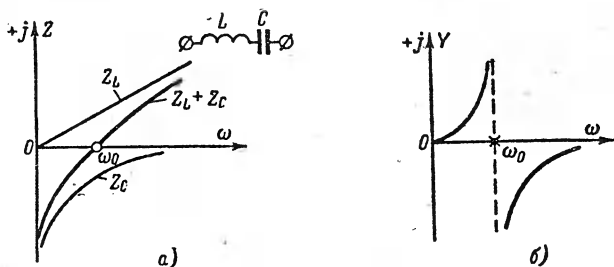


Рис. 5-11. Частотные характеристики двухэлементного двухполюсника с последовательно соединенными индуктивностью и емкостью.

Частотные характеристики Z и Y , построенные таким образом, соответствуют уравнениям:

$$Z = jx = j(x_L - x_C) = jL \left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right)$$

и

$$Y = -jb = -j \frac{1}{L \left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right)},$$

или с учетом (5-2):

$$\left. \begin{aligned} x &= L \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}; \\ b &= \frac{\omega}{L (\omega^2 - \omega_0^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

В области частот ниже резонансной ($\omega < \omega_0$) сопротивление емкостного элемента превышает по абсолютной

величине сопротивление индуктивного элемента; при этом сопротивление двухполюсника имеет емкостный характер.

В области частот выше резонансной ($\omega > \omega_0$) абсолютная величина емкостного сопротивления меньше величины индуктивного; сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер.

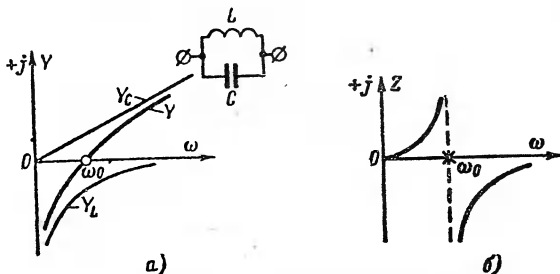


Рис. 5-12. Частотные характеристики двухэлементного двухполюсника с параллельно соединенными индуктивностью и емкостью.

При параллельном соединении индуктивности и емкости алгебраически складываются их комплексные проводимости. На рис. 5-12, а жирной линией показана частотная характеристика двухполюсника, полученная в результате графического сложения Y_L и Y_C .

Частотная характеристика сопротивления того же двухполюсника представляет собой функцию, обратную проводимости: $Z = 1/Y$. Кривая Z показана на рис. 5-12, б.

Частота, при которой характеристика Y пересекает ось абсцисс (нуль функции Y), а характеристика Z уходит в бесконечность (полюс функции Z), является резонансной частотой (резонанс токов).

Частотные характеристики, построенные на рис. 5-12, соответствуют уравнениям:

$$Y = -jb = -j(b_L - b_C) = -j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = -jC\left(\frac{1}{\omega LC} - \omega\right)$$

и

$$Z = jx = j \frac{1}{C\left(\frac{1}{\omega LC} - \omega\right)}$$

или с учетом (5-2):

$$\left. \begin{aligned} b &= C \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}; \\ x &= \frac{\omega}{C (\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

В области частот ниже резонансной проводимость индуктивного элемента перекompенсирует проводимость емкостного элемента и сопротивление двухполюсника получается индуктивным. В области частот выше резонансной наблюдается обратное явление и сопротивление двухполюсника имеет емкостный характер.

Таким образом, в зависимости от частоты двухэлементный реактивный двухполюсник может иметь либо индуктивное, либо емкостное сопротивление. При этом, так же как и в случае одноэлементного реактивного двухполюсника, кривые Z и Y возрастают, т. е. производные от Z/j и Y/j по частоте положительны.

В отличие от сопротивлений одноэлементных двухполюсников, которые выражаются только через текущую частоту, сопротивления двухэлементных реактивных двухполюсников зависят также и от разности квадратов резонансной и текущей частот [формула (5-21) и формула (5-22)].

Как видно из выражений (5-21), для построения частотных характеристик двухполюсника, состоящего из последовательно соединенных элементов L и C , достаточно знать нуль функции Z или, что то же, полюс функции Y . Параметр L , входящий в (5-21), влияет только на выбор масштаба Z и Y по оси ординат.

Аналогично в соответствии с (5-22) для построения частотных характеристик двухполюсника, состоящего из параллельно соединенных элементов L и C , достаточно знать полюс Z или, что то же, нуль Y , причем параметр C влияет только на масштаб Z и Y .

Двухполюсники, имеющие одинаковые частотные характеристики Z или Y , эквивалентны.

Многоэлементный реактивный двухполюсник

Многоэлементный реактивный двухполюсник может быть получен в результате различных сочетаний одноэлементных и двухэлементных двухполюсников. Поль-

зуюсь частотными характеристиками, приведенными выше, можно построить частотные характеристики для трех-, четырех- и многоэлементных реактивных двухполюсников. При этом однородные элементы (или группы элементов с одинаковыми резонансными частотами), сое-

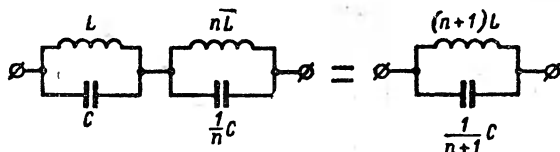


Рис. 5-13. Пример приведения схемы к двухэлементному двухполюснику.

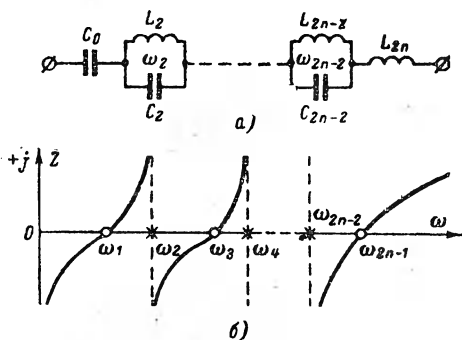


Рис. 5-14. Схема (а) и частотная характеристика (б) многоэлементного двухполюсника.

диненные параллельно или последовательно, должны быть сначала заменены одним элементом (или эквивалентной группой элементов, как это, например, показано на рис. 5-13).

Такие двухполюсники будем называть «приведенными».

Из свойства положительности производной $dZ/jd\omega$ (или $dY/jd\omega$) следует, что нули и полюсы функций Z (или Y) должны чередоваться, так как при наличии двух последовательных нулей, не разделенных полюсом, имелся бы участок характеристики с отрицательной производной.

В общем случае, если при $\omega=0$ сопротивление реактивного двухполюсника равно нулю, т. е. имеется путь для постоянного тока, то первым наступает резонанс токов, за ним следует резонанс напряжений и т. д.

В противном случае порядок расположения резонансов обратный: первым наступает резонанс напряжений, вторым — резонанс токов и т. д.

На рис. 5-14, *а* дана схема многоэлементного двухполюсника, а на рис. 5-14, *б* — соответствующая ему частотная характеристика сопротивления.

У реактивных двухполюсников сумма полюсов и нулей (не считая точек $\omega=0$ и $\omega=\infty$) на единицу меньше числа элементов данного «приведенного» двухполюсника.

Расположение нулей и полюсов, как указывалось выше, поочередное, а все ветви частотной характеристики с увеличением ω возрастают.

5-5. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

5-1. В цепи с последовательно соединенными r , L и C наступает резонанс напряжений при угловой частоте 500 рад/сек ; $r=34 \text{ ом}$; $L=400 \text{ мГн}$; напряжение на зажимах цепи $\dot{U}=120 \angle 0^\circ \text{ в}$. Определить C и мгновенные значения тока и напряжений на элементах цепи; построить векторную диаграмму.

Ответ: 10 мкФ : $5 \sin 500t \text{ а}$; $170 \sin 500t \text{ в}$; $1000 \sin (500t \pm \pi/2) \text{ в}$.

5-2. Цепь состоит из индуктивной катушки (r , L) и емкости, соединенных последовательно. Напряжение на зажимах цепи равно 120 в . Определить напряжение на катушке при резонансе, если при этом напряжение на емкости равно 208 в .

Ответ: 240 в .

5-3. Вычислить резонансную частоту и частоты, при которых напряжения на L и C максимальны в цепи с последовательно соединенными $r=50 \text{ ом}$, $L=10 \text{ мГн}$ и $C=1 \text{ мкФ}$.

Ответ: 10000 ; 10700 ; 9350 рад/сек .

5-4. Вычислить резонансную частоту и добротность контура, состоящего из последовательно соединенных $r=5,1 \text{ ом}$; $L=65 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$; $C=1,56 \cdot 10^{-9} \text{ ф}$. Определить сопротивление цепи при частоте, превышающей резонансную на 1% .

Ответ: $5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$; 40 ; $6,53 \angle 38^\circ 35' \text{ ом}$.

5-5. Резонанс напряжений в контуре r , L , C наступает при частоте 1 МГц . Полоса пропускания резонансного контура равна 5000 Гц ; сопротивление цепи при резонансе 50 ом . Найти r , L и C .

Ответ: 50 ом ; $1,59 \text{ мГн}$; $15,9 \text{ нФ}$.

5-6. Резонанс напряжений в контуре r , L , C наступает при $1,5 \text{ МГц}$; добротность контура равна 250 . Вычислить частоты, соответствующие половинной мощности.

Ответ: $1,497$ и $1,503 \text{ МГц}$.

5-7. Последовательно с L включен участок цепи, состоящий из параллельно соединенных r и C . При 1000 Гц индуктивное и емкостное сопротивления элементов L и C равны каждое 100 ом ;

$r=200$ ом. Вычислить резонансную частоту и проводимость цепи при резонансе; пояснить явление резонанса в заданной цепи.

Ответ: 866 гц; 0,02 сим.

5-8. Если в цепи на рис. 5-7, б сопротивление r превысит определенное значение, то резонанс токов будет невозможен. Пояснить это физически и привести условие, при котором резонанс невозможен.

Ответ: $r \geq \sqrt{L/C}$.

5-9. Индуктивная катушка и последовательно соединенная с ней емкость питаются от источника синусоидальной э. д. с.; частота равна 1 кГц. Максимальное значение тока в цепи 1,1 а достигается при $C=10,4$ мкф; при этом напряжение на емкости в 11,1 раза превышает приложенное к цепи напряжение. Вычислить сопротивление и индуктивность катушки и напряжение на емкости при токе 1,1 а.

Ответ: 1,38 ом; 2,43 мГн; 16,9 в.

5-10. Контур, состоящий из $r=100$ ом, $L=10$ мГн и $C=1$ мкф, питается от источника переменной частоты. Найти наибольшее отношение напряжения на L (или C) к приложенному к контуру напряжению.

Ответ: 1,155.

5-11. Цепь состоит из $r=100$ ом; $L=10$ мГн и C , соединенных последовательно; угловая частота равна 10^4 рад/сек. При каком значении C напряжение на C максимально? Во сколько раз оно превышает приложенное к цепи напряжение?

Ответ: 0,5 мкф; 1,41.

5-12. Найти минимальное значение C , при котором наступит резонанс в цепи на рис. 5-7, а, если $r_1=10$ ом; $L=50$ мГн, $r_2=5$ ом; $f=50$ гц; определить сопротивление цепи при резонансе.

Ответ: 152 мкф; 25,2 ом.

5-13. Резонанс напряжений в контуре r , L , C наступает при 500 кГц. При этом сопротивление контура равно 75 ом; полоса пропускания равна 3 кГц. Найти L и C .

Ответ: 3,98 мГн; 25,4 пф.

5-14. Что такое приведенный реактивный двухполюсник?

5-15. Чем определяется число нулей и полюсов приведенного реактивного двухполюсника, а также их последовательность на характеристике?

5-16. Разобрать резонансные явления в трехэлементном реактивном двухполюснике.

5-17. Доказать эквивалентность схем, изображенных на рис. 5-13.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

6-1. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН ОТ ПАРАМЕТРА

Исследование зависимости какой-либо комплексной величины (или отношения комплексных величин) от переменного параметра сводится к нахождению зависимостей модуля и угла от параметра.

При пользовании прямоугольной системой координат строятся кривые модуля и угла, которые в совокупности и характеризуют изменение исследуемой величины. Вместо зависимостей модуля и угла в прямоугольной системе координат могут быть построены зависимости от параметра действительной и мнимой частей исследуемой комплексной величины.

Таким образом, графическое изображение исследуемой зависимости в прямоугольной системе координат осуществляется с помощью двух кривых: модуля и угла или соответственно действительной и мнимой частей.

При комплексной форме записи полное представление о зависимости исследуемой величины от параметра может быть достигнуто с помощью одной кривой, изображаемой на комплексной плоскости. Сущность такого графического изображения заключается в том, что *исследуемое комплексное выражение представляется на комплексной плоскости вектором, геометрическое место конца которого при изменении входящего в это выражение параметра изображается кривой*. Эта кривая, называемая также годографом, наглядно показывает изменение модуля и фазы рассматриваемой комплексной величины в зависимости от параметра.

Такой графический метод применим к комплексным величинам — напряжениям, токам, мощностям — и отношениям комплексных величин — сопротивлениям, проводимостям, передаточным функциям и т. п.

Переменным параметром электрической цепи может служить какая-либо из величин, характеризующих источник электрической энергии или пассивный элемент: величина или фаза э. д. с. (или тока) источника, частота ω , сопротивление r , индуктивность L , взаимная индуктивность M , емкость C или соответственно реактивная составляющая сопротивления или проводимости и т. д.

В качестве переменного параметра может рассматриваться полное сопротивление z при неизменном значении аргумента φ , или, наоборот, переменным параметром может служить угол φ при постоянном z .

Изменение каждого из этих параметров может быть графически представлено на комплексной плоскости. Например, изменение активного или реактивного сопротивления изображается прямой, параллельной соответственно действительной или мнимой оси. Изменение полного сопротивления при постоянном угле φ изображается пря-

мой линией, образующей с действительной осью угол φ . В свою очередь изменение угла φ при неизменном z изображается окружностью радиусом z .

6-2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИДА $Y=1/Z$

Положим, что вектор Z при изменении соответствующего параметра описывает на комплексной плоскости окружность или прямую. Требуется построить геометрическое место конца вектора $Y=1/Z$.

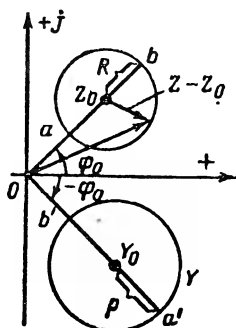


Рис. 6-1. Преобразование окружности Z в окружность Y .

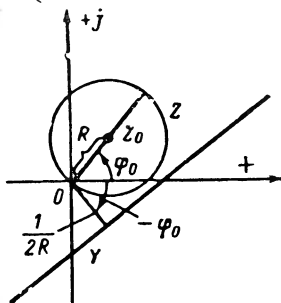


Рис. 6-2. Преобразование окружности Z в прямую Y .

Пусть точка Z_0 на комплексной плоскости Z служит центром окружности, радиус которой равен R . Комплексная форма уравнения такой окружности может быть представлена так:

$$(Z - Z_0)(\bar{Z} - \bar{Z}_0) = R^2$$

или

$$Z\bar{Z} - Z\bar{Z}_0 - \bar{Z}Z_0 + Z_0\bar{Z}_0 = R^2. \quad (6-1)$$

Подстановка $Z=1/Y$ дает:

$$Y\bar{Y} - Y\frac{Z_0}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} - \frac{\bar{Y}\bar{Z}_0}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} + \frac{1}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} = 0$$

или, что то же,

$$Y\dot{Y} - Y \frac{Z_0}{Z_0^*Z_0 - R^2} - \dot{Y} \frac{\dot{Z}_0}{Z_0^*\dot{Z}_0 - R^2} + \frac{Z_0\dot{Z}_0}{(Z_0^*Z_0 - R^2)^2} = \\ = \frac{R^2}{(Z_0^*Z_0 - R^2)^2}. \quad (6-2)$$

Из сопоставления (6-2) с (6-1) следует, что вектор Y описывает окружность радиусом $\rho = \frac{R}{Z_0^*Z_0 - R^2}$ с цент-

ром в точке $\frac{\dot{Z}_0}{Z_0^*Z_0 - R^2}$ комплексной плоскости Y .

Наиболее удаленной от начала координат точке b окружности Z соответствует наиболее близко расположенная к началу координат точка b' окружности Y , и наоборот. Диаметры соответствующих окружностей, проходящие через начало координат, образуют с действительной осью одинаковые углы, отсчитываемые в противоположных направлениях (рис. 6-1). Следует заметить, что координаты центров окружностей векторов Z и Y не подчиняются условию $Y=1/Z$; иначе говоря, $Y_0 \neq 1/Z_0$.

В случае, когда окружность проходит через начало координат, $Z_0^*\dot{Z}_0 = R^2$ и на основании (6-1)

$$Z\dot{Z} - Z\dot{Z}_0 - \dot{Z}Z_0 = 0. \quad (6-3)$$

Вектор Y описывает при этом прямую, находящуюся на расстоянии $1/2R$ от начала координат (рис. 6-2). Диаметр окружности Z , проходящий через начало координат, и перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую Y , образуют с действительной осью одинаковые углы (отсчитываемые в противоположные стороны).

Уравнение прямой Y получается, если обе части уравнения (6-2) умножить на $Z\dot{Z}_0 - R^2$ и затем перейти к пределу $Z\dot{Z}_0 - R^2 \rightarrow 0$. Тот же результат можно получить непосредственно из (6-3), заменяя $Z=1/Y$:

$$YZ_0 + \dot{Y}\dot{Z}_0 - 1 = 0. \quad (6-4)$$

В свою очередь уравнение прямой линии в плоскости Z , не проходящей через начало координат, записывается по аналогии с (6-4):

$$ZY_0 + \dot{Z}\dot{Y}_0 - 1 = 0.$$

При этом уравнение окружности, описываемой вектором Y , имеет вид:

$$Y\dot{Y} - Y\dot{Y}_0 - \dot{Y}Y_0 = 0.$$

Если геометрическим местом вектора Z служит прямая, проходящая через начало координат под углом φ к действительной оси, то геометрическое место вектора Y представляет собой прямую, также проходящую через начало координат и образующую с действительной осью угол $-\varphi$ (рис. 6-3).

Преобразования прямой в окружность и окружности в окружность иллюстрированы ниже на примерах простейших электрических цепей.

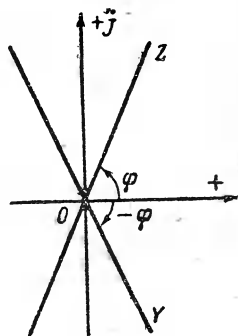


Рис. 6-3. Преобразование прямой Z в прямую Y .

6-3. ДИАГРАММЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ПРОВОДИМОСТЕЙ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим диаграммы сопротивления и проводимости цепи с последовательным, параллельным или смешанным соединением при изменении одного параметра.

Последовательное соединение

При изменении сопротивления r (рис. 6-4, а) геометрическим местом комплексного сопротивления $Z = r + jx$ служит прямая, параллельная действительной оси (рис. 6-4, б). Геометрическим местом комплексной проводимости $Y = \frac{1}{r + jx}$ является полуокружность, проходящая через начало координат комплексной плоскости Y , диаметр которой равен $1/|x|$ (рис. 6-4, в).

Вторая половина окружности, соответствующая отрицательным значениям r , из рассмотрения исключается.

Значению $r = 0$ соответствует наиболее удаленная точка окружности Y , а значению $r = \infty$ — точка 0 в плоскости Y .

При $x > 0$ геометрическое место конца вектора Z располагается в первой четверти, а при $x < 0$ — в четвертой четверти комплексной плоскости.

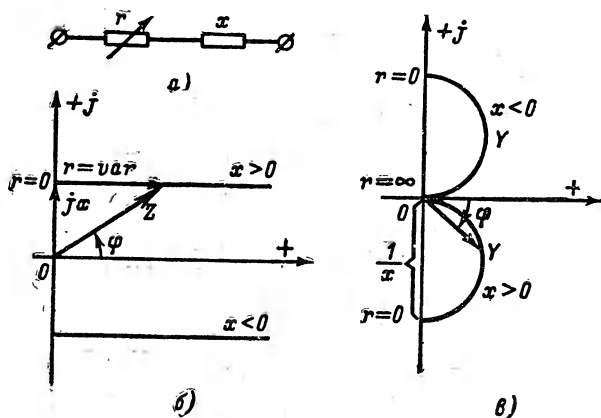


Рис. 6-4. Переменное активное сопротивление при последовательном соединении.

a — схема; $б$ — диаграмма Z ; $в$ — диаграмма Y .

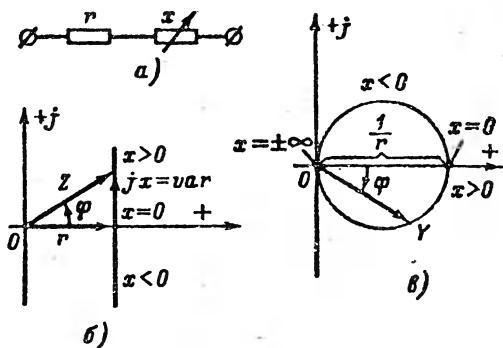


Рис. 6-5. Переменное реактивное сопротивление при последовательном соединении.

a — схема; $б$ — диаграмма Z ; $в$ — диаграмма Y .

Соответственно полуокружность Y при $x > 0$ располагается в четвертой четверти, а при $x < 0$ — в первой четверти.

При изменении реактивного сопротивления x (рис. 6-5, a) геометрическим местом вектора Z служит

прямая, параллельная мнимой оси (рис. 6-5, б). Геометрическим местом конца вектора $Y = 1/Z$ является окружность, проходящая через начало координат комплексной плоскости; диаметр окружности равен $1/r$ (рис. 6-5, в).

Значениям $x > 0$ соответствует нижняя, а $x < 0$ — верхняя полуокружность.

При $x = 0$ цепь имеет только активное сопротивление и соответственно активную проводимость. При $x = \pm \infty$ проводимость цепи равна нулю.

Параллельное соединение

При изменении сопротивления r (рис. 6-6, а) геометрическим местом конца вектора $Y = \frac{1}{r} - j\frac{1}{x}$ служит прямая, параллельная действительной оси (рис. 6-6, б).

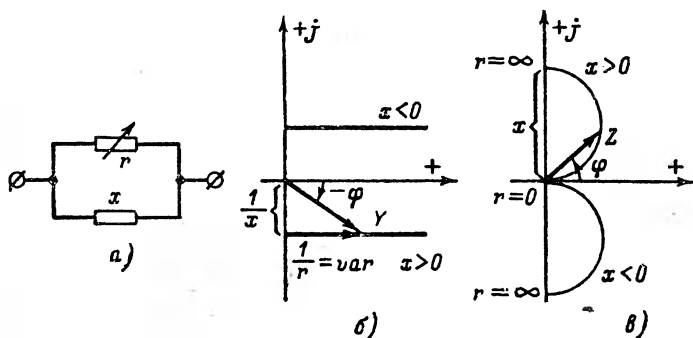


Рис. 6-6. Переменное активное сопротивление при параллельном соединении.

а — схема; б — диаграмма Y ; в — диаграмма Z .

Геометрическим местом конца вектора $Z = 1/Y$ является полуокружность (рис. 6-6, в); верхняя при $x > 0$ и нижняя при $x < 0$; диаметр окружности равен $|x|$. Значению $r = 0$ соответствует начало координат, а значению $r = \infty$ — диаметрально противоположная точка окружности.

При изменении реактивного сопротивления x (рис. 6-7, а) геометрическим местом конца вектора Y служит прямая, параллельная мнимой оси (рис. 6-7, б),

а геометрическим местом конца вектора $Z=1/Y$ — окружность диаметром r , проходящая через начало координат (рис. 6-7, в). Значениям $x>0$ соответствует верхняя, а $x<0$ — нижняя полуокружность. При $x=0$ полное сопротивление цепи равно нулю, а полная проводимость бесконечно велика.

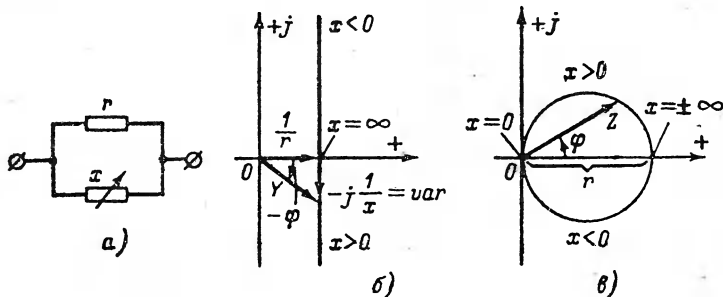


Рис. 6-7. Переменное реактивное сопротивление при параллельном соединении.

а — схема; б — диаграмма Y ; в — диаграмма Z .

При $x = \pm\infty$ сопротивление и проводимость цепи являются активными.

Смешанное соединение

Рассмотрим в качестве примеров две схемы цепи со смешанным соединением элементов.

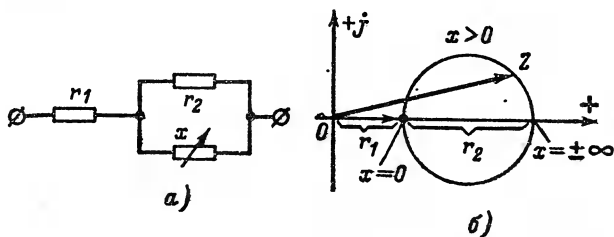


Рис. 6-8. Переменное реактивное сопротивление при смешанном соединении

а — схема; б — диаграмма.

На рис. 6-8, *а* показана схема цепи, в которой переменным параметром является реактивное сопротивление x . Диаграмма Z такой цепи (рис. 6-8, *б*) отличается от

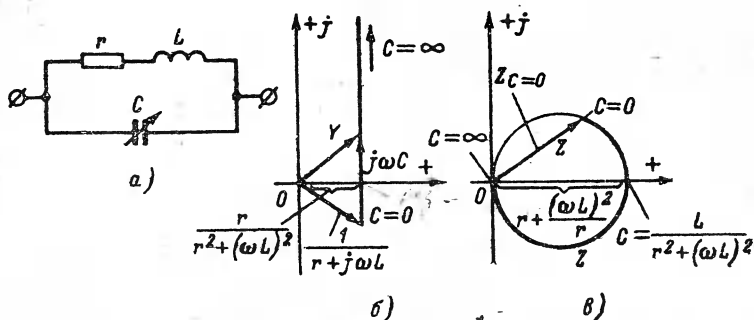


Рис. 6-9. Переменная емкость при смешанном соединении.
а — схема; *б* — диаграмма Y ; *в* — диаграмма Z .

диаграммы Z (рис. 6-7, *в*), тем, что окружность смещена относительно начала координат на величину сопротивления r_1 . Изменение x может быть обусловлено изменением частоты или параметра L или C .

На рис. 6-9, *а* показана схема цепи, в которой переменным параметром является емкость C . Проводимость ветви r , L равна:

$$\frac{1}{r + j\omega L} = \frac{r - j\omega L}{r^2 + (\omega L)^2};$$

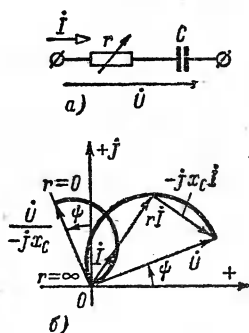


Рис. 6-10. Пример 6-1.

проводимость ветви с емкостью равна $j\omega C$. Следует отметить, что резонанс токов наступает при $\omega C = \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}$. При этом комплексная проводимость всей цепи равна $Y = \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2}$, а комплексное сопротивление $Z = r + j(\omega L)^2/r$.

Геометрическим местом конца вектора Y служит прямая, параллельная мнимой оси (рис. 6-9, *б*), а геометри-

ческим местом конца вектора Z — окружность, проходящая через начало координат; диаметр окружности равен $r + (\omega L)^2/r$ (рис. 6-9, в). Часть окружности, начерченная тонкой линией, исключается из рассмотрения, так как она соответствует отрицательным значениям C .

Рассмотренные здесь диаграммы сопротивлений и проводимостей изображают в определенном масштабе и диаграммы: 1) тока $I = Y\dot{U}$ — при заданном напряжении $\dot{U}$ на зажимах цепи; 2) напряжения $\dot{U} = Z\dot{I}$ — при заданном токе $\dot{I}$, проходящем через цепь; 3) комплексной мощности $\tilde{S} = U^2\tilde{Y} = I^2Z$ — при заданных U или I .

Если начальная фаза заданного напряжения (или тока) отлична от нуля, то диаграмма тока (или напряжения) поворачивается на соответствующий угол (см. пример 6-1).

Пример 6-1. Напряжение на зажимах участка цепи, состоящего из последовательно соединенных сопротивления r и емкости C , задано $\dot{U} = U\angle\psi$ (рис. 6-10, а). Построить круговые диаграммы тока и напряжения на сопротивлении при изменении r от нуля до бесконечности.

Круговая диаграмма тока $I = Y\dot{U}$ повернута относительно диаграммы проводимости, изображенной на рис. 6-4, в (для случая $x < 0$), на угол ψ , равный начальной фазе приложенного напряжения.

Диаметр круговой диаграммы тока равен току $\frac{\dot{U}}{-jx_C}$, соответствующему значению $r=0$ и опережающему $\dot{U}$ на $\pi/2$ (рис. 6-10, б).

Напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током. В силу равенства $r\dot{I} - jx_C\dot{I} = \dot{U}$ конец вектора $r\dot{I}$ описывает окружность, диаметром которой служит $\dot{U}$.

6-4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИДА $W = \frac{A + Bk}{C + Dk}$

Если в сложной линейной электрической цепи переменным параметром служит какая-либо из величин r , L , C , x , z или y , то исследуемая функция может в общем случае представлять собой дробно-линейную функцию

$$W = \frac{A + Bk}{C + Dk}, \quad (6-5)$$

где

$$\begin{aligned} A &= |A| < \alpha; \quad B = |B| < \beta; \\ C &= |C| < \gamma; \quad D = |D| < \delta \end{aligned}$$

— комплексные числа; k — переменный вещественный параметр.

Согласно круговому свойству дробно-линейной функции при изменении параметра k конец вектора W описывает окружность. Центр и радиус этой окружности могут быть найдены аналитически или графически.

Следует заметить, что в том случае, когда переменным параметром служит частота, характер исследуемой функции и кривой, выражаемой ею, зависит от степени ω . Если ω входит в (6-5) в первой степени, то круговое свойство функции сохраняется. При более высоких степенях ω получаются кривые высшего порядка.

Уравнение (6-5) может быть преобразовано путем деления числителя на знаменатель:

$$W = \frac{B}{D} + \frac{\frac{A}{C} - \frac{B}{D}}{1 + \frac{D}{C} k}. \quad (6-6)$$

Первое слагаемое, не зависящее от параметра k , представляет собой вектор, через конец которого проходит искомая окружность. На основании (6-6) B/D равно значению W при $k = \infty$: $B/D = W_{k=\infty}$.

Второе слагаемое (6-6) является уравнением окружности. В самом деле:

$$V = \frac{\frac{A}{C} - \frac{B}{D}}{1 + \frac{D}{C} k} = \frac{F}{1 + \frac{D}{C} k};$$

тогда

$$V + V \frac{D}{C} k = F.$$

Это равенство показывает, что постоянный вектор F получается в результате геометрического сложения вектора V с вектором $Vk|D/C| \angle (\delta - \gamma)$, опережающим его на постоянный угол $\delta - \gamma$; постоянство этого угла означает, что конец вектора V описывает дугу окружности, опирающуюся на хорду F .

На основании (6-6) A/C равно значению W при $k=0$:

$$A/C = W_{k=0}.$$

Следовательно,

$$F = W_{k=0} - W_{k=\infty}.$$

На рис. 6-11 показан способ графического построения окружности W по заданным значениям A/C , B/D и угла

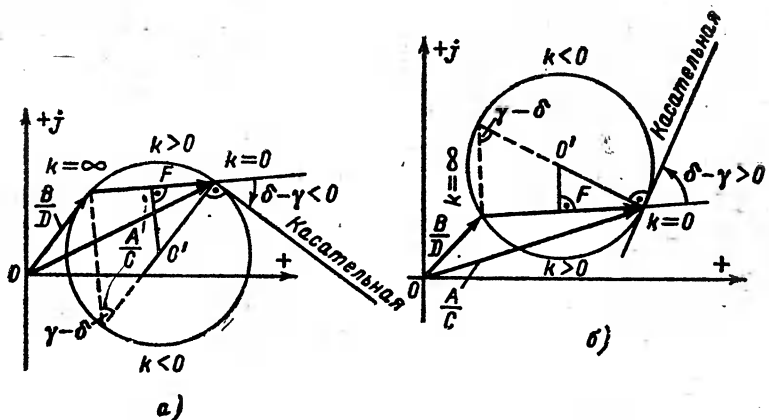


Рис. 6-11. Построение круговой диаграммы по уравнению (6-5).

$a - \delta - \gamma < 0$; $b - \delta - \gamma > 0$.

$\delta - \gamma$. У конца вектора F (служащего хордой искомой

окружности) от его продолжения откладывается угол $\delta - \gamma$: положительный — против хода часовой стрелки, отрицательный — по ходу часовой стрелки. Полученная прямая касательна (к искомой окружности). Центр этой окружности находится в точке O' пересечения перпендикуляров, восстановленных к касательной (в конце вектора A/C) и хорде в середине вектора F . Из построения следует, что положительным значениям параметра k соответствует дуга окружности, заключенная между хордой и касательной.

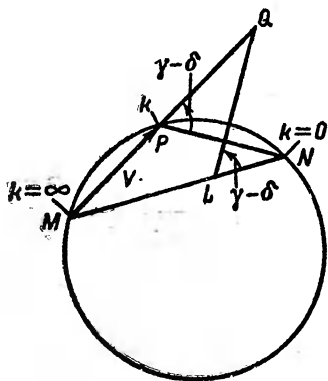


Рис. 6-12. Построение линии переменного параметра.

Каждая точка полученной окружности соответствует определенному числовому значению параметра k . Для нахождения точки круговой диаграммы, соответствующей заданному значению параметра k , пользуются следующим графическим приемом (рис. 6-12).

Выбирается точка L на хорде MN так, чтобы выполнялось условие $mML = |C/D|$, т. е. чтобы отрезок ML в удобном масштабе m (например, $m = 1$) изображал величину $|C/D|$. Далее проводится прямая из точки L под углом $\gamma - \delta$ к хорде MN . Продолжение любого текущего вектора V до этой прямой (в точке Q) дает отрезок LQ , который равен k/m . В самом деле, из подобия треугольников MPN и MLQ следует, что $LQ/ML = PN/MP$, откуда

$$LQ = \frac{1}{m} \left| \frac{C}{D} \right| k \frac{\left| \frac{D}{C} \right| |V|}{|V|} = \frac{k}{m}.$$

Таким образом, полученная точка P на круговой диаграмме соответствует заданному значению параметра k .

По мере удаления точки Q точка P перемещается в сторону точки M , которая соответствует значению $k = \infty$ (линия MP становится параллельной линии LQ).

Вспомогательная прямая LQ носит название линии переменного параметра.

Построение круговой диаграммы с помощью дробно-линейной функции W иллюстрируется ниже примерами, относящимися к разветвленной электрической цепи.

Пример 6-2. На рис. 6-13, *a* показана схема так называемого фазовращателя. В плечи мостовой схемы включены два равных сопротивления r_1 , емкость C_1 и переменное сопротивление r .

Пользуясь графическим методом, описанным выше, направив вектор $\dot{U}$ по действительной оси, начертим круговую диаграмму напряжения $\dot{U}_{mn}$ между зажимами m и n при изменении r от 0 до ∞ .

Напряжение $\dot{U}_{mn}$ находится как разность напряжений на емкости и сопротивлении r :

$$\dot{U}_{mn} = \dot{U} \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{r + \frac{1}{j\omega C_1}} - \frac{\dot{U}}{2} = \frac{\dot{U}}{1 + jr\omega C_1} - \frac{\dot{U}}{2}.$$

Выражение $\frac{\dot{U}}{1 + jr\omega C_1}$ представляет собой дробно-линейную функцию (6-6).

Выражение

$$\frac{1}{r_1 + j\omega L_1 + 1} = - \frac{\frac{1}{r_1 + j\omega L_1}}{1 + \frac{1}{r_1 + j\omega L_1}}$$

представляет собой дробно-линейную функцию (6-6); при этом

$$F = \frac{A}{C} - \frac{B}{D} \cdot \frac{1}{r_1 + j\omega L_1}; \quad \frac{D}{C} = \frac{1}{r_1 + j\omega L_1};$$

$$k = r; \quad \delta - \gamma = -\varphi = -\arctg \frac{\omega L_1}{r_1}.$$

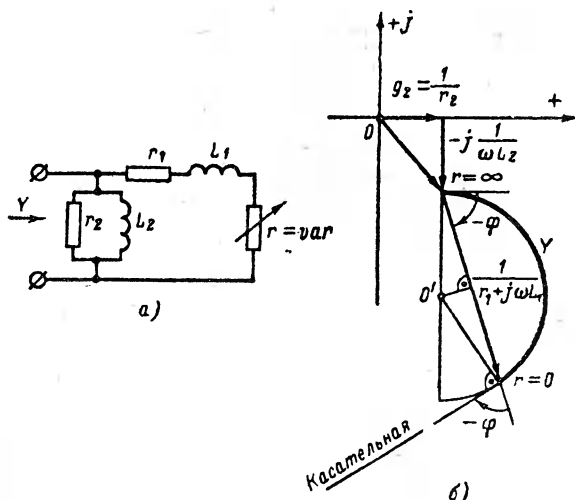


Рис. 6-14. Пример 6-3.

На продолжении вектора $\frac{1}{r_1 + j\omega L_1}$, смещенного относительно начала координат на величину $\frac{1}{r_2} - j \frac{1}{\omega L_2}$, откладывается угол $\delta - \gamma = -\varphi$ по ходу часовой стрелки. Полученная прямая касательна к искомой окружности, центр которой находится в точке O' .

Рабочая часть диаграммы показана на рис. 6-14, б жирной линией.

6-5. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

6-1. Найти с помощью круговой диаграммы емкость C в цепи, изображенной на рис. 5-7, а, при которой сопротивление всей цепи максимально. Дано: $r_1 = 10$ ом; $r_2 = 5$ ом; $L = 50$ мГн; $\omega = 377$ рад/сек.

Ответ: 85 мкф.

6-2. Найти наименьшее из двух значений емкости C , которые соответствуют резонансу токов в цепи предыдущей задачи.

Ответ: 115 мкф.

6-3. Показать с помощью круговой диаграммы, как изменяются напряжения на элементах r и L , включенных последовательно, если r изменяется от нуля до бесконечности, при неизменном напряжении 200 в на зажимах цепи. Построить линию переменного параметра r и найти графически напряжение на L и фазовый сдвиг тока относительно приложенного напряжения при $f=400$ гц; $L=31,8$ мГн и $r=60$ ом.

Ответ: 160 в; 53° .

6-4. Найти с помощью круговой диаграммы комплексного сопротивления емкость C , соединенную последовательно с $r=34$ ом и $L=400$ мГн, при которой наступает резонанс напряжений; $\omega=500$ рад/сек.

Ответ: 10 мкф.

6-5. Найти с помощью круговой диаграммы значения индуктивности L катушки, имеющей сопротивление $r=10$ ом и включенной параллельно емкости 10,5 мкф, при которых наступает резонанс токов. Частота $f=400$ гц.

Ответ: 14 и 1 мГн.

6-6. Построить в зависимости от частоты геометрическое место для комплексного сопротивления (или комплексной проводимости) цепи, изображенной на рис. 5-7, а, и найти резонансную частоту, приняв $r_1=8$ ом; $r_2=6$ ом; $L=5$ мГн; $C=50$ мкф. Найти значения C , при которых резонанс невозможен.

Ответ: 1500 рад/сек; $80 \leq C \leq 140$ мкф.

6-7. Решить задачи 5-3, 5-8 и 5-10 графически.

6-8. Пояснить ход построения круговой диаграммы по заданному комплексному выражению.

6-9. Пояснить ход построения линии переменного параметра.

6-10. Как определяется рабочая часть круговой диаграммы?

6-11. В чем заключается преимущество метода геометрических мест перед аналитическими методами?

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

7-1. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ КИРХГОФА ДЛЯ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ

В предыдущих главах рассматривались простейшие схемы электрических цепей — одноконтурные схемы, цепная схема с одним источником электрической энергии и схемы с двумя узлами. Были описаны методы преобразования схем, с помощью которых в ряде случаев удастся упростить расчет разветвленной электрической цепи. При

этом под расчетом цепи подразумевается вычисление электрических величин или их отношений при заданных схеме и параметрах цепи.

В случае, когда схема электрической цепи достаточно сложна и не приводится к схеме одноконтурной цепи или цепи с двумя узлами, пользуются более общими методами расчета.

Описываемые ниже методы и теоремы применимы для цепей постоянного и переменного тока; ради общности изложения они приводятся в комплексной форме.

В общем случае искомые электрические величины и их соотношения могут быть найдены в результате совместного решения системы уравнений, выражающих первый и второй законы Кирхгофа для заданной электрической цепи.

Положим, что в схеме, содержащей p ветвей и q узлов, заданными являются источники напряжений, а искомыми — токи в ветвях. Следовательно, число неизвестных равно числу ветвей.

По первому закону Кирхгофа, выражающему равенство нулю алгебраической суммы токов в узле, может быть записано $q - 1$ независимых уравнений; уравнение для последнего, q -го, узла является следствием предыдущих $q - 1$ уравнений. Действительно, ввиду того, что каждая ветвь связывает два узла, ток каждой ветви входит дважды с различными знаками в уравнения, записанные для q узлов. Поэтому если просуммировать q уравнений, то получится тождество вида $0 = 0$. Следовательно, одно из этих уравнений является зависимым, т. е. вытекающим из всех остальных уравнений.

Узлы, для которых записываются независимые уравнения по первому закону Кирхгофа, можно назвать независимыми узлами. Из сказанного следует, что из общего числа q узлов любые $q - 1$ узлов являются независимыми, а оставшийся последний узел является зависимым.

По второму закону Кирхгофа, выражающему равенство алгебраической суммы э. д. с. в контуре алгебраической сумме падений напряжения в нем, может быть независимо $p - q + 1$ независимых уравнений. В самом деле, если ко всем ветвям применить закон Ома, то получатся p уравнений вида:

$$\dot{U}_{ik} = \dot{U}_i - \dot{U}_k = -\dot{E}_n + Z_n \dot{I}_n; \quad (7-1)$$

здесь $\dot{U}_{ik}$ — комплексное напряжение между узлами i и k ; $\dot{E}_n$, $\dot{I}_n$ — комплексные э. д. с. источника и ток в n -й ветви, направленные от узла i к узлу k ; Z_n — комплексное сопротивление той же ветви.

В систему уравнений вида (7-1) входят p неизвестных токов $\dot{I}_n$ и $q - 1$ неизвестных потенциалов $\dot{U}_i$, $\dot{U}_k$ и т. д. (потенциал одного из узлов принимается равным нулю). Если из имеющейся системы уравнений исключить эти неизвестные потенциалы, останется $p - q + 1$ уравнений, связывающих комплексные э. д. с. источников с на-

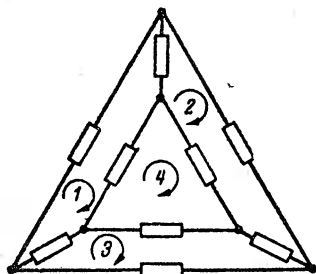


Рис. 7-1. Электрическая схема с четырьмя независимыми контурами.

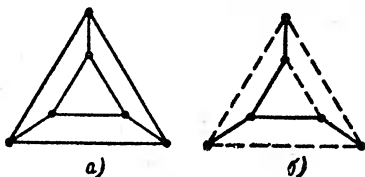


Рис. 7-2. Граф схемы на рис. 7-1 (а) и одно из его возможных деревьев (б).

пряжениями на комплексных сопротивлениях; полученные таким путем уравнения выражают второй закон Кирхгофа.

Итак, расчет электрической цепи с помощью первого и второго законов Кирхгофа сводится к решению $(q - 1) + (p - q + 1) = p$ уравнений — по числу ветвей.

Контур, для которых уравнения, записанные по второму закону Кирхгофа, являются независимыми, называются независимыми контурами.

На рис. 7-1 в виде примера показана электрическая схема с числом ветвей $p = 9$ и числом узлов $q = 6$. Соответственно число уравнений по первому закону Кирхгофа равно $9 - 6 = 3$ и по второму закону Кирхгофа $9 - 6 + 1 = 4$. В схеме рис. 7-1 независимыми являются четыре контура. На рис. 7-1 показан один из многих возможных вариантов выбора независимых контуров.

Для того чтобы уравнения по второму закону Кирхгофа, а следовательно, и сами контуры были независимыми, достаточно, чтобы каждый последующий контур

отличался от предыдущих хотя бы одной новой ветвью. Например, если в схеме рис. 7-1 обходить контур 4 не в последнюю очередь, то каждый последующий контур будет содержать новую ветвь.

Независимый контур в отдельных случаях может не содержать новой ветви схемы, например контур 4 в схеме рис. 7-1, если обходить контуры в порядке их нумерации. При выборе независимых контуров заданную схему цепи удобно изображать в виде графа, в котором ветви представляются отрезками линий; идеальный источник напряжения учитывается как короткозамкнутая ветвь, а идеальный источник тока — как разомкнутая ветвь. На рис. 7-2, а показан граф схемы рис. 7-1.

Граф содержит всю информацию, относящуюся к геометрической структуре соединения ветвей.

Часть графа, содержащая все узлы, но не содержащая ни одного замкнутого контура, называется деревом. Легко показать, что число ветвей дерева на единицу меньше числа узлов схемы, т. е. равно $q - 1$.

Ветви графа, не входящие в состав дерева, называются главными ветвями дерева или хордами. Подключение к дереву каждой из главных ветвей создает по одному независимому контуру. Совокупность главных ветвей дерева называется дополнением дерева. Так как граф содержит p ветвей, а дерево $q - 1$, то число главных ветвей дерева равно $p - (q - 1) = p - q + 1$, т. е. числу независимых контуров.

На рис. 7-2, б сплошными линиями показано одно из возможных деревьев графа, а пунктиром — главные ветви дерева.

Из сказанного следует способ выбора независимых контуров: чертится дерево схемы и затем поочередно добавляются главные ветви. Любой контур, образуемый добавлением новой ветви, является независимым, так как он отличается от предыдущих контуров новой ветвью. В итоге, когда к дереву добавятся все главные ветви, получится граф схемы и число независимых контуров станет достаточным для расчета цепи. См. также приложение I.

Предлагаем читателям выбрать таким способом независимые контуры в схеме рис. 7-1.

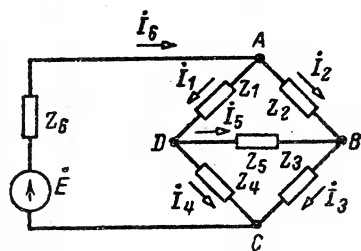
Для получения независимых контуров, достаточных для расчета цепи, можно начать и не с построения дерева, а с самого графа схемы, а затем поочередным размы-

канием главных ветвей дойти до дерева. В этом случае руководствуются следующим правилом: в заданной схеме выбирается какой-либо контур, размыкается одна из ветвей этого контура и в оставшейся части схемы выбирается новый контур, затем размыкается одна ветвь этого нового контура и т. д. до тех пор, пока в схеме не останется ни одного контура.

Предлагаем читателям применить для выбора независимых контуров и это правило.

Пример 7-1. [Л. 9]. В мостовой схеме, представленной на рис. 7-3, заданы все комплексные сопротивления и э. д. с. $\dot{E}$. Требуется определить ток $\dot{I}_5$ в ветви Z_5 (ток в диагонали мостовой схемы).

Схема содержит четыре узла и шесть ветвей. Следовательно, могут быть составлены три уравнения по первому закону Кирхгофа и три уравнения по второму закону Кирхгофа:



для узла A

$$-i_1 - i_2 + i_6 = 0;$$

для узла B

$$i_2 - i_3 + i_5 = 0;$$

для узла C

$$i_3 + i_4 - i_6 = 0;$$

для контура ABDA

$$-Z_1 i_1 + Z_2 i_2 - Z_5 i_5 = 0;$$

для контура BCDB

$$Z_3 i_3 - Z_4 i_4 + Z_5 i_5 = 0;$$

для контура ABCA

$$Z_2 i_2 + Z_3 i_3 + Z_6 i_6 = \dot{E}.$$

В полученной системе шести уравнений неизвестными являются токи в ветвях. Решая систему уравнений относительно искомого тока, находим:

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{E}}{M} (Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3),$$

где

$$M = Z_5 [(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3) + Z_6 (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)] + \\ + Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4) + Z_6 (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4).$$

Полученное выражение показывает, что ток в диагонали равен нулю, если выполнено условие $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$ (условие равновесия мостовой схемы).

7-2. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов является одним из основных методов расчета сложных электрических цепей, которым широко пользуются на практике. Этот метод заключается в том, что вместо токов в ветвях определяются на основании второго закона Кирхгофа так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах.

На рис. 7-4 в виде примера показана двухконтурная электрическая цепь, в которой $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ — контурные токи. Токи в сопротивлениях Z_1 и Z_2 равны соответствующим контурным токам; ток в сопротивлении Z_3 , являющемся общим для обоих контуров, равен разности контурных токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, так как эти токи направлены в ветви Z_3 встречно¹. При этом если положительное направление искомого тока в ветви Z_3 принять совпадающим с направлением контурного тока $\dot{I}_1$, то ток в ветви будет равен $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$. В противном случае он будет равен $\dot{I}_2 - \dot{I}_1$.

Число уравнений, записываемых для контурных токов по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров, т. е. для электрической схемы с числом узлов q и числом ветвей p задача нахождения контурных токов сведется к решению системы $p - q + 1$ уравнений. Так, в схеме рис. 7-4 $q = 2$, $p = 3$; следовательно, число уравнений равно $3 - 2 + 1 = 2$ (число независимых контуров).

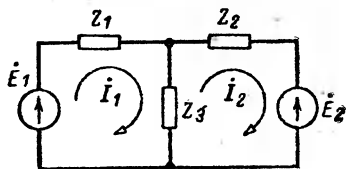


Рис. 7-4. Иллюстрация к методу контурных токов.

Условимся сумму комплексных сопротивлений, входящих в контур, называть собственным сопротивлением контура, а комплексное сопротивление, принадлежащее одновременно двум или нескольким контурам, — общим сопротивлением этих контуров.

Положительные направления контурных токов задаются произвольно. Направление обхода каждого контура принимается обычно совпадающим с выбранным по-

¹ Следует отметить, что если положительное направление одного из контурных токов ($\dot{I}_1$ или $\dot{I}_2$) изменить на обратное, то ток в ветви Z_3 будет равен сумме этих токов.

$Z_{(ik)}$ войдут со знаком минус, когда токи I_i и I_k направлены в них встречно.

Решение уравнений (7-2) относительно искомых контурных токов может быть найдено с помощью определителей:

$$I_1 = \frac{1}{\Delta_z} \begin{vmatrix} \dot{E}_1 Z_{(12)} & \cdots & Z_{(1n)} \\ \dot{E}_2 Z_{(22)} & \cdots & Z_{(2n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{E}_n Z_{(n2)} & \cdots & Z_{(nn)} \end{vmatrix};$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_z} \begin{vmatrix} Z_{(11)} \dot{E}_1 & \cdots & Z_{(1n)} \\ Z_{(21)} \dot{E}_2 & \cdots & Z_{(2n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{(n1)} \dot{E}_n & \cdots & Z_{(nn)} \end{vmatrix}$$

и т. д., где определитель системы¹

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} Z_{(11)} Z_{(12)} & \cdots & Z_{(1n)} \\ Z_{(21)} Z_{(22)} & \cdots & Z_{(2n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{(n1)} Z_{(n2)} & \cdots & Z_{(nn)} \end{vmatrix}.$$

Согласно правилу разложения определителя по элементам столбца определитель равен сумме произведений элементов столбца на их алгебраические дополнения. Поэтому решение уравнений запишется в виде²:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \dot{E}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} + \cdots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta_z}; \\ I_2 &= \dot{E}_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} + \cdots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n2}}{\Delta_z}; \\ &\vdots \\ I_n &= \dot{E}_1 \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_z} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_z} + \cdots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{nn}}{\Delta_z}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

¹ Определитель снабжен индексом z , так как его элементами являются комплексные сопротивления.

² На практике во многих случаях решение системы уравнений (7-2) может быть выполнено более просто последовательным исключением неизвестных.

Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента $Z_{(ik)}$ определителя системы, т. е. умноженный на $(-1)^{i+k}$ минор элемента Z_{ik} (минор образуется из определителя системы исключением из него i -й строки и k -го столбца).

Сокращенно система уравнений (7-3) записывается в виде:

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{i=1}^n \dot{E}_i \Delta_{ik}. \quad (7-4)$$

Первый индекс алгебраического дополнения i , обозначающий номер строки, вычеркиваемой в определителе системы, соответствует номеру контура, контурная э. д. с.

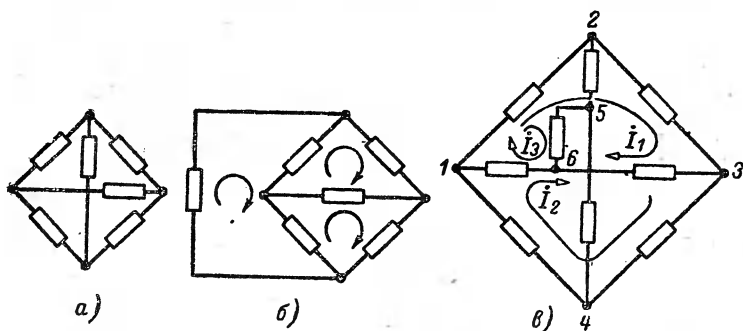


Рис. 7-5. Планарные (а и б) и непланарная (в) электрические цепи.

которого умножается на данное алгебраическое дополнение. Второй индекс k , обозначающий номер столбца, вычеркиваемого в определителе системы, соответствует номеру контура, для которого вычисляется контурный ток.

Уравнения (7-2), выражающие второй закон Кирхгофа, записаны в предположении, что источниками электрической энергии служат источники напряжения. При наличии в электрической схеме источников тока они могут быть заменены эквивалентными источниками напряжения. Если проводимости источников тока равны нулю, то целесообразно выбрать заданные токи в качестве контурных; тогда число неизвестных контурных токов и соответственно число уравнений сократятся на число заданных токов.

Если в заданной электрической схеме имеются параллельные ветви, то замена их эквивалентным комплексным сопротивлением сокращает число контуров (за счет тех, которые образованы параллельными ветвями).

Электрические цепи могут быть планарными или непланарными.

П л а н а р н а я, или плоская, электрическая цепь может быть вычерчена на плоскости в виде схемы с неперекрывающимися ветвями. В некоторых случаях пересечение ветвей в электрической схеме, являющееся результатом принятого способа начертания схемы, устраняется при другом способе изображения данной планарной электрической цепи, как это, например, представлено на рис. 7-5.

Электрическая цепь, приведенная на рис. 7-5, а, планарна, так как имеющееся пересечение ветвей устранимо в соответствии с рис. 7-5, б.

Н е п л а н а р н а я электрическая цепь не может быть вычерчена на плоскости в виде схемы с неперекрывающимися ветвями. Примером такой электрической цепи служит приведенная на рис. 7-5, в непланарная цепь, пересечение ветвей в которой не может быть устранено.

Если направление контурных токов во всех контурах планарной электрической цепи одинаково, например совпадает с ходом часовой стрелки, то общие сопротивления смежных контуров входят в систему уравнений (7-2) со знаком минус, так как контурные токи смежных контуров направлены в общих ветвях встречно. Направление контурных токов по ходу часовой стрелки принимается во всех контурах, кроме внешнего, охватывающего всю схему. В последнем контурный ток направляется против часовой стрелки (см. пример 7-2). Это правило, однако, не является обязательным.

В случае непланарной электрической цепи не представляется возможным иметь в общих ветвях только разности контурных токов, как это, например, видно из схемы рис. 7-5, в.

Пример 7-2. [Л. 9]. Пользуясь методом контурных токов, определить ток в диагонали мостовой схемы рис. 7-6.

Выбранные положительные направления контурных токов i_1 , i_2 и i_3 указаны на схеме стрелками. Число уравнений, записываемых по второму закону Кирхгофа, равно трем (по числу независимых контуров):

$$0 = (Z_1 + Z_2 + Z_3) i_1 - Z_3 i_2 - Z_2 i_3;$$

$$0 = -Z_5 \dot{I}_1 + (Z_3 + Z_4 + Z_5) \dot{I}_2 - Z_3 \dot{I}_3 \\ - \dot{E} = -Z_2 \dot{I}_1 - Z_3 \dot{I}_2 + (Z_2 + Z_3 + Z_6) \dot{I}_3.$$

Решение полученной системы уравнений относительно контурных токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ дает:

$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{E}}{M} [Z_3 Z_5 + Z_2 (Z_3 + Z_4 + Z_5)];$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{E}}{M} [Z_2 Z_5 + Z_3 (Z_1 + Z_2 + Z_5)],$$

где M имеет то же значение, что и в примере 7-1.

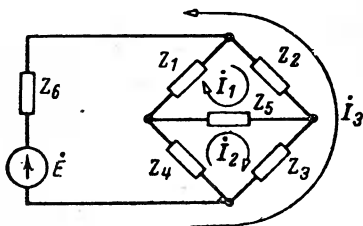


Рис. 7-6. Пример 7-2.

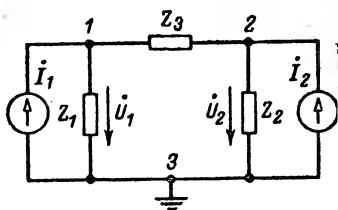


Рис. 7-7. Иллюстрация к методу узловых напряжений.

Искомый ток в диагонали мостовой схемы равен разности контурных токов:

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{M} (Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3),$$

что совпадает с полученным в примере 7-1 ответом.

Следует заметить, что если в заданной схеме контуры выбрать так, чтобы через ветвь Z_5 проходил только один контурный ток, то искомый ток в ветви Z_5 будет равен именно этому контурному току, т. е. задача сведется к нахождению только одного контурного тока (вместо двух).

7-3. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Метод узловых напряжений заключается в том, что на основании первого закона Кирхгофа определяются напряжения в узлах электрической цепи относительно некоторого базисного узла. Эти искомые напряжения называются **узловыми напряжениями**, причем положительное направление их указывается стрелкой от рассматриваемого узла к базисному.

Напряжение на какой-либо ветви равно, очевидно, разности узловых напряжений концов данной ветви; произведение же этого напряжения на комплексную проводимость данной ветви равно току в этой ветви. Таким образом, зная узловые напряжения в электрической цепи, можно найти токи в ветвях.

Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то напряжения между остальными узлами и базисным узлом будут равны также потенциалам этих узлов. Поэтому данный метод называется также методом узловых потенциалов.

На рис. 7-7 в виде примера изображена электрическая схема с двумя источниками тока, имеющая три узла: 1, 2 и 3. Выберем в данной схеме в качестве базиса узел 3 и обозначим напряжения узлов 1 и 2 через $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$. Согласно принятым на рис. 7-7 обозначениям комплексные проводимости ветвей равны соответственно:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}; Y_2 = \frac{1}{Z_2}; Y_3 = \frac{1}{Z_3}.$$

Для заданной электрической цепи с тремя узлами могут быть записаны два уравнения по первому закону Кирхгофа, а именно:

для узла 1

$$I_1 = Y_1 \dot{U}_1 + Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = (Y_1 + Y_3) \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2;$$

для узла 2

$$I_2 = Y_2 \dot{U}_2 + Y_3 (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) = -Y_3 \dot{U}_1 + (Y_2 + Y_3) \dot{U}_2.$$

Величина $Y_1 + Y_3$, представляющая собой сумму комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1, называется собственной проводимостью узла 1; величина Y_3 , равная комплексной проводимости ветви между узлами 1 и 2, входящая в уравнения со знаком минус, называется общей проводимостью между узлами 1 и 2.

Если заданы токи источников тока и комплексные проводимости ветвей, то узловые напряжения находятся совместным решением уравнений.

В общем случае если электрическая схема содержит q узлов, то на основании первого закона Кирхгофа получается система из $q - 1$ уравнений (узел q принят за базисный):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{(11)} \dot{U}_1 + Y_{(12)} \dot{U}_2 + \dots + Y_{(1,q-1)} \dot{U}_{q-1}; \\ \dot{I}_2 &= Y_{(21)} \dot{U}_1 + Y_{(22)} \dot{U}_2 + \dots + Y_{(2,q-1)} \dot{U}_{q-1}; \\ &\vdots \\ \dot{I}_{q-1} &= Y_{(q-1,1)} \dot{U}_1 + Y_{(q-1,2)} \dot{U}_2 + \\ &\quad + \dots + Y_{(q-1,q-1)} \dot{U}_{q-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

Здесь ток источника тока, подходящий к узлу, берется со знаком плюс, а отходящий от узла — со знаком минус; $Y_{(ii)}$ — собственная проводимость всех ветвей, сходящихся в данном узле i ; $Y_{(ik)}$ — общая проводимость между узлами i и k , входящая со знаком минус при выбранном направлении всех узловых напряжений к базису, независимо от того, является ли данная электрическая цепь планарной или непланарной.

Решив систему уравнений (7-5) при помощи определителей⁴, получим формулу для напряжения k -го узла относительно базиса:

$$\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta_y} \sum_{i=1}^{q-1} j_i \Delta_{ik}, \quad (7-6)$$

где Δ_y — определитель системы ²:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} Y_{(11)} & Y_{(12)} & \cdots & Y_{(1,q-1)} \\ Y_{(21)} & Y_{(22)} & \cdot & Y_{(2,q-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{(q-1,1)} & Y_{(q-1,2)} & \cdot & Y_{(q-1,q-1)} \end{vmatrix};$$

Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента $Y_{(ik)}$ данного определителя.

Первый индекс i алгебраического дополнения, обозначающий номер строки, вычеркиваемой в определителе системы, соответствует номеру узла, заданный ток источника тока которого умножается на данное алгебраическое дополнение. Второй индекс k , обозначающий номер столбца, вычеркиваемого в определителе системы, соот-

¹ См. сноску 1 на стр. 173.

² Определительные снабжен индексом y , так как его элементами являются комплексные проводимости.

ветствует номеру узла, для которого вычисляется узловое напряжение.

Уравнения (7-5), выражающие первый закон Кирхгофа, записаны в предположении, что в качестве источников электрической энергии служат источники тока. При наличии в электрической схеме источников напряжения последние должны быть заменены эквивалентными источниками тока.

Если в схеме имеются ветви, содержащие только э. д. с. (проводимости таких ветвей бесконечно велики), то эти ветви следует рассматривать как источники неизвестных токов, которые затем исключаются при сложении соответствующих уравнений. Дополнительными связями между неизвестными узловыми напряжениями будут являться известные напряжения между узлами, равные заданным э. д. с.

При наличии только одной ветви с э. д. с. и бесконечной проводимостью целесообразно принять за базисный узел один из узлов, к которому примыкает данная ветвь; тогда напряжение другого узла становится известным и число неизвестных сокращается на одно.

Метод узловых напряжений имеет преимущество перед методом контурных токов в том случае, когда число уравнений, записанных по первому закону Кирхгофа, меньше числа уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа. Если заданная электрическая схема имеет q узлов и p ветвей, то в соответствии со сказанным выше, метод узловых напряжений представляет преимущество при $q - 1 < p - q + 1$, или, что то же, при $2(q - 1) < p$.

Здесь имеется в виду общий случай, когда число уравнений не сокращается за счет известных контурных токов или узловых напряжений.

Пример 7-3. [Л. 9]. Пользуясь методом узловых напряжений определить ток в диагонали мостовой схемы (см. рис. 7-6).

В результате замены заданного источника напряжений эквивалентным источником тока получается схема (рис. 7-8), содержащая четыре узла. Для этой схемы по первому закону Кирхгофа записывают $4 - 1 = 3$ уравнения (по числу независимых узлов). Если

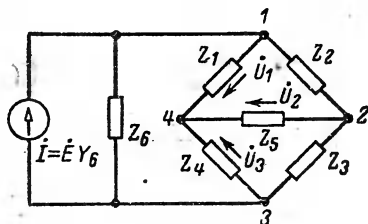


Рис. 7-8. Пример 7-3.

выбрать в данной схеме в качестве базиса узел 4 и направить узловое напряжения к базису, то уравнения примут вид:

для узла 1

$$Y_6 \dot{E} = (Y_1 + Y_2 + Y_6) \dot{U}_1 - Y_2 \dot{U}_2 - Y_6 \dot{U}_3;$$

для узла 2

$$0 = -Y_2 \dot{U}_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_5) \dot{U}_2 - Y_3 \dot{U}_3;$$

для узла 3

$$-Y_6 \dot{E} = -Y_6 \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2 + (Y_3 + Y_4 + Y_6) \dot{U}_3.$$

Решение полученной системы уравнений относительно $\dot{U}_2$ даст:

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{E}}{N} Y_6 (Y_2 Y_4 - Y_1 Y_3),$$

где

$$N = Y_6 [(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)] + Y_1 Y_4 (Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 (Y_1 + Y_4) + Y_6 (Y_1 + Y_4)(Y_2 + Y_3).$$

Умножив найденное узловое напряжение $\dot{U}_2$ на проводимость Y_5 диагональной ветви мостовой схемы и изменив знак в соответствии с выбранным ранее направлением тока $\dot{I}_5$ (см. рис. 7-3), найдем искомый ток:

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{E}}{N} Y_5 Y_6 (Y_1 Y_3 - Y_2 Y_4).$$

7-4. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

В линейной электрической цепи, содержащей источники напряжения, контурные токи (и соответственно токи в ветвях) представляют собой линейные функции контурных э. д. с. Математически они выражаются формулой (7-4):

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{i=1}^n \dot{E}_i \Delta_{ik}.$$

Физический смысл этой формулы заключается в том, что ток в любом контуре линейной электрической цепи может быть получен как алгебраическая сумма токов, вызываемых в этом контуре каждой из э. д. с. в отдельности.

Метод расчета токов, основанный на определении токов в одном и том же контуре (или ветви) при поочеред-

ном воздействии э. д. с. и последующем алгебраическом сложении этих токов, называется методом наложения.

При определении частичных слагающих токов по методу наложения необходимо считать включенными внутренние сопротивления тех источников напряжения, которые принимаются отсутствующими при вычислении слагающих токов. Если в цепи заданы источники э. д. с., т. е. внутренние сопротивления источников равны нулю, то при определении токов, вызываемых какой-либо э. д. с., все остальные источники э. д. с. закорачиваются.

В свою очередь в линейной электрической цепи, содержащей источники тока, узловые напряжения (и соответственно напряжения на ветвях) представляют собой линейные функции задающих токов источников. Математически они выражаются формулой (7-6):

$$\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta_y} \sum_{i=1}^{q-1} \dot{I}_i \Delta_{ik}.$$

Физический смысл этой формулы заключается в том, что *узловое напряжение любого узла линейной электрической цепи может быть получено как алгебраическая сумма напряжений, вызываемых в этом узле каждым из задающих токов в отдельности*. Таким образом, формула (7-6), так же как и (7-4), представляет собой математическую запись метода наложения, справедливого для линейных электрических цепей.

При определении частичных слагающих узловых напряжений по методу наложения необходимо считать включенными внутренние проводимости тех источников тока, которые принимаются отсутствующими при вычислении слагающих напряжений. Если источники тока заданы без внутренних проводимостей, т. е. проводимости их равны нулю, то при пользовании методом наложения ветви с неучтенными источниками тока разрываются.

Если в линейной электрической цепи заданными являются одновременно источники напряжения и источники тока, то метод наложения применим и в этом случае. Например, ток в каком-либо контуре данной цепи может быть получен в результате алгебраического сложения токов, вызываемых в этом контуре поочередным действием источников напряжения и тока. При этом отсутствующие

источники напряжения заменяются внутренними сопротивлениями, а отсутствующие источники тока — внутренними проводимостями.

Пример 7-4. Пользуясь методом наложения, определить ток в ветви Z_3 схемы рис. 7-4.

Искомый ток $\dot{I}_3$ определяется как сумма токов $\dot{I}'_3$ и $\dot{I}''_3$, проходящих через ветвь Z_3 , под воздействием источников э. д. с. $\dot{E}_1$ (рис. 7-9, а) и $\dot{E}_2$ (рис. 7-9, б), взятых порознь.

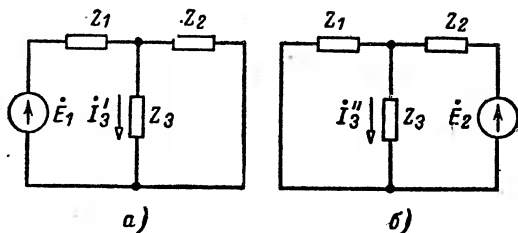


Рис. 7-9. Пример 7-4.

Токи $\dot{I}'_3$ и $\dot{I}''_3$ суммируются, а не вычитаются, так как положительные направления их выбраны совпадающими:

$$\dot{I}'_3 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{Z_2 \dot{E}_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1};$$

$$\dot{I}''_3 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} = \frac{Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1};$$

следовательно,

$$\dot{I}_3 = \dot{I}'_3 + \dot{I}''_3 = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}.$$

Пример 7-5. Задана симметричная схема с неравными э. д. с.: $E_1 = 12$ в и $E_2 = 8$ в (рис. 7-10, а). Значения сопротивлений (в омах) указаны на схеме. Вычислить токи I_1 и I_2 . Заметив, что $E_1 = \frac{1}{2} (E_1 + E_2) + \frac{1}{2} (E_1 - E_2)$ и $E_2 = \frac{1}{2} (E_1 + E_2) - \frac{1}{2} (E_1 - E_2)$, можно вместо заданной схемы рассмотреть две симметричные схемы, в каждой из которых э. д. с. источников равны. В первой схеме источники имеют э. д. с. $\frac{1}{2} (E_1 + E_2) = 10$ в и полярность их одинакова; во второй схеме источники имеют э. д. с. $\frac{1}{2} (E_1 - E_2) = 2$ в и полярность различна.

Пользуясь методикой, описанной в § 4-9, произведем соответствующие расщепления и замыкания накоротко по оси симметрии (рис. 7-10, б и в).

Искомые токи найдутся методом наложения:

$$I_1 = \frac{10}{4} + \frac{2}{6} = 2,83a; I_2 = \frac{10}{4} - \frac{2}{6} = 2,17a.$$

7-5. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ПРОВОДИМОСТИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ

В электротехнике, радиотехнике и теории автоматического регулирования широко используются понятия о входных и передаточных функциях.

Условимся называть источник э. д. с. независимым или автономным (самостоятельным), если э. д. с. источника не зависит от напряжений и токов в цепи (с понятием «зависимый» источник мы встретимся в § 7-7).

Пусть в какую-либо ветвь контура электрической цепи включен независимый источник э. д. с. $\dot{E}_i$ (рис. 7-11, а), причем данная ветвь не является общей, а принадлежит только контуру i . Если вся остальная часть электрической цепи не содержит независимых источников электрической энергии, то в соответствии с формулой (7-4) заданная э. д. с. $\dot{E}_i$ вызовет в данном контуре i и в каком-либо другом контуре k токи

$$\dot{I}_i = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_z} \dot{E}_i \quad (7-7)$$

и

$$\dot{I}_k = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z} \dot{E}_i. \quad (7-8)$$

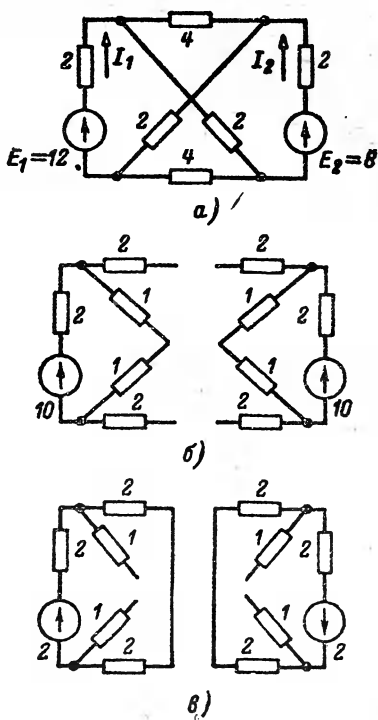


Рис. 7-10. Пример 7-5.

На рис. 7-11, а показаны контуры i и k заданной электрической цепи.

Отношение контурного тока к э. д. с., действующей в том же контуре, при отсутствии независимых источников во всех остальных контурах называется входной проводимостью электрической цепи:

$$\frac{\dot{I}_i}{\dot{E}_i} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_z} = Y_{ii}. \quad (7-9)$$

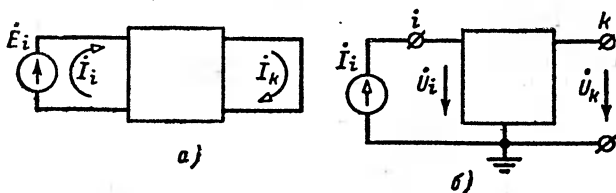


Рис. 7-11. Определение понятий входных и передаточных проводимостей и сопротивлений.

В свою очередь отношение контурного тока к э. д. с., действующей в другом контуре, при отсутствии независимых источников во всех остальных контурах называется передаточной (или взаимной) проводимостью контуров:

$$\frac{\dot{I}_k}{\dot{E}_i} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z} = Y_{ki}. \quad (7-10)$$

Элементами определителя системы и алгебраических дополнений в выражениях (7-9) и (7-10) служат собственные и общие сопротивления контуров заданной электрической цепи. Определитель Δ_z имеет размерность сопротивления в степени n , где n — порядок определителя (равный числу независимых контуров данной цепи); алгебраические дополнения Δ_{ii} и Δ_{ik} имеют размерность сопротивления в степени $n - 1$. В результате деления алгебраического дополнения на определитель системы получается величина, имеющая размерность проводимости.

На основании (7-9) и (7-10) заключаем, что входная и передаточная проводимости численно равны токам в контурах i и k , когда в контуре i действует э. д. с., равная 1 в.

С учетом обозначений (7-9) и (7-10) выражения для токов (7-4) принимают вид:

$$\dot{I}_k = \sum_{i=1}^n Y_{ki} \dot{E}_i. \quad (7-11)$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении узлов i и k электрической цепи в предположении, что к узлу i подключен независимый источник тока¹ $\dot{I}_i$, а вся остальная часть цепи не содержит независимых источников (рис. 7-11, б). В соответствии с (7-6) заданный ток $\dot{I}_i$, обусловит появление узловых напряжений в узлах i и k :

$$\dot{U}_i = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_y} \dot{I}_i \quad (7-12)$$

и

$$\dot{U}_k = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_y} \dot{I}_i. \quad (7-13)$$

Отношение напряжения в узле к току, заданному в том же узле, при отсутствии в схеме других независимых источников называется входным сопротивлением электрической цепи:

$$\frac{\dot{U}_i}{\dot{I}_i} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_y} = Z_{ii}; \quad (7-14)$$

соответственно отношение напряжения в узле к току, заданному в другом узле, при отсутствии в схеме других источников называется передаточным (или взаимным) сопротивлением узлов:

$$\frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_i} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_y} = Z_{ki}. \quad (7-15)$$

Элементами определителя системы и алгебраических дополнений в (7-14) и (7-15) служат собственные и общие проводимости узлов заданной электрической цепи. Определитель Δ_y имеет размерность проводимости в степени m , где m — порядок определителя (на единицу меньший числа узлов в заданной схеме); алгебраические дополнения Δ_{ii} и Δ_{ik} имеют размерность проводимости

¹ Источник тока называется независимым, или автономным, если ток источника не зависит от напряжений и токов в цепи.

в степени $m - 1$. В результате деления алгебраического дополнения на определитель системы получается величина, имеющая размерность сопротивления.

На основании (7-14) и (7-15) заключаем, что входное и передаточное сопротивления узлов численно равны напряжениям в узлах i и k (относительно базисного узла), когда в узле i задан ток, равный 1 а.

С учетом обозначений (7-14) и (7-15) выражения для напряжений (7-6) принимают вид:

$$\dot{U}_k = \sum_{i=1}^{q-1} Z_{ki} \dot{I}_i. \quad (7-16)$$

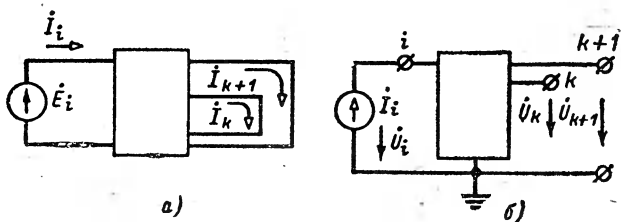


Рис. 7-12. Отношение токов (а) и напряжений (б).

Следует иметь в виду, что входным сопротивлением может также называться величина, обратная выражению (7-9), а входной проводимостью — величина, обратная выражению (7-14).

Очевидно, что для одной и той же пары зажимов электрической цепи, не содержащей источников, величины Y_{ii} и Z_{ii} , определяемые из (7-9) и (7-14), взаимно обратны, т. е.

$$Z_{ii} = \frac{1}{Y_{ii}}.$$

Отношение двух контурных токов $\dot{I}_k$ и $\dot{I}_{k+1}$, вызываемых в контурах k и $k + 1$ источником э. д. с. $\dot{E}_i$, включенным в контур i (рис. 7-12, а), определяется на основании (7-10), отношением соответствующих передаточных проводимостей, а именно:

$$\frac{\dot{I}_k}{\dot{I}_{k+1}} = \frac{Y_{ki} \dot{E}_i}{Y_{k+1,i} \dot{E}_i} = \frac{Y_{ki}}{Y_{k+1,i}}.$$

Аналогично отношение двух узловых напряжений $\dot{U}_k$ и $\dot{U}_{k+1}$, обусловливаемых в узлах k и $k+1$ источником тока $\dot{I}_i$, заданным в узле i (рис. 7-12, б), определяется на основании (7-15) отношением соответствующих передаточных сопротивлений:

$$\frac{\dot{U}_k}{\dot{U}_{k+1}} = \frac{Z_{ki} \dot{I}_i}{Z_{k+1,i} \dot{I}_i} = \frac{Z_{ki}}{Z_{k+1,i}}.$$

Входные и передаточные сопротивления и проводимости, а также отношения одноименных электрических величин (токов, напряжений) подробнее рассмотрены в гл. 9.

7-6. ТЕОРЕМА ОБРАТИМОСТИ (ИЛИ ВЗАИМНОСТИ)

Пассивные линейные электрические цепи обладают важным свойством, известным под названием **о б р а т и м о с т и**. Основанная на этом свойстве теорема обратимости (или взаимности) может быть сформулирована

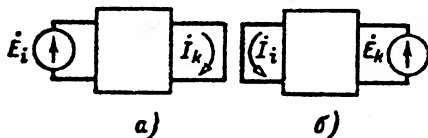


Рис. 7-13. Теорема обратимости (вариант с источником э. д. с.).

в двух вариантах: применительно к источникам э. д. с. и тока. Ограничимся рассмотрением первого варианта.

Вариант с источником э. д. с. На рис. 7-13 условно показана электрическая цепь с выделенными контурами i и k . Электродвижущая сила $\dot{E}_i$ в контуре i (рис. 7-13, а) вызывает ток в контуре k , который согласно (7-10) равен:

$$\dot{I}_k = Y_{ki} \dot{E}_i.$$

Соответственно э. д. с. $\dot{E}_k$ в контуре k (рис. 7-13, б) вызывает ток в контуре i

$$\dot{I}_i = Y_{ik} \dot{E}_k.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\dot{I}_k}{\dot{I}_i} = \frac{Y_{ki} \dot{E}_i}{Y_{ik} \dot{E}_k}.$$

Алгебраические дополнения Δ_{ik} и Δ_{ki} , входящие в выражения Y_{ki} и Y_{ik} различаются только тем, что в них строки заменены столбцами с учетом того, что их элементы — общие сопротивления контуров заданной цепи — не изменяются от перестановки индексов.

Поэтому $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$ и, следовательно,

$$Y_{ki} = Y_{ik}. \quad (7-17)$$

Электрические цепи, для которых выполняется условие (7-17), называются обратимыми цепями. Для таких цепей имеем:

$$\frac{\dot{I}_k}{\dot{I}_i} = \frac{\dot{E}_i}{\dot{E}_k}.$$

Если принять $\dot{E}_i = \dot{E}_k$, то $\dot{I}_i = \dot{I}_k$.

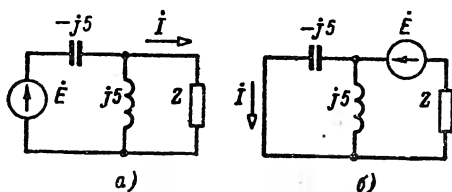


Рис. 7-14. Пример 7-6.

Таким образом, для обратимых цепей справедливо следующее положение: *если некоторая э. д. с., находящаяся в каком-либо контуре электрической цепи, вызывает ток в другом контуре данной цепи, то та же э. д. с., будучи перенесенной во второй контур, вызовет в первом контурный ток той же величины и фазы.*

При соответствующем выборе контурных токов ток в ветви равен контурному току. Поэтому данная теорема справедлива также для токов в ветвях.

Использование свойства обратимости пассивных линейных электрических цепей в ряде случаев упрощает расчеты. С этим важным свойством пассивных линейных цепей нам придется неоднократно встречаться далее, особенно в гл. 9.

Практическое применение теоремы обратимости иллюстрировано в примерах 7-6 и 7-7.

Пример 7-6. Воспользовавшись теоремой обратимости, вычислить ток $\dot{I}$ в схеме рис. 7-14, а при любом конечном значении сопротивления Z . Дано: $\dot{E} = 10 \angle 0^\circ$ в.

Применение теоремы обратимости облегчает в данном случае расчет тем, что после переноса э. д. с. в ветвь Z (рис. 7-14, б) получается схема резонанса токов, в которой ток источника равен нулю; поэтому искомый ток, равный току в емкости схемы рис. 7-14, б находится как отношение э. д. с. к сопротивлению емкостной ветви:

$$\dot{I} = \frac{10 \angle 0^\circ}{-j5} = j2 \text{ а.}$$

7-7. ТЕОРЕМА КОМПЕНСАЦИИ

Токи в электрической цепи не изменятся, если любой участок цепи заменить э. д. с., равной по величине напряжению на данном участке и направленной навстречу току, проходящему по данному участку.

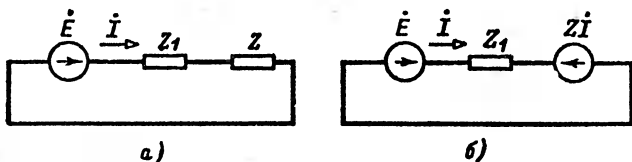


Рис. 7-15. Теорема компенсации.

Справедливость этого положения, носящего название теоремы компенсации, вытекает из того, что любое из слагающих падения напряжений, входящих в уравнение по второму закону Кирхгофа, может быть перенесено в другую сторону уравнения с противоположным знаком, т. е. может рассматриваться как дополнительная э. д. с., направленная навстречу току.

Иллюстрацией сказанного выше служит рис 7-15; уравнение по второму закону Кирхгофа, записанное для схемы рис. 7-15, а как $\dot{E} = Z_1 \dot{I} + Z \dot{I}$, может быть представлено в виде $\dot{E} - Z \dot{I} = Z_1 \dot{I}$.

Последней записи уравнения соответствует схема рис. 7-15, б, в которой вместо сопротивления Z включена э. д. с. $Z \dot{I}$, направленная противоположно току $\dot{I}$.

Данная теорема справедлива и для разветвленных электрических цепей. Рисунки 7-16, а и б иллюстрируют возможность замены комплексного сопротивления Z источником э. д. с. $\dot{E} = Z(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$, действующим навстречу току $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$, проходящему через сопротивление Z .

Вместо источника э. д. с. может быть включен источник тока (рис. 7-16, в), обуславливающий прохождение между узлами 1 и 2 того же тока, что и в схеме рис. 7-16, а; токи и напряжения в остальной части цепи при этом не меняются.

Следует заметить, что э. д. с. или ток источника, заменяющего собой участок цепи, определяется в зависимости от тока, проходящего через данный участок. При изменении параметров остальной части цепи ток на данном участке в общем случае изменяется, и поэтому указанный выше источник не является самостоятельным, а представляет собой так называемый зависимый, или неавтономный, источник.

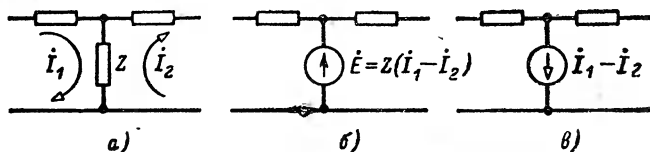


Рис. 7-16. Замена пассивной ветви (а) зависимым источником э. д. с. (б) или зависимым источником тока (в).

Применение теоремы компенсации облегчает изучение свойств линейных электрических цепей. Так, заменяя какой-либо участок цепи неавтономным источником э. д. с. или тока и пользуясь методом наложения, легко убедиться в том, что напряжения и токи в остальной части цепи являются линейными функциями напряжения на данном участке или тока, проходящего через него. Например, если при изменении комплексного сопротивления Z в какой-либо ветви изменяется ток $\dot{I}_1$ в этой ветви, то ток $\dot{I}_2$ в какой-либо другой ветви связан с $\dot{I}_1$ линейной функциональной зависимостью

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2(Z=\infty)} + K \dot{I}_1;$$

здесь $\dot{I}_{2(Z=\infty)}$ — значение тока $\dot{I}_2$ при $Z = \infty$, т. е. при разомкнутой первой ветви.

Комплексный коэффициент K находится из условия, что при $Z = 0$

$$\dot{I}_{2(Z=0)} = \dot{I}_{2(Z=\infty)} + K \dot{I}_{1(Z=0)};$$

поэтому

$$I_2 = I_{2(Z=\infty)} + \frac{I_{2(Z=0)} - I_{2(Z=\infty)}}{I_{1(Z=0)}} I_1.$$

7-8. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ТОКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ОДНОЙ ВЕТВИ

На основании методов наложения и теоремы компенсации вытекает следующая теорема об изменении токов в электрической цепи, вызываемом изменением параметра в одной ветви данной цепи.

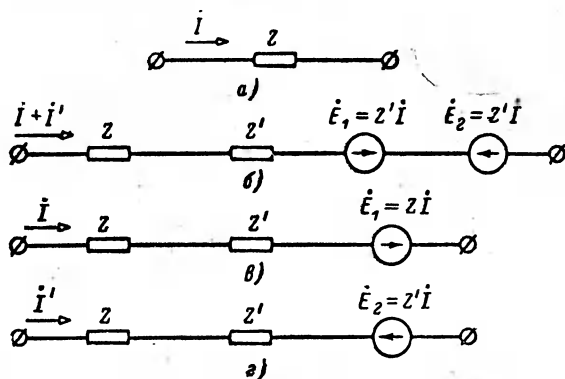


Рис. 7-17. Изменение сопротивления ветви.

Если комплексное сопротивление какой-либо ветви электрической цепи изменится на величину $\pm Z'$, то изменение токов в цепи будет таким же, какое вызывается действием в ветви $Z \pm Z'$ э. д. с., направленной противоположно первоначальному току I в данной ветви и равной по величине и знаку $\pm Z'I$.

Сказанное поясняется на рис. 7-17.

Положим, что в ветви, комплексное сопротивление которой равно Z , проходит ток I (рис. 7-17, а). Спрашивается, как изменится ток, если сопротивление ветви изменится на величину $+Z'$, т. е. станет равным $Z + Z'$.

На рис. 7-17, б показана ветвь с измененным сопротивлением; предполагается, что в результате изменения

сопротивления Z на величину Z' первоначальный ток I изменился на величину I' , т. е. стал равным $I + I'$.

Включим в данную ветвь две противоположно направленные э. д. с. $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$, равные $Z'I$ каждая (ток в цепи при этом не изменится), и, пользуясь методом наложения, рассмотрим действие этих э. д. с. поочередно. При отсутствии $\dot{E}_2$ получаются условия, тождественные первоначальным, так как схемы рис. 7-17, *a* и *в* эквивалентны: падение напряжения от тока I в Z' компенсируется на основании теоремы компенсации дополнительной э. д. с. $\dot{E}_1 = Z'I$. Следовательно, изменение тока в цепи обуславливается действием э. д. с. с $\dot{E}_2 = Z'I$, направленной навстречу I (рис. 7-17, *г*), что и требовалось доказать.

Применение данной теоремы бывает целесообразным в тех случаях, когда известны токи в цепи до изменения параметров ветви.

Кроме того, измерив ток в электрической цепи с помощью амперметра, сопротивление которого известно, можно, основываясь на этой теореме, уточнить значение тока в цепи, т. е. исключить погрешность, вызванную сопротивлением прибора. Дополнительный ток, обусловленный сопротивлением прибора, согласно теореме равен:

$$I' = \frac{-\dot{E}_2}{Z_3} = \frac{-IZ'}{Z_3},$$

где I — истинный ток (без амперметра); Z' — сопротивление амперметра; Z_3 — эквивалентное сопротивление пассивной цепи (с амперметром).

Через амперметр проходит ток

$$I_a = I + I' = I \left(1 - \frac{Z'}{Z_3} \right).$$

Следовательно, имея показание амперметра I_a , можно вычислить искомый ток по формуле

$$I = I_a \left| \frac{Z_3}{Z_3 - Z'} \right|.$$

Следует заметить, что размыкание какой-либо ветви заданной электрической цепи соответствует предельному случаю $Z' = \infty$, когда решение по приведенной выше теореме становится неопределенным. В этом случае применим любой из следующих приемов:

1. Включим между разомкнутыми точками два источника тока $\dot{I}$, соединенных параллельно. При принятом на рис. 7-18, а направлении этих источников ток в данной ветви в соответствии с первым законом Кирхгофа равен нулю. Применяя метод наложения и считая, что ток $\dot{I}$

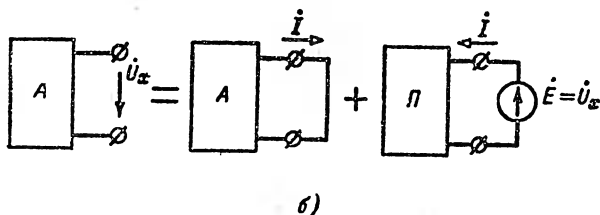
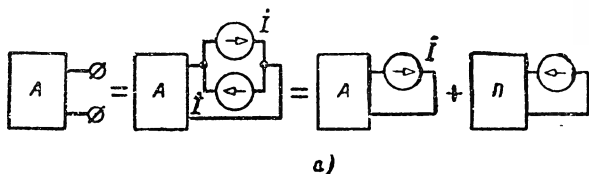


Рис. 7-18. Размыкание ветви.

а — вариант с источником тока; б — вариант с источником э. д. с.

выбран равным по величине току в ветви до ее размыкания, приходим к выводу, что размыкание ветви равносильно добавлению к токам предшествующего режима новой системы токов, обусловленных действием в данной ветви пассивной электрической цепи источника тока, равного току, протекавшему в той же ветви перед ее размыканием.

2. Обозначим через $\dot{U}_x$ напряжение между разомкнутыми зажимами электрической цепи (напряжение холостого хода) и присоединим к ним источник э. д. с. $\dot{E} = \dot{U}_x$; токи и напряжения в цепи при этом не изменятся. Применив метод наложения, получим, что распределение токов и напряжений в исходной цепи складывается из соответствующих электрических величин двух схем (рис. 7-18, б): активной цепи с замкнутыми зажимами и пассивной цепи с источником э. д. с. $\dot{U}_x$, присоединенным к указанным зажимам.

На рис. 7-18 буквой A обозначена заданная цепь, содержащая источники электрической энергии (активная

цепь), а буквой Π — та же цепь в предположении, что на месте источников оставлены только комплексные сопротивления или проводимости (пассивная цепь). Знаки сложения и равенства на рис. 7-18 относятся к токораспределениям.

Практическое применение теоремы об изменении токов в электрической цепи проиллюстрировано ниже на примере расчета несбалансированной мостовой схемы.

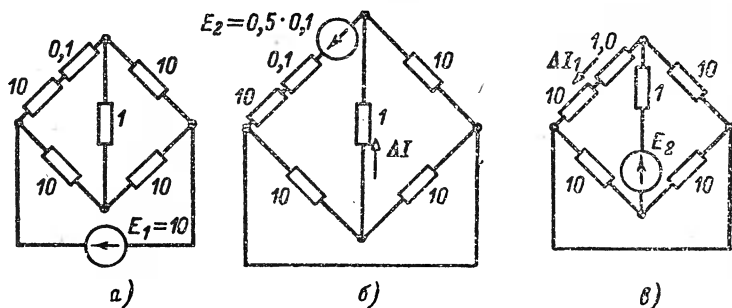


Рис. 7-19. Пример 7-7.

Пример 7-7. Найти ток в диагональной ветви мостовой схемы рис. 7-19, а, если сопротивления в трех плечах моста равны 10 ом каждое и сопротивление в четвертом плече равно 10,1 ом; сопротивление диагональной ветви 1 ом.

При равенстве сопротивлений всех плеч (10 ом) ток в диагональной ветви отсутствовал бы и через каждое плечо проходил бы ток, равный $10/20 = 0,5$ а. Увеличение сопротивления одного плеча на 0,1 ом равносильно на основании указанной выше теоремы введению в измененное плечо дополнительной э. д. с. $0,1 \cdot 0,5 = 0,05$ в (рис. 7-19, б). Последняя вызывает в диагональной ветви ток, который может быть вычислен по теореме об эквивалентном источнике напряжения (см. § 7-9). Искомый ток равен 0,00225 а.

Для вычисления этого тока можно также воспользоваться теоремой обратимости (вариант с э. д. с.), согласно которой искомый ток равен тому току, который проходил бы через плечо с сопротивлением 10,1 ом, если бы источник э. д. с. 0,05 в был перенесен в диагональную ветвь (рис. 7-19, в).

В этом случае расчет может быть упрощен, если пренебречь разницей в сопротивлениях плеч мостовой схемы; приближенное значение искомого тока получается равным $0,05/2,11 = 0,00227$ а.

7-9. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ИСТОЧНИКЕ

Теорема об эквивалентном источнике часто применяется в расчетах электрических цепей. С помощью этой

важной теоремы сложная электрическая схема с произвольным числом источников электрической энергии приводится к схеме с одним источником, благодаря чему расчет электрической цепи упрощается.

Существуют два варианта теоремы об эквивалентном источнике: вариант с источником напряжения и вариант с источником тока.

ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ИСТОЧНИКЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Ток в любой ветви mn линейной электрической цепи не изменится, если электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником напряжения, э. д. с. этого источника должна быть равна напряжению на зажимах разомкнутой ветви mn , а внутреннее сопротивление источника должно равняться входному сопротивлению пассивной электрической цепи со стороны зажимов m и n при разомкнутой ветви mn .

Данная теорема доказывается следующим образом: в ветвь mn вводятся две равные по величине и противоположно направленные э. д. с. $\dot{U}_{mn}$ при условии, что $\dot{U}_{mn}$ равно напряжению между зажимами m и n при разомкнутой ветви mn , т. е. напряжению холостого хода (рис. 7-20).

Применение метода наложения в соответствии с рис. 7-20 приводит к выводу, что ток в ветви Z равен:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_0 + Z}. \quad (7-18)$$

Z_0 — комплексное сопротивление всей пассивной цепи P . Таким образом, ток в ветви Z получается в предположении, что данная ветвь подключена к источнику напряжения, э. д. с. которого равна $\dot{U}_{mn}$, а внутреннее сопротивление равно Z_0 . Следует заметить, что в соответствии с рис. 7-20 ток в какой-либо другой ветви заданной электрической цепи может быть получен в результате алгебраического сложения тока, проходящего через эту ветвь при разомкнутых зажимах m и n , с током, возникающим в ней под воздействием э. д. с. $\dot{U}_{mn}$ в ветви Z (когда остальная цепь пассивна). Поэтому, если известно распределение токов в электрической цепи при разомкнутой ветви Z , то последующее распределение токов при включенной ветви находится весьма легко наложе-

нием на предыдущий режим тех токов, которые обуславливаются воздействием на пассивную цепь э. д. с. $\dot{U}_{mn}$ в ветви Z .

Как уже указывалось выше, метод наложения применим не только к токам, но и к напряжениям. Поэтому, пользуясь описанным приемом, можно находить также и распределение напряжений.

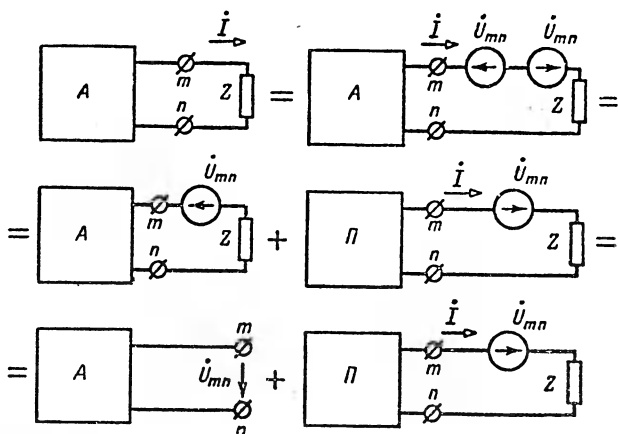


Рис. 7-20. Теорема об эквивалентном источнике напряжения.

При наличии в электрической цепи нескольких источников э. д. с. и тока одинаковой частоты напряжение холостого хода является линейной функцией заданных э. д. с. и токов источников.

Для доказательства теоремы об эквивалентном источнике в ветвь вводились две противоположно направленные э. д. с., равные напряжению холостого хода в этой ветви. Такой же прием может быть применен одновременно и к двум ветвям любой сложной активной цепи. Тогда действительное токораспределение в цепи получится как сумма токораспределений в двух схемах:

- 1) в активной схеме — при разомкнутых двух ветвях;
- 2) в пассивной схеме — при питании ее из двух ветвей источниками э. д. с., равными напряжениям холостого хода на этих ветвях и направленными по токам, т. е. так же, как напряжения холостого хода.

Указанный прием представляет удобство в том случае, когда известно токораспределение при режиме холостого хода для обеих ветвей. Тогда при замыкании этих ветвей достаточно лишь наложить токи, полученные из второй схемы с двумя э. д. с.

Пример 7-8. Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике напряжения, определить токи в ветвях схемы рис. 7-4.

Размыкание ветви и соответственно нахождение напряжения холостого хода могут быть произведены в любой из трех ветвей за-

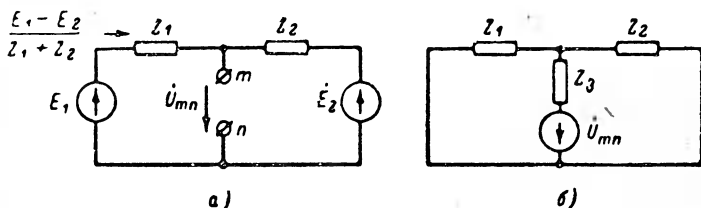


Рис. 7-21. Пример 7-8.

данной электрической цепи. Рисунок 7-21 показан для случая размыкания ветви Z_3 .

Напряжение холостого хода $\dot{U}_{mn}$ находится в этом случае как разность э. д. с. $\dot{E}_1$ и падения напряжения от тока $\frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2}$ в комплексном сопротивлении Z_1 (рис. 7-21, а):

$$\dot{U}_{mn} = \dot{E}_1 - Z_1 \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Под воздействием э. д. с. $\dot{U}_{mn}$ в схеме рис. 7-21, б через комплексное сопротивление Z_3 идет ток

$$i_3 = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1},$$

который разветвляется в Z_1 и Z_2 : через Z_1 проходит ток

$$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} i_3,$$

а через Z_2 — ток

$$\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} i_3.$$

Искомые токи в ветвях Z_1 и Z_2 определяются в результате сложения токов, проходящих в схемах рис. 7-21, а и б, т. е.

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \\ &= \frac{(Z_2 + Z_3) \dot{E}_1 - Z_3 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \\ &= \frac{-(Z_1 + Z_3) \dot{E}_2 + Z_3 \dot{E}_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}. \end{aligned}$$

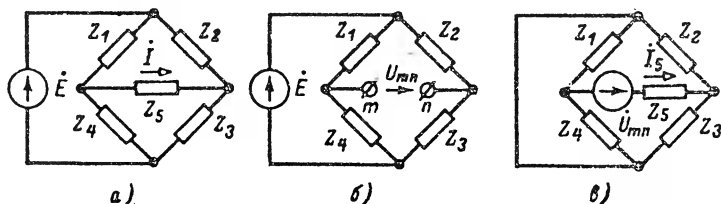


Рис. 7-22. Пример 7-9.

Данный пример иллюстрирует применение теоремы об эквивалентном источнике для вычисления токов в разных ветвях, причем не ставится цель получить решение кратчайшим путем.

Пример 7-9. Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике напряжения, определить ток в диагональной ветви мостовой схемы рис. 7-22, а.

Разомкнув ветвь Z_5 , находим напряжение холостого хода $\dot{U}_{mn}$ как разность напряжений на участках Z_4 и Z_3 (рис. 7-22, б):

$$\dot{U}_{mn} = Z_4 \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_4} - Z_3 \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \dot{E}.$$

Сопротивление между зажимами m и n при $E=0$ и разомкнутой ветви Z_5 равно (рис. 7-22, в):

$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

На основании (7-18)

$$i_5 = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_0 + Z_5}.$$

ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ИСТОЧНИКЕ ТОКА

Ток в любой ветви mn линейной электрической цепи не изменится, если электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником тока; ток этого источника должен быть равен току, проходящему между зажимами m и n , замкнутыми накоротко, а внутренняя проводимость источника должна равняться входной проводимости пассивной электрической цепи со стороны зажимов m и n при разомкнутой ветви mn .

Данное положение вытекает из условия эквивалентности источников напряжения и тока, а именно: источник напряжения, э. д. с. которого равна напряжению холостого хода $\dot{U}_{mn}$, а внутреннее со-

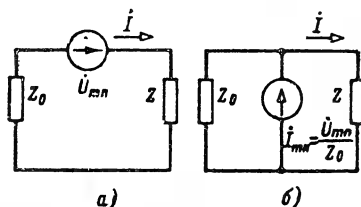


Рис. 7-23. Теорема об эквивалентном источнике тока.

противление равно Z_0 (рис. 7-23, а), может быть заменен источником тока (рис. 7-23, б)

$$i_{mn} = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_0} = Y_0 \dot{U}_{mn}.$$

Последнее выражение есть не что иное, как ток, проходящий между зажимами m и n , замкнутыми накоротко (ток короткого замыкания). Искомый ток в цепи равен:

$$i = \frac{Z_0}{Z_0 + Z} i_{mn} = \frac{Y}{Y_0 + Y} i_{mn}, \quad (7-19)$$

где

$$Y = \frac{1}{Z}.$$

Если известно распределение токов в электрической цепи при замкнутых зажимах m и n , то распределение токов в цепи при включенной ветви Z может быть найдено посредством наложения на предыдущий режим тех токов, которые получаются в результате присоединения источника тока i_{mn} к ветви Z (когда остальная часть цепи пассивна).

При наличии в электрической цепи нескольких источников э. д. с. и тока одинаковой частоты ток короткого замыкания является линейной функцией заданных э. д. с. и токов источников.

Пример 7-10. Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике тока, определить ток $\dot{I}_3$ в ветви Z_3 схемы рис. 7-4.

Ток эквивалентного источника равен току короткого замыкания ($Z_3=0$, рис. 7-24, а):

$$\dot{I}_{mn} = \dot{I}_k = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2} = Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2.$$

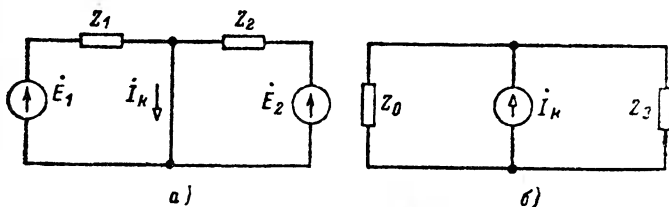


Рис. 7-24. Пример 7-10.

Комплексная проводимость эквивалентного источника равна $Y_0 = Y_1 + Y_2$. Следовательно, на основании (7-19) искомый ток равен:

$$\dot{I}_3 = \frac{Y_3}{Y_0 + Y_3} \dot{I}_k = \frac{Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \dot{I}_k = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}.$$

7-10. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Математическая символика и правила матричной алгебры позволяют упростить запись систем уравнений, получающихся при расчете сложных электрических цепей. В этом отношении матричную алгебру можно сравнить со стенографией, которая облегчает и ускоряет запись.

Напомним, что матрица представляет собой совокупность величин, называемых ее элементами и расположенных в виде прямоугольной таблицы¹. Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной. Матрица, содержащая один столбец, называется столбцовой или матрицей-столбцом.

Приведенная в § 7-2 система уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа для контурных э. д. с. и контурных токов, может быть представлена в виде произведений квадратной матрицы собственных и общих сопротивлений контуров на столбцовую матрицу контурных токов. При этом следует помнить, что произведением двух матриц называется матрица, элементы которой равны сумме произведений всех элементов соответствующей строки первой матри-

¹ Матрицу не следует смешивать с определителем. Определитель может быть вычислен, матрица же не может быть приравнена числу, а может равняться только матрице. Две матрицы считаются равными, если они содержат одинаковое число строк и столбцов и если равны все их соответственные элементы.

цы на соответствующие элементы столбца второй матрицы. Итак, уравнения (7-2) в матричной форме имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{(11)} & Z_{(12)} & \cdots & Z_{(1n)} \\ Z_{(21)} & Z_{(22)} & \cdots & Z_{(2n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{(n1)} & Z_{(n2)} & \cdots & Z_{(nn)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{pmatrix}$$

или сокращенно

$$\|\dot{E}\| = \|Z\| \cdot \|\dot{I}\|.$$

Данное матричное уравнение может быть решено относительно матрицы $\|\dot{I}\|$. Для этого обе стороны уравнения должны быть умножены на матрицу, обратную матрице $\|Z\|$:

$$\|Z\|^{-1} \cdot \|\dot{E}\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|Z\| \cdot \|\dot{I}\|.$$

Как известно, для получения обратной матрицы необходимо заменить в исходной матрице каждый элемент его алгебраическим дополнением, затем заменить строки соответствующими столбцами¹ и полученную таким образом матрицу разделить на определитель исходной матрицы. Напомним, что алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы называется умноженный на $(-1)^{i+k}$ определитель, получающийся из элементов матрицы после исключения i -й строки и k -го столбца. В свою очередь определителем матрицы называется определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, расположенных в том же порядке, что и в матрице. Итак, обратная матрица имеет вид:

$$\|Z\|^{-1} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix};$$

здесь Δ_z — тот же определитель системы, что и в § 7-2.

Произведение обратной матрицы на исходную матрицу равно единичной матрице, т. е. квадратной матрице, у которой все элементы главной диагонали (идущей от левого верхнего угла к правому нижнему) равны единице, а остальные элементы равны нулю.

Следовательно,

$$\|Z\|^{-1} \cdot \|Z\| = \|1\|$$

и

$$\|Z\|^{-1} \cdot \|\dot{E}\| = \|1\| \cdot \|\dot{I}\|,$$

где $\|1\|$ — единичная матрица.

Произведение единичной матрицы на матрицу $\|\dot{I}\|$ равно матрице $\|\dot{I}\|$, поэтому

$$\|\dot{I}\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|\dot{E}\|,$$

¹ Матрица, получающаяся в результате замены строк соответствующими столбцами, называется сопряженной или транспонированной относительно исходной матрицы.

или в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_n \end{pmatrix}.$$

В результате умножения матриц получаются выражения для контурных токов вида (7-4).

Аналогично решается матричное уравнение для узловых напряжений

$$\| \dot{I} \| = \| Y \| \cdot \| \dot{U} \|,$$

где $\| \dot{I} \|$ и $\| \dot{U} \|$ — столбцовые матрицы токов, заданных в узлах, и искоемых узловых напряжений; $\| Y \|$ — квадратная матрица собственных и общих проводимостей узлов;

$$\| Y \|^{-1} \cdot \| \dot{I} \| = \| Y \|^{-1} \cdot \| Y \| \cdot \| \dot{U} \|,$$

откуда

$$\| \dot{U} \| = \| Y \|^{-1} \cdot \| \dot{I} \|.$$

В результате умножения матрицы $\| Y^{-1} \|$ на матрицу $\| \dot{I} \|$ получаются выражения для узловых напряжений вида (7-6).

Матричная алгебра широко применяется для расчета сложных четырехполюсников (см. гл. 9).

В случае относительно простой электрической схемы без взаимной индукции матрица контурных сопротивлений легко записывается непосредственно по заданной схеме. В более сложных случаях матрица контурных сопротивлений может быть получена с помощью матрицы сопротивлений ветвей. Ниже показана связь, существующая между матрицами контурных сопротивлений и сопротивлений ветвей¹. Вывод, сделанный в общей форме, проиллюстрирован на примере простой схемы рис. 7-25, легко решаемом обычным способом.

Обозначим токи, напряжения, э. д. с. и сопротивления ветвей индексом «в», а соответствующие контурные величины — индексом «к». Связь между токами в ветвях и контурными токами выражается зависимостью

$$\| i_v \| = \| C \| \cdot \| i_k \| \quad (7-20)$$

Здесь $\| C \|$ — матрица соединений (инцидентий). Число ее строк равно числу ветвей, а число столбцов числу контурных токов. Элементами матрицы соединений служат числа +1, -1 и 0, +1 означает, что выбранные на схеме положительные направления тока в ветви и контурного тока совпадают; -1 берется, когда их направления различны; наконец, 0 означает, что данная ветвь не входит в рассматриваемый контур.

¹ Существует также и зависимость между матрицами проводимостей [Л. 9, 15 и 16].

Например, для схемы рис. 7-25 имеем:

$$\begin{Bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix}.$$

Уравнения вида (1-12) по второму закону Кирхгофа в матричной форме записываются так:

$$\|C\|_T \cdot \|\dot{U}_B\| = \|0\|, \quad (7-21)$$

где $\|C\|_T$ — матрица, транспонированная относительно матрицы соединений $\|C\|$ и отличающаяся от последней тем, что строки заменены столбцами.

Строка $\|C\|_T$, так же как и столбец $\|C\|$ содержит, кроме нулей, единицы на местах, соответствующих ветвям данного контура; поэтому «произведение» ее на $\|\dot{U}_B\|$ дает алгебраическую сумму напряжений ветвей этого контура. Согласно второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений на ветвях в любом контуре равна нулю, т. е. «произведение» любой строки $\|C\|_T$ на столбец $\|\dot{U}_B\|$ должно равняться нулю, что и выражает (7-21).

Например, для схемы рис. 7-25 имеем:

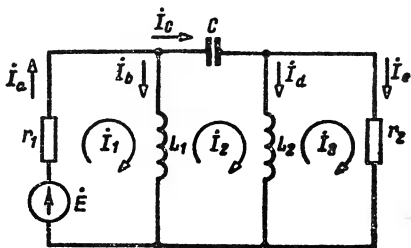


Рис. 7-25. Схема к примеру расчета матричным методом.

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{U}_c \\ \dot{U}_d \\ \dot{U}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Считая, что направления э. д. с. и токов в ветвях совпадают, получаем матрицу напряжений на ветвях в виде:

$$\|\dot{U}_B\| = \|Z_B\| \cdot \|i_B\| - \|\dot{E}_B\|. \quad (7-22)$$

Подстановка (7-20) и (7-22) дает:

$$\|Z_B\| \cdot \|C\| \cdot \|i_K\| - \|\dot{E}_B\| = \|\dot{U}_B\|, \quad (7-23)$$

а подстановкой (7-23) в (7-21) получаем:

$$\|C\|_T \cdot \|Z_B\| \cdot \|C\| \cdot \|i_K\| - \|C\|_T \cdot \|\dot{E}_B\| = \|0\|,$$

откуда

$$\|C\|_T \cdot \|Z_B\| \cdot \|C\| \cdot \|\dot{I}_K\| = \|C\|_T \cdot \|\dot{E}_B\|.$$

Сопоставив это уравнение с уравнением для контурных токов

$$\|Z_K\| \cdot \|\dot{I}_K\| = \|\dot{E}_K\|,$$

приходим к выводу, что э. д. с. в ветвях и контурные э. д. с. связаны матричным уравнением

$$\|C\|_T \cdot \|\dot{E}_B\| = \|\dot{E}_K\|, \quad (7-24)$$

а матрица контурных сопротивлений получается по формуле

$$\|Z_K\| = \|C\|_T \cdot \|Z_B\| \cdot \|C\|. \quad (7-25)$$

Для схемы рис. 7-25 матрица сопротивлений ветвей записывается в виде:

$$\|Z_B\| = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений согласно (7-25) равна:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} r_1 + j\omega L_1 & -j\omega L_1 & 0 \\ -j\omega L_1 & j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C} & -j\omega L_2 \\ 0 & -j\omega L_2 & r_2 + j\omega L_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

7-11. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ЕМКОСТЯМИ

В гл. 4 было показано, что при параллельном соединении емкостей $C_1, C_2, \dots, C_n$ эквивалентная емкость равна

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{k=1}^n C_k;$$

при последовательном соединении емкостей эквивалентная емкость находится из уравнения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

Например, для двух последовательно соединенных емкостей C_1 и C_2 эквивалентная емкость составляет:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Распределение напряжений на этих емкостях находится решением уравнений

$$u_1 + u_2 = u \text{ и } q = C_1 u_1 = C_2 u_2,$$

откуда

$$u_1 = u \frac{C_2}{C_1 + C_2}; \quad u_2 = u \frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

т. е. напряжения распределяются обратно пропорционально емкостям.

Данное правило распространяется на мгновенные, амплитудные и действующие значения напряжений в цепи синусоидального тока, а также на постоянные напряжения в цепи постоянного тока.

Здесь, так же как и раньше, под емкостями подразумеваются идеальные конденсаторы, активная проводимость которых равна нулю.

В случае соединения трех емкостей звездой или треугольником возможно преобразование звезды емкостей в эквивалентный треугольник емкостей или обратно (рис. 7-26, а и б) по формулам:

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}; \quad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3};$$

$$C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}}; \quad C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23} C_{12}}{C_{31}};$$

$$C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31} C_{23}}{C_{12}}.$$

Эти соотношения, вытекающие из выражений (4-1) и (4-2), справедливы для всех частот, включая нулевую частоту (т. е. при постоянных токах и напряжениях).

Если напряжения в электрической цепи постоянны, то электрические заряды емкостей сохраняют постоянную величину, находясь в статическом равновесии.

Для нахождения распределения электрических зарядов емкостей и соответственно напряжений на емкостях при статическом равновесии зарядов пользуются зако-

ном сохранения количества электричества и вторым законом Кирхгофа.

По закону сохранения количества электричества алгебраическая сумма зарядов на обкладках емкостей, соединенных в узел и не подключенных к источнику электрической энергии, равна алгебраической сумме зарядов,

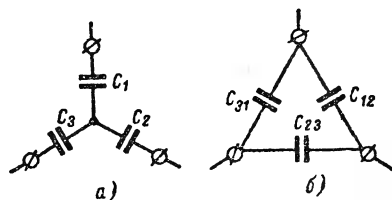


Рис. 7-26. Соединение емкостей звездой (а) и треугольником (б).

имевшихся на этих обкладках до их соединения.

В самом деле, положим, что несколько отдельных емкостей, предварительно заряженных (некоторые из них могли и не иметь заряда), соединяются в узел и включаются своими другими концами в какую-либо электрическую цепь. Если обкладки емкостей, соединенных в узел, отделены от остальной части цепи идеальным диэлектриком, то сосредоточенные на них начальные электрические заряды не могут перейти из рассматриваемого узла в другую часть цепи; по этой же причине не может быть притока заряда к узлу извне.

Из сказанного следует, что если на обкладках, соединяемых в узел, первоначально имелись заряды $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ (каждый из этих зарядов в зависимости от полярности обкладок мог соответственно иметь положительный или отрицательный знак), то после перераспределения зарядов между обкладками, соединенными в узел, алгебраическая сумма зарядов в узле должна остаться неизменной, т. е. если $q'_1 + q'_2 + \dots + q'_n = q_0$, то

$$\Sigma q = q_0. \quad (7-26)$$

Если емкости не были предварительно заряжены, то после включения их в электрическую цепь на их обкладках появятся заряды, алгебраическая сумма которых

в узлах, не присоединенных к источникам электрической энергии, равна нулю:

$$\Sigma q = 0.$$

По второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма э. д. с. в контуре равна алгебраической сумме напряжений на участках контура, в том числе на входящих в него емкостях. В цепях с емкостями и источниками э. д. с.

$$\Sigma e = \Sigma \frac{q}{C}. \quad (7-27)$$

Формулы (7-26) и (7-27) справедливы как для переменных, так и для постоянных зарядов.

Следует заметить, что для расчета цепей с емкостями с учетом первоначальных зарядов емкостей и при наличии в схеме источников постоянных или синусоидальных э. д. с. применим метод наложения.

7-12. ДУАЛЬНЫЕ ЦЕПИ

Под условием дуальности понимается такое соответствие электрических цепей, при котором закон изменения контурных токов в одной цепи подобен закону изменения узловых напряжений в другой цепи.

Для элементов электрической цепи, изображенных на рис. 7-27 (слева и справа), зависимости между напряжениями и токами имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= r i_r; \\ u_L &= L \frac{di_L}{dt}; \\ u_C &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt; \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

$$\left. \begin{aligned} i_r &= g' u_r; \\ i_C &= C' \frac{du_C}{dt}; \\ i_L &= \frac{1}{L'} \int_{-\infty}^t u_L dt. \end{aligned} \right\} \quad (7-29)$$

Следует иметь в виду, что входящие в уравнения (7-28) и (7-29) напряжения и токи, имеющие одинаковые буквенные обозначения, не равны друг другу.

Из сравнения уравнений (7-28) с уравнениями (7-29) видно, что условию дуальности удовлетворяют следующие элементы:

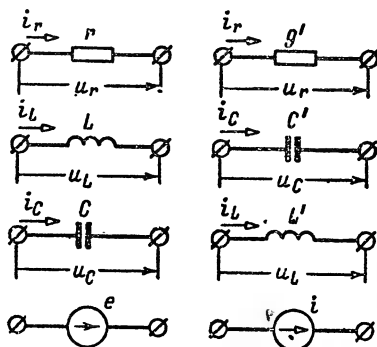
- 1) сопротивление и проводимость;
- 2) индуктивность и емкость;
- 3) источник э. д. с. и источник тока.

Элементы цепи, удовлетворяющие условию дуальности, называются аналогами или дуальными элементами.

При последовательном соединении элементов цепи суммируются напряжения, при параллельном соединении элементов цепи — токи. Поэтому последовательному соединению элементов соответствует параллельное соединение их аналогов, а параллельному соединению элементов — последовательное соединение их аналогов.

Например, при замене последовательно соединенных элементов r , L и C (рис. 7-28, а) их аналогами g' , C' и L' , соединенными параллельно (рис. 7-28, б), получаем дуальные цепи.

Уравнение напряжений для исходной цепи



$$e(t) = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt \quad (7-30)$$

Рис. 7-27. Дуальные элементы.

подобно уравнению токов для второй цепи

$$i(t) = g'u + C' \frac{du}{dt} + \frac{1}{L'} \int_{-\infty}^t u dt. \quad (7-31)$$

Контурному току i в уравнении (7-30) соответствует узловое напряжение u в уравнении (7-31).

Если э. д. с. и ток источников подчинены одному и тому же закону, например синусоидальны, и имеют одинаковую начальную фазу, то законы изменения контурного тока в схеме рис. 7-28, а и узлового напряжения в схеме рис. 7-28, б совпадают при соблюдении пропорции

$$\frac{r}{g'} = \frac{L}{C'} = \frac{L'}{C}. \quad (7-32)$$

В случае сложной электрической цепи каждой ее области, ограниченной независимым контуром, с учетом также области, внешней по отношению ко всей цепи, соответствует узел дуальной цепи. Следовательно, число областей заданной цепи равно числу узлов дуальной цепи.

При построении дуальной цепи по отношению к заданной планарной цепи удобно пользоваться следующим графическим приемом (рис. 7-28).

В каждой области, ограниченной независимым контуром заданной цепи, наносится точка, рассматриваемая в качестве будущего узла дуальной цепи.

Узлы, соответствующие каждой паре смежных областей, соединяются параллельными ветвями, число которых равно числу элементов, последовательно включенных в цепь, граничащую с указанными областями. Элементами параллельных ветвей являются аналоги элементов заданной цепи.

Графический способ построения дуальной цепи иллюстрирован ниже на примере рис. 7-29

Исходная цепь (рис. 7-29, а) содержит три независимых контура. Внутри этих контуров фиксируем три точки (1, 2 и 3), соответствующие

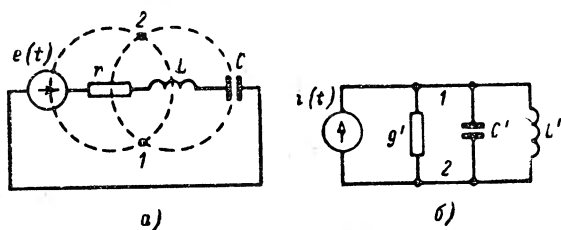


Рис. 7-28. Дуальные цепи.

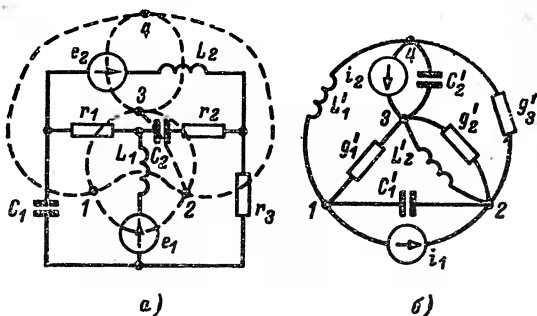


Рис. 7-29. Графический прием построения дуальных цепей.

щие узлам исходной дуальной цепи. Четвертую точку, соответствующую узлу 4, фиксируем в области, внешней по отношению к заданной цепи. Проводим между этими точками пунктирные линии, пересекающие элементы цепи и представляющие собой ветви дуальной цепи; пересекаемые элементы заменяются их аналогами, включенными между соответствующими узлами дуальной цепи.

При согласовании направлений э. д. с. и токов дуальных источников руководствуются следующим правилом; если э. д. с. источника действует в положительном направлении контура (по ходу часовой стрелки), то ток источника тока в дуальной цепи направлен к узлу, соответствующему данному контуру исходной схемы.

Следует заметить, что если графический способ построения дуальной цепи повторно применить к схеме рис. 7-29, б, то получится исходная схема рис. 7-29, а.

Существуют дуальные электрические цепи, имеющие одинаковую схему, например, мостового типа (автодуальные схемы).

При соблюдении пропорции (7-32) комплексное сопротивление цепи, общей для двух смежных контуров схемы, пропорционально комплексной проводимости цепи, соединяющей два соответствующих узла дуальной цепи. Например, в схеме рис. 7-28, а комплексное сопротивление цепи равно:

$$Z = r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

а в схеме рис. 7-28, б комплексная проводимость цепи

$$Y' = g' - j \left(\frac{1}{\omega L'} - \omega C' \right).$$

Полагая

$$g' = \frac{r}{k^2}; \quad L' = k^2 C; \quad C' = \frac{L}{k^2},$$

где k — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность сопротивления, получаем:

$$Z = k^2 Y'.$$

Аналогичная пропорциональность получается и между входным сопротивлением и проводимостью более сложных дуальных цепей. Это свойство используется, в частности, в теории электрических фильтров (см. гл. 10).

7-13. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Явления, исследуемые на основе законов физики, описываются математически при помощи систем уравнений. Исходя из единства уравнений, соответствующих некоторым двум явлениям, происходящим в различных областях, например в электрической цепи и механической системе, можно установить аналогию между этими явлениями. «Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к различным областям явлений»¹.

Благодаря единству уравнений электрических и механических систем исследование явлений в механической системе может быть заменено исследованием процессов в электрической цепи. Выполнение электрических цепей обычно сопряжено с меньшими трудностями, чем выполнение механических систем; они более компактны и, что особенно важно, измерения в них более точны и удобны. Процессы в электромеханических системах, представляющих совокупность электрических и механических устройств, также могут с успехом исследоваться с помощью электромеханических аналогий.

¹ В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Соч., изд. 5-е, т. 18, стр. 306.

Механические системы с сосредоточенными параметрами, которые по аналогии с электрическими цепями будем называть механическими цепями, состоят из активных элементов (источников энергии) и пассивных элементов.

Рассмотрим идеализированные элементы простейших линейных механических цепей, совершающих поступательное или вращательное движение (комбинированное поступательно-вращательное движение опустим).

В случае поступательного движения заданная внешняя сила, приложенная к цепи, рассматривается как источник силы, а заданная скорость какой-либо точки цепи — как источник скорости.

В случае вращательного движения заданный вращающий момент, приложенный к цепи, рассматривается как источник момента, а заданная угловая скорость какой-либо точки — как источник угловой скорости.

Роль пассивных элементов в механических цепях выполняют массы, моменты инерции, пружины и механические (демпфирующие) сопротивления.

Массой называется идеализированный элемент механической цепи, обладающий инерцией. В нем накапливается кинетическая энергия. При этом термин «масса» и соответствующее ему условное обозначение m применяются для обозначения как самого инерционного элемента, так и его количественной характеристики. Сила F (ньютон — н), приложенная к центру тяжести свободного твердого тела, сообщает ему линейную скорость v (м/сек) и линейное ускорение dv/dt (м/сек²), совпадающие по направлению с силой. Если масса неизменна, то

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad (7-33)$$

т. е. масса m (кг) представляет собой коэффициент пропорциональности между силой и ускорением.

На вращение тела влияет не только масса, но и распределение ее относительно оси вращения. Поэтому вращающийся инерционный элемент характеризуется моментом инерции $J = mr^2$, где r — радиус инерции тела относительно оси вращения. Это пассивный элемент, в котором накапливается кинетическая энергия вращения.

Момент M (н·м), приложенный к свободному твердому телу, сообщает ему угловую скорость ω (рад/сек) и угловое ускорение $d\omega/dt$ (рад/сек²). Если момент инерции постоянен, то

$$M = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (7-34)$$

т. е. момент инерции J (кг·м²) представляет собой коэффициент пропорциональности между моментом и угловым ускорением.

Кинетическая энергия поступательного движения равна $\frac{1}{2} mv^2$, и кинетическая энергия вращательного движения $\frac{1}{2} J\omega^2$ (дж).

Пружина играет роль пассивного элемента, в котором накапливается потенциальная энергия. Сила натяжения или давления, развиваемая соответственно растянутой или сжатой пружиной при данном относительном перемещении x (м) ее конца, пропорциональна ее жесткости K , измеряемой в н/м = кг/сек².

Сила F , необходимая для относительного перемещения x конца пружины, действует вдоль оси x и равна по закону Гука:

$$F = Kx = K \int v dt.$$

Продифференцировав обе части уравнения, получим:

$$v = K^{-1} \frac{dF}{dt}. \quad (7-35)$$

Величина, обратная K , называется податливостью пружины.

Момент, необходимый для создания углового перемещения φ конца пружины, подвергающейся скручиванию, пропорционален жесткости K ($n \cdot m / \text{рад}$):

$$M = K\varphi = K \int \omega dt,$$

откуда

$$\omega = K^{-1} \frac{dM}{dt}. \quad (7-36)$$

В этом случае коэффициент пропорциональности K^{-1} называется податливостью при кручении.

Потенциальная энергия при растяжении или сжатии пружины равна $\frac{1}{2} Kx^2$, а потенциальная энергия при скручивании $\frac{1}{2} K\varphi^2$ (дж).

Демпфирующее механическое сопротивление создается вязким трением. Вследствие механического сопротивления происходит необратимый процесс преобразования кинетической энергии в тепло.

В линейной механической цепи с поступательным движением сила трения пропорциональна первой степени относительной скорости точек, принадлежащих трущимся поверхностям:

$$F = fv, \quad (7-37)$$

где f — коэффициент трения ($n \cdot \text{сек} / m = \text{кг} / \text{сек}$).

При вращательном движении момент силы трения пропорционален первой степени относительной угловой скорости:

$$M = f \frac{d\varphi}{dt} = f\omega. \quad (7-38)$$

В этом случае коэффициент трения f измеряется в $n \cdot m \cdot \text{сек} / \text{рад} = \text{кг} \cdot m^2 / \text{сек} \cdot \text{рад}$.

Мощность, расходуемая на трение, равна при поступательном движении fv^2 , а при вращательном $f\omega^2$ (вт).

Сопоставление уравнений (7-33) — (7-38) с уравнениями элементов электрических цепей

$$u = L \frac{di}{dt}; \quad i = C \frac{du}{dt}; \quad u = ri$$

показывает, что механическая сила и вращающий момент соответствуют напряжению, линейная и угловая скорости — току, масса и момент инерции — индуктивности, податливость пружины — емкости, механическое сопротивление — сопротивлению.

На рис. 7-30 приведены условные изображения пассивных элементов механической цепи с поступательным движением¹ и показаны их электрические аналоги.

Рассмотренная система электромеханических аналогий, сведенная в табл. 7-1, не является единственной. Взяв дуальную электрическую цепь, можно заключить, что механическая сила и вращающий момент соответствуют току, линейная и угловая скорости — напряжению, масса и момент инерции — емкости, податливость пружины — индуктивности, механическое сопротивление — проводимости.

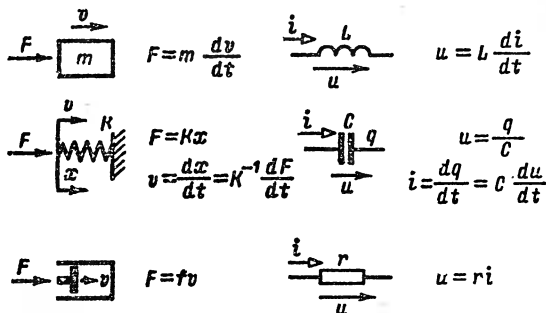


Рис. 7-30. Пассивные элементы механической цепи с поступательным движением и их электрические аналоги.

Дифференциальные уравнения движения механической цепи могут быть выведены на основе второго закона Ньютона, который для поступательного движения гласит: если на тело действует несколько сил, то его ускорение совпадает по направлению с равнодействующей этих сил и пропорционально отношению последней к массе тела.

Для вращательного движения применяется следующая формулировка второго закона Ньютона: если относительно оси вращения тела действует несколько моментов, то его угловое ускорение относительно той же оси пропорционально отношению результирующего момента к моменту инерции тела.

Дифференциальные уравнения движения механической цепи могут быть также получены на основании принципа Даламбера: при движении тела действующие на него силы и сила инерции удовлетворяют уравнению равновесия сил.

Уравнения такого же типа, получаемые для электрических цепей на основании законов Кирхгофа, могут быть либо уравнениями напряжений, либо уравнениями токов.

В качестве примера рассмотрим простейшую механическую систему: масса m находится под воздействием силы F и опирается на пружину (рис. 7-31, а). Тело движется между неподвижными направляющими, и между ним и направляющими возникает вязкое трение. Массой пружины пренебрегаем.

¹ Механическое сопротивление изображается в виде демпфера.

Электромеханические аналогии

Механическая цепь	Электрическая цепь
Сила F (н) или вращающий момент M (н·м)	Напряжение u (в)
Перемещение линейное x (м) или угловое φ (рад)	Заряд q (к)
Скорость линейная v (м/сек) или угловая ω (рад/сек)	Ток i (а)
Масса m (кг) или момент инерции J (кг·м ²)	Индуктивность L (гн)
Податливость K^{-1} при поступательном движении (м/н) или кручении (рад/н·м)	Емкость C (ф)
Коэффициент трения f при поступательном движении (кг/сек) или вращении (кг·м ² /сек·рад)	Сопротивление r (ом)
Кинетическая энергия $\frac{1}{2} mv^2$ или $\frac{1}{2} J \omega^2$ (дж)	Магнитная энергия $\frac{1}{2} Li^2$ (дж)
Потенциальная энергия $\frac{1}{2} Kx^2$ или $\frac{1}{2} K \varphi^2$ (дж)	Электрическая энергия $\frac{1}{2} \times C u^2$ (дж)
Мощность от трения $f v^2$ или $f \omega^2$ (вт)	Мощность в сопротивлении $r i^2$ (вт)
Мощность Fv или $M\omega$ (вт)	Мгновенная мощность ui (вт)

На рис. 7-31, б изображена схема данной механической цепи. По второму закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F - fv - K \int v dt$$

или

$$F = fv + m \frac{dv}{dt} + K \int v dt.$$

Пользуясь первой системой электромеханических аналогий (сила — напряжение, табл. 7-1), получаем уравнение, электрической цепи, показанной на рис. 7-31, в:

$$e = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

В свою очередь, применив вторую систему аналогий (сила — ток), получим уравнение электрической цепи, показанной на рис. 7-31, з:

$$i = g'u + C' \frac{du}{dt} + \frac{1}{L'} \int u dt.$$

Таким образом, можно пользоваться двумя системами электро-механических аналогий: в одной из них напряжение, а в другой — ток являются аналогом силы или вращающего момента. Две электрические цепи, аналогичные одной и той же механической цепи, являются дуальными, так как контурные токи одной цепи соответствуют узловым напряжениям другой.

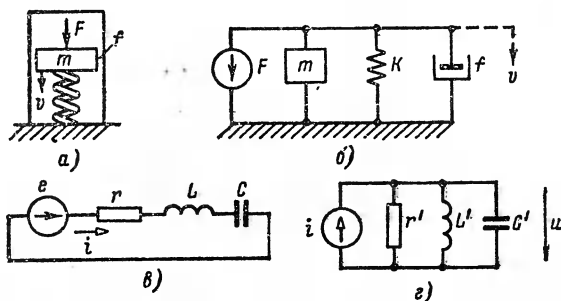


Рис. 7-31. Механическая цепь (а и б) и ее электрические аналоги (в и г)

Электромеханические аналогии находят практическое применение в электрических моделях. Вопросы, затронутые в этом параграфе, подробно рассмотрены в [Л. 5].

7-14. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

7-1. Методом контурных токов определить ток в ветви Z_3 рис. 7-4.

Ответ см. в тексте (пример 7-4).

7-2. Методом узловых напряжений определить напряжение на ветви Z_3 рис. 7-7.

Ответ:

$$\frac{Y_2 \dot{I}_1 - Y_1 \dot{I}_2}{Y_1 Y_2 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_1}$$

7-3. Решить задачу 7-2 методом наложения.

7-4. Решить задачу 7-1 по теореме об изменении токов в электрической цепи, зная ток в ветви при $Z_3 = 0$.

7-5. В схеме рис. 7-4 принять $\dot{E}_1 = 230 \angle 30^\circ$; $\dot{E}_2 = 230 \angle 0^\circ$ в; $Z_1 = Z_2 = j1$; $Z_3 = -j10$ ом. Используя решение задачи 7-1, в общем виде вычислить активные мощности и построить векторные диаграммы.

Ответ: $P_1 = -P_2 = 13,9$ квт.

7-6. В схеме рис. 7-4 $\dot{E}_1 = 100 \angle 0^\circ$ в; $Z_1 = Z_2 = j 10$; $Z_3 = 20 \angle 0^\circ$ ом.

Найти $\dot{E}_2$, если мощность первого источника активная, а второго — реактивная.

Ответ: $212 \angle -45^\circ$ в.

7-7. В схеме рис. 7-4 $\dot{E}_1 = 120 \angle 0^\circ$; $\dot{E}_2 = 110 \angle 0^\circ$ в; $Z_1 = 0,4 + j 0,6$; $Z_2 = 0,3 + j 1,2$; $Z_3 = 10$ ом.

По теореме об эквивалентном источнике вычислить напряжение на сопротивлении Z_3 .

Ответ: $113,9 \angle -2^\circ$ в.

7-8. Вычислить ток в диагональной ветви мостовой схемы рис. 7-22, если $E = 10$ в; $Z_1 = 20 + j 10$; $Z_2 = -j 10$; $Z_3 = 20$; $Z_4 = -j 20$; $Z_5 = 10$ ом.

Ответ: $0,351$ а.

7-9. Доказать, что при наличии комплексного сопротивления Z в одной ветви электрической цепи ток в какой-либо другой ветви равен:

$$\dot{I} = \dot{I}_{(Z=\infty)} + \frac{\dot{I}_{(Z=0)} - \dot{I}_{(Z=\infty)}}{Z + Z_0} Z_0,$$

где $\dot{I}_{(Z=\infty)}$, $\dot{I}_{(Z=0)}$ — токи во второй ветви при соответственно разомкнутой и замкнутой первой ветви; Z_0 — комплексное сопротивление цепи, к которой подключено сопротивление Z , при отсутствии источников.

7-10. Вычислить ток в индуктивности L_2 схемы рис. 7-29, а, если $e_1 = 10 \sin \omega t$; $e_2 = 20 \cos \omega t$ в; $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ ом; $L_1 = L_2 = 0,1$ мГн; $C_1 = C_2 = 1$ мкФ; $f = 400$ Гц.

Применить: а) метод контурных токов; б) метод узловых напряжений; в) теорему об эквивалентном источнике.

7-11. На примере рис. 7-28 показать, что если отношение комплексных э. д. с. и тока источников дуальных цепей равно k , то активные мощности на их зажимах равны, а реактивные различаются только по знаку (смысл коэффициента k пояснен в § 7-12).

7-12. Пояснить целесообразность применения различных методов расчета электрических цепей к схемам разной конфигурации.

7-13. Проиллюстрировать на примере практическую целесообразность применения теоремы об изменении токов в электрической цепи.

7-14. В чем заключается различие между общим и передаточным (взаимным) сопротивлениями?

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

8-1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При изменении магнитного поля, связанного с каким-либо витком, в последнем наводится э. д. с., которая в соответствии с законом электромагнитной индукции определяется скоростью изменения магнитного потока не-

зависимо от того, чем вызвано изменение потока. В катушке, состоящей из большого числа витков, наводится э. д. с., пропорциональная скорости изменения потоко-сцепления, т. е. скорости изменения суммы магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками данной катушки. Если все витки катушки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то, как указывалось в § 1-5, потоко-сцепление равно произведению магнитного потока на число витков.

При рассмотрении цепей синусоидального тока до сих пор учитывалось явление самоиндукции, т. е. наведение э. д. с. в электрической цепи при изменении потоко-сцепления самоиндукции, обусловленного током в этой цепи. Отношение потоко-сцепления самоиндукции к току характеризовалось скалярной величиной — индуктивностью L .

Теперь нам предстоит заняться рассмотрением явления взаимной индукции, т. е. наведения э. д. с. в электрической цепи при изменении потоко-сцепления взаимной индукции, обусловленного током в другой электрической цепи. Цепи, в которых наводятся э. д. с. взаимной индукции, называются индуктивно связанными цепями.

Связь потоко-сцепления взаимной индукции одной электрической цепи с током в другой цепи, равная отношению потоко-сцепления взаимной индукции в одной цепи к току в другой цепи, характеризуется взаимной индуктивностью¹ M , которая, так же как и индуктивность, представляет собой скалярную величину.

Если потоко-сцепление $w_1\Phi_{M2}$ первой цепи обусловлено током i_2 второй цепи, то взаимная индуктивность цепей определяется как

$$M_{12} = \frac{w_1\Phi_{M2}}{i_2}. \quad (8.1)$$

Соответственно если потоко-сцепление $w_2\Phi_{M1}$ второй цепи обусловлено током i_1 первой цепи, то

$$M_{21} = \frac{w_2\Phi_{M1}}{i_1}. \quad (8.2)$$

Для линейных электрических цепей всегда выполняется равенство

¹ Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «коэффициент взаимной индукции».

$$M_{12} = M_{21},$$

и поэтому индексы у параметра взаимной индуктивности могут быть опущены.

Справедливость последнего равенства можно доказать, если выразить потоки взаимной индукции Φ_{M1} и Φ_{M2} через соответствующие н. с. $i_1 w_1$ и $i_2 w_2$ и магнитную проводимость путей, по которым замыкаются эти потоки¹:

$$\Lambda_M = \Sigma \frac{\mu_a S}{l};$$

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{w_1 (i_2 w_2 \Lambda_M)}{i_2} = w_1 w_2 \Lambda_M; \\ M_{21} &= \frac{w_2 (i_1 w_1 \Lambda_M)}{i_1} = w_1 w_2 \Lambda_M. \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

Отсюда также видно, что величина M пропорциональна произведению чисел витков катушек и магнитной проводимости пути общего потока, которая зависит от магнитной проницаемости среды и взаимного расположения катушек.

На основании сказанного формулируется свойство взаимности для индуктивно связанных цепей: *если ток, проходящий в первой цепи, обуславливает во второй цепи потокосцепление взаимной индукции $w_2 \Phi_{M1}$, то такой же ток, проходящий во второй цепи, обусловит в первой цепи потокосцепление взаимной индукции $w_1 \Phi_{M2}$ той же величины.*

8-2. ПОЛЯРНОСТИ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ КАТУШЕК; Э. Д. С. ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Напомним, что положительные направления тока и создаваемого им магнитного потока согласуются всякий раз по правилу правоходового винта. Условимся положительные направления токов i_1 и i_2 в двух индуктивно связанных катушках считать *согласными*, если положительные направления создаваемых ими магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции совпадают.

¹ Картина распределения мгновенных силовых трубок потоков Φ_{M1} и Φ_{M2} не зависит от величин токов i_1 и i_2 , т. е. при любых токах она одинакова; поэтому проводимость Λ_M для каждого из этих потоков одна и та же.

На рис. 8-1, *а* и *б* показаны индуктивно связанные катушки, насаженные на общий сердечник; здесь в зависимости от направления намотки витков выбраны такие положительные направления для токов i_1 и i_2 , при которых магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке совпадают. Таким образом, рис. 8-1, *а* и *б* иллюстрирует согласное направление токов.

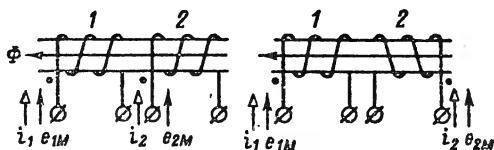


Рис. 8-1. Согласное направление токов в индуктивно связанных катушках.

При согласном направлении токов i_1 и i_2 в двух индуктивно связанных катушках зажимы этих катушек, относительно которых токи i_1 и i_2 направлены одинаково, называются *одноименными* или *однополярными*.

На рис. 8-1, *а*, где витки обеих катушек намотаны в одном направлении, одноименными зажимами являются зажимы, отмеченные точками (два других зажима на рис. 8-1, *а* составляют вторую пару одноименных зажимов).

Аналогичным образом на рис. 8-1, *б*, где витки катушек намотаны в противоположных направлениях, одноименные зажимы также отмечены точками.

Таким образом, *одноименные зажимы индуктивно связанных катушек* характерны тем, что при одинаковом направлении токов i_1 и i_2 относительно этих зажимов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются.

В связи с введением понятия об одноименных зажимах при вычерчивании электрических схем нет необходимости показывать намотку витков индуктивно связанных катушек, а достаточно разметить на схеме их одноименные зажимы. На рис. 8-2 показано схематическое изображение двух индуктивно связанных катушек с указанием одноименных зажимов и выбранных положительных на-

правления токов i_1 и i_2 . Как это следует из сказанного выше, токи i_1 и i_2 направлены согласно на рис. 8-2, а и встречно на рис. 8-2, б.

В § 1-5 отмечалось, что положительное направление э. д. с. самоиндукции выбирается совпадающим с положительным направлением тока; поэтому положительные направления магнитного потока и наводимой им э. д. с. самоиндукции связаны правилом правого винта.

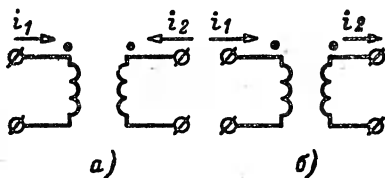


Рис. 8-2. Схематическое изображение индуктивно связанных катушек с обозначением одноименных зажимов и выбранных положительных направлений токов.

а — согласное направление токов; б — встречное направление токов.

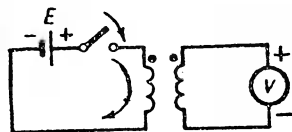


Рис. 8-3. Экспериментальное определение одноименных зажимов.

Точно так же и положительное направление э. д. с. взаимной индукции e_{1M} , наводимой в катушке 1 током i_2 , принимается совпадающим с положительным направлением тока i_1 . Соответственно положительное направление э. д. с. взаимной индукции e_{2M} , наводимой в катушке 2 током i_1 , совпадает с положительным направлением i_2 . При таких условиях и согласном направлении токов i_1 и i_2 в формуле э. д. с. взаимной индукции имеется знак «минус», так же как в формуле э. д. с. самоиндукции (1-2), причем положительное направление магнитного потока и наводимой э. д. с. взаимной индукции связано правилом правого винта:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= - \frac{w_1 d\Phi_{M2}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= - \frac{w_2 d\Phi_{M1}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

Рассмотрим случай, когда через катушку 1 проходит ток i_1 , причем $di_1/dt > 0$. На основании (8-4) в катушке 2 наводится э. д. с. взаимной индукции $e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt} < 0$.

В этом случае потенциал зажима катушки 2, одноименный с тем, в который входит ток i_1 , оказывается выше потенциала второго зажима катушки 2.

Отсюда можно заключить, что *одноименные зажимы двух индуктивно связанных катушек обладают той особенностью, что подведение к одной из них тока, возрастающего по величине, вызывает повышение потенциала на одноименном зажиме второй катушки.*

На указанном свойстве основано экспериментальное нахождение одноименных зажимов индуктивно связанных катушек. Одна из них включается в цепь источника постоянного напряжения, а к другой присоединяется вольтметр постоянного тока (рис. 8-3).

Если в момент замыкания цепи источника стрелка измерительного прибора отклоняется в сторону положительных показаний, то зажимы индуктивно связанных катушек, подключенные к положительному полюсу источника электрической энергии и положительному зажиму измерительного прибора, являются одноименными.

Теперь рассмотрим случай встречного направления токов i_1 и i_2 , схематически изображенный на рис. 8-2, б, где токи i_1 и i_2 направлены различно относительно одноименных зажимов.

Ввиду того что положительные направления магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции в этом случае противоположны, э. д. с. взаимной индукции при встречном направлении токов вычисляются по формулам, содержащим знак «плюс»:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= \frac{w_1 d\Phi_{M2}}{dt} = M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= \frac{w_2 d\Phi_{M1}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

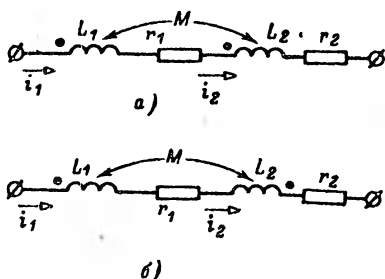


Рис. 8-4. Согласно (а) и встречное (б) направления токов в индуктивно связанных катушках, соединенных последовательно.

Рассмотрим последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек (рис. 8-4, а и б):

При согласном направлении токов (рис. 8-4, а) э. д. с. взаимной индукции $e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}$ и $e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}$, совпадающие по направлению с токами, могут быть при обходе контура в том же направлении заменены падениями напряжения от взаимной индукции $u_{1M} = -e_{1M}$ и $u_{2M} = -e_{2M}$. Поэтому суммарное напряжение на обеих катушках с учетом того, что $i_1 = i_2 = i$, равно:

$$u_{\text{сog}} = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}. \quad (8-6)$$

Полученное выражение показывает, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при согласном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление $r_1 + r_2$ и индуктивность $L_1 + L_2 + 2M$.

Таким образом, как и следовало ожидать, наличие взаимной индукции при согласном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, увеличивает индуктивность цепи.

При встречном направлении токов (рис. 8-4, б) падение напряжения от взаимной индукции при обходе контура в направлении тока получается со знаком минус:

$$u_{\text{вст}} = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}. \quad (8-7)$$

Данное выражение показывает, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при встречном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление $r_1 + r_2$ и индуктивность $L_1 + L_2 - 2M$.

Следовательно, наличие взаимной индукции при встречном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, уменьшает индуктивность цепи.

На основании сказанного можно сделать следующий вывод: при согласном направлении токов падение напряжения от взаимной индукции имеет знак плюс, а при встречном — знак минус (обход цепи в обоих случаях совершается в положительном направлении тока).

8-3. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА РАСЧЕТА ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

Представив ток в комплексной форме, получим выражение э. д. с. взаимной индукции для случая согласного направления токов в комплексной форме:

$$-M \frac{d}{dt} i_m e^{j\omega t} = -j\omega M i_m e^{j\omega t},$$

откуда комплексное действующее значение э. д. с. взаимной индукции

$$\dot{E}_M = -j\omega M i$$

и соответственно падение напряжения от взаимной индукции

$$\dot{U}_M = j\omega M i,$$

где $j\omega M$ — комплексное сопротивление взаимной индукции; в радиотехнике его называют сопротивлением связи.

Комплексные напряжения, соответствующие (8-6) и (8-7), запишутся так:

$$\dot{U}_{\text{сг}} = [r_1 + r_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2M)] i;$$

$$\dot{U}_{\text{вст}} = [r_1 + r_2 + j\omega (L_1 + L_2 - 2M)] i.$$

Отсюда, между прочим, вытекает следующий способ нахождения взаимной индуктивности M : если через $x_{\text{сг}}$ обозначить индуктивное сопротивление цепи при согласном направлении токов последовательно соединенных элементов, а через $x_{\text{вст}}$ — то же при встречном направлении, т. е. положить

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{сг}} &= \omega (L_1 + L_2 + 2M); \\ x_{\text{вст}} &= \omega (L_1 + L_2 - 2M), \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

то в результате вычитания второго равенства из первого получим:

$$M = \frac{x_{\text{сг}} - x_{\text{вст}}}{4\omega}.$$

На рис. 8-5 изображены векторные диаграммы для случаев согласного и встречного направлений токов двух индуктивно связанных катушек, соединенных последова-

тельно. При построении векторных диаграмм принято, что $L_1 > M$ и $L_2 > M$. При этом как при согласном, так и при встречном направлениях токов ток $\dot{I}$ отстает по фазе от результирующего напряжения $\dot{U}$. Если принять $L_1 < M$, то и в этом случае ток получится отстающим, так как всегда $L_1 + L_2 - 2M > 0$ (см. § 8-4). Условия $L_1 < M$ и $L_2 < M$ одновременно существовать не могут.

Порядок расчета разветвленных электрических цепей при наличии взаимной индуктивности иллюстрирован

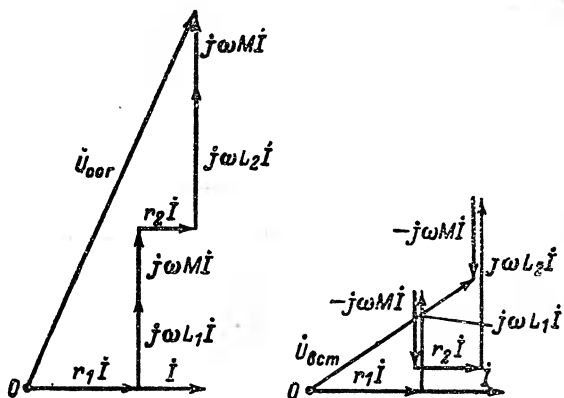


Рис. 8-5. Векторные диаграммы при согласном (а) и встречном (б) направлениях токов.

ниже на примере схемы рис. 8-6. Предполагается, что элементы L_1 , L_2 и L_3 , входящие в схему, связаны индуктивно.

Заданными являются э. д. с. $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ и все параметры цепи. Искомыми являются токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$.

Если бы в каждом контуре был только один индуктивно связанный элемент, то запись уравнений для контурных токов не вызывала бы затруднений. В данном же случае удобнее писать уравнения непосредственно для токов в ветвях, по первому и второму законам Кирхгофа. Совершая обход контуров по направлению токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, будем составлять уравнения напряжений по второму закону Кирхгофа с учетом падений напряжения в сопротивлениях взаимной индукции. При согласном направлении токов падение напряжения в сопротивлении взаим-

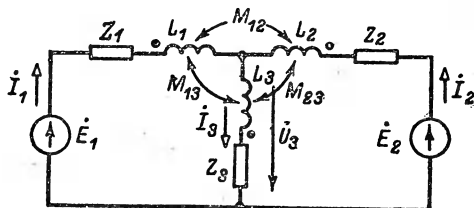
ной индукции входит со знаком плюс ($\dot{U}_M = j\omega M \dot{I}$), а при встречном — со знаком минус ($\dot{U}_M = -j\omega M \dot{I}$):

$$\dot{E}_1 = (Z_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 - j\omega M_{13} \dot{I}_3 + \dot{U}_3;$$

$$\dot{E}_2 = (Z_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_3 + \dot{U}_3;$$

$$\dot{U}_3 = (Z_3 + j\omega L_3) \dot{I}_3 - j\omega M_{13} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_2; \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3;$$

Рис. 8-6 Разветвленная электрическая цепь со взаимной индукцией.



здесь $\dot{U}_3$ — напряжение между узлами схемы. Решение уравнений дает токи.

Отметим, что слагаемые с одинаковыми взаимными индуктивностями входят в уравнения с одинаковыми знаками, что может служить проверкой правильности записи уравнений.

Таким образом, расчет разветвленной электрической цепи при наличии взаимной индуктивности может быть приведен одним из описанных ранее методов с учетом падений напряжений в сопротивлениях взаимной индукции.

Метод узловых напряжений в данном случае непосредственно неприменим¹, так как токи в ветвях зависят не только от напряжений между узлами, к которым присоединены эти ветви, но и от токов других ветвей, с которыми они связаны через взаимную индукцию.

В разобранный выше примере одноименные зажимы всех трех индуктивно связанных элементов были обозначены одинаково (звездочкой), так как предполагалось, что эти элементы имеют общий неразветвленный сердечник.

В том случае, когда три или большее число элементов располагаются на сложном, разветвленном сердечнике, необходимо одноименные зажимы каждой из пар индуктивно связанных элементов обозначать разными условными знаками (см. пример 8-2).

¹ См. сноску на стр. 233.

Пример 8-1. Определить комплексное сопротивление на входе электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединенных катушек, связанных индуктивно при согласном направлении токов (рис. 8-7).

Для положительных направлений контурных токов, показанных на рис. 8-7, составляем контурные уравнения:

$$\dot{E} = (r_1 + j\omega L_1) \dot{i}_1 + j\omega M \dot{i}_2; \quad \dot{E} = (r_2 + j\omega L_2) \dot{i}_2 + j\omega M \dot{i}_1.$$

Обозначим:

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M;$$

тогда

$$\dot{E} = Z_1 \dot{i}_1 + Z_M \dot{i}_2; \quad \dot{E} = Z_M \dot{i}_1 + Z_2 \dot{i}_2.$$

Решив уравнения относительно $\dot{i}_1$ и $\dot{i}_2$, найдем общий ток:

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = \dot{E} \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}.$$

Искомое сопротивление всей цепи по отношению к зажимам источника

$$Z = \frac{\dot{E}}{\dot{i}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}.$$

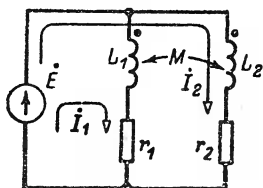


Рис. 8-7. Пример 8-1.

При переключении концов одной из катушек получается параллельное соединение катушек со встречным направлением токов. В этом случае в уравнениях и конечном выражении для Z следует принять Z_M со знаком минус, что приведет к изменению знака при $2Z_M$ в знаменателе упомянутого выражения.

При отсутствии индуктивной связи ($Z_M = 0$) конечное выражение совпадает с известной формулой для сопротивления двух параллельных ветвей.

Пример 8-2. Составить уравнения контурных токов для электрической цепи, состоящей из источника э. д. с. $\dot{E}$, емкости C и трех индуктивно связанных катушек, насаженных на трехстержневой сердечник (рис. 8-8, а). Взаимная индуктивность катушек: M_{12} , M_{13} и M_{23} . Цепь рассматривается как линейная ($M = \text{const}$).

Рисунок 8-8, б изображает электрическую схему заданной цепи. Точками, кружками и квадратиками обозначены одноименные зажимы, соответствующие каждой паре катушек.

Выбрав направления контурных токов, указанные на схеме рис. 8-8, б, составляем контурные уравнения:

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C} (\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3) + (r_1 + j\omega L_1) \dot{i}_1 + j\omega M_{12} \dot{i}_2 - j\omega M_{13} \dot{i}_3;$$

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C} (\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3) + (r_2 + j\omega L_2) \dot{i}_2 + j\omega M_{12} \dot{i}_1 + j\omega M_{23} \dot{i}_3;$$

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C} (\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3) + (r_3 + j\omega L_3) \dot{i}_3 - j\omega M_{13} \dot{i}_1 + j\omega M_{23} \dot{i}_2.$$

Совместное решение уравнений дает токи.

Предлагается читателям написанную выше систему контурных уравнений получить матричным методом, рассмотренным в § 7-10.

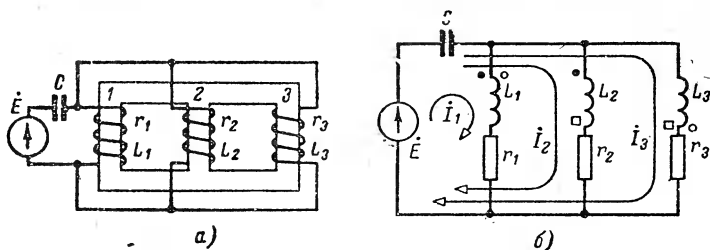


Рис. 8-8. Пример 8-2.

Указание. Матрица соединений для схемы рис. 8-8 имеет вид:

$$\|C\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица сопротивлений ветвей равна:

$$\|Z_B\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{j\omega C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} & -j\omega M_{13} \\ 0 & j\omega M_{12} & r_2 + j\omega L_2 & j\omega M_{23} \\ 0 & -j\omega M_{13} & j\omega M_{23} & r_3 + j\omega L_3 \end{vmatrix}.$$

8-4. КОЭФФИЦИЕНТ ИНДУКТИВНОЙ СВЯЗИ. ИНДУКТИВНОСТЬ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим картину магнитного поля индуктивно связанных катушек, схематически представленную на рис. 8-9 (для согласного направления токов).

Положим, что первая катушка состоит из ω_1 витков, а вторая из ω_2 витков, расположенных в каждой катушке настолько близко друг к другу, что магнитный поток охватывает целиком витки данной катушки.

В общем случае, когда по обеим катушкам проходят токи i_1 и i_2 , магнитные потоки могут быть представлены

как результат наложения потоков, создаваемых каждым током в отдельности.

На рис. 8-9 приняты следующие обозначения магнитных потоков:

Φ_1 — весь поток, созданный током i_1 первой катушки;

Φ_{M1} — поток взаимной индукции первой катушки, пронизывающий витки второй катушки;

Φ_{s1} — поток рассеяния первой катушки, пронизывающий только витки этой катушки;

Φ_2 , Φ_{M2} , Φ_{s2} — аналогичные потоки, созданные током i_2 второй катушки;

Φ_M — общий поток взаимной индукции, пронизывающий витки обеих катушек.

Из сказанного следует, что

$$\Phi_1 = \Phi_{s1} + \Phi_{M1}; \quad \Phi_2 = \Phi_{s2} + \Phi_{M2}; \quad \Phi_M = \Phi_{M1} + \Phi_{M2}.$$

Чем меньше потоки рассеяния Φ_{s1} и Φ_{s2} , тем больше приближается Φ_{M1} к Φ_1 и соответственно Φ_{M2} к Φ_2 .

При изменении токов i_1 и i_2 во времени изменяются также и потоки, создаваемые этими токами. Индуктивность каждой катушки, как известно, определяется отношением потокосцепления самоиндукции к току данной катушки:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{w_1 \Phi_1}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{s1}}{i_1} + \frac{w_1 \Phi_{M1}}{i_1}; \\ L_2 &= \frac{w_2 \Phi_2}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{s2}}{i_2} + \frac{w_2 \Phi_{M2}}{i_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8-9)$$

Первые слагаемые этих выражений:

$$L_{s1} = \frac{w_1 \Phi_{s1}}{i_1}; \quad L_{s2} = \frac{w_2 \Phi_{s2}}{i_2} \quad (8-10)$$

называются индуктивностями рассеяния катушек.

Магнитные потоки могут быть выражены через произведения н. с. на магнитные проводимости путей, по которым замыкаются эти потоки:

$$\Phi_{s1} = i_1 w_1 \Lambda_{s1}; \quad \Phi_{s2} = i_2 w_2 \Lambda_{s2};$$

$$\Phi_{M1} = i_1 w_1 \Lambda_M; \quad \Phi_{M2} = i_2 w_2 \Lambda_M.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_1 &= w_1^2 (\Lambda_{s1} + \Lambda_M); \\ L_2 &= w_2^2 (\Lambda_{s2} + \Lambda_M). \end{aligned} \quad (8-11)$$

Таким образом, индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков и сумме магнитных проводимостей путей потоков рассеяния и взаимной индукции (см. § 1-7).

Магнитная проводимость в свою очередь зависит от формы и размеров катушек, их взаимного расположения и магнитной проницаемости среды (см. § 8-1). На основании (8-1), (8-2), (8-9) и (8-10) индуктивности рассеяния L_{s1} и L_{s2} можно выразить через L_1 , L_2 и M следующими формулами:

$$L_{s1} = L_1 - \frac{w_1}{w_2} M; \quad L_{s2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M. \quad (8-12)$$

Эти выражения нам понадобятся в следующем параграфе при рассмотрении схемы замещения трансформатора.

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется коэффициентом связи k , определяемым как среднее геометрическое из отношений потока взаимной индукции ко всему потоку катушки, т. е.

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{M1}}{\Phi_1} \frac{\Phi_{M2}}{\Phi_2}}. \quad (8-13)$$

Если выразить потоки через параметры L_1 , L_2 и M по формулам (8-1), (8-2) и (8-9), то получим:

$$k = \sqrt{\frac{M i_1 w_1}{w_2 L_1 i_1} \frac{M i_2 w_2}{w_1 L_2 i_2}}.$$

или

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (8-14)$$

Из формулы (8-13) видно, что коэффициент связи всегда меньше единицы (так как $\Phi_{M1}/\Phi_1 < 1$ и $\Phi_{M2}/\Phi_2 < 1$). Коэффициент связи возрастает с уменьшением потоков рассеяния Φ_{s1} и Φ_{s2} .

С учетом (8-3) и (8-11) коэффициент связи может быть выражен через магнитные проводимости:

$$k = \frac{\Lambda_M}{\sqrt{(\Lambda_{s1} + \Lambda_M)(\Lambda_{s2} + \Lambda_M)}}.$$

Повышение коэффициента связи достигается бифилярным способом намотки катушек (рис. 8-10, а) и применением ферромагнитного сердечника, так как с увеличением магнитной проницаемости и соответственно магнитной проводимости сердечника доля потоков рассеяния снижается.

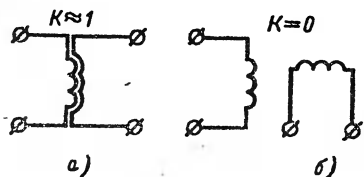


Рис. 8-10. Катушки с коэффициентом связи, близким к единице (а) и нулю (б).

При перпендикулярном расположении осей катушки (рис. 8-10, б) коэффициент связи обращается в нуль. Поэтому, перемещая одну катушку относительно другой, можно

плавно изменять коэффициент связи в широких пределах, а при последовательном соединении этих катушек плавно изменять их результирующую индуктивность. Такое устройство называется **вариометром**.

При наличии ферромагнитного сердечника цепь теряет свойство линейности. Однако в тех случаях, когда по условиям работы магнитная индукция в ферромагнитном сердечнике не выходит за пределы прямолинейного участка кривой намагничивания и его магнитная проницаемость может быть принята постоянной, данная цепь рассматривается как линейная и изложенная выше теория сохраняет силу.

Как уже указывалось, схематическая картина магнитного поля на рис. 8-9 соответствует согласному направлению токов. Если изменить на рис. 8-9 положительное направление тока i_2 , то изменится направление магнитных потоков Φ_{s2} и Φ_{M2} , что будет соответствовать встречному направлению токов.

В этом случае в уравнениях, приведенных выше, должен быть изменен знак перед i_2 , Φ_{s2} , Φ_{M2} и Φ_2 . При этом, как видно из предыдущих формул, величины L_1 , L_2 , M , k , L_{s1} и L_{s2} сохраняются неизменными.

В предыдущем параграфе было показано, что при встречном направлении токов в двух катушках, соеди-

ненных последовательно, результирующая индуктивность равна $L_1 + L_2 - 2M$.

Докажем теперь, что величина $L_1 + L_2 - 2M$ всегда положительна. Для этого воспользуемся двумя неравенствами:

$$(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \geq 0$$

и

$$\sqrt{L_1 L_2} > M.$$

Заменив в первом неравенстве $\sqrt{L_1 L_2}$ меньшей величиной M , получим:

$$L_1 + L_2 - 2M > 0.$$

Пример 8-3. Индуктивная катушка состоит из w витков, соединенных последовательно-согласно. Индуктивность каждого витка равна L . Приняв коэффициент связи витков равным единице, определить результирующую индуктивность катушки.

При отсутствии рассеяния взаимная индуктивность каждой пары витков равна L . По аналогии с (8-6) результирующая индуктивность катушки определится суммой индуктивностей всех витков и взаимной индуктивности, умноженной на число размещений из w витков по два:

$$L_{\text{рез}} = wL + A_w^2 L.$$

Так как

$$A_w^2 = \frac{w!}{(w-2)!} = (w-1)w,$$

то

$$L_{\text{рез}} = wL + (w-1)wL = w^2 L.$$

Как и следовало ожидать, на основании выражений (8-11) результирующая индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков.

8-5. УРАВНЕНИЯ И СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ.

ТРАНСФОРМАТОРА БЕЗ ФЕРРОМАГНИТНОГО СЕРДЕЧНИКА

Трансформатор представляет собой аппарат, передающий энергию из одной цепи в другую посредством электромагнитной индукции. Он применяется для различных целей, но чаще всего предназначается для преобразования величин переменных напряжений и токов¹. Трансформатор состоит из двух или нескольких

¹ Отсюда происходит само название «трансформатор», т. е. преобразователь.

индуктивно связанных обмоток, насаженных на общий сердечник. В настоящем параграфе рассматривается двухобмоточный трансформатор на неферромагнитном сердечнике. Такой трансформатор может служить составной частью линейной электрической цепи в устройствах электроавтоматики, измерительной техники или связи.

Если пренебречь распределенными емкостями, существующими как между витками каждой из обмоток

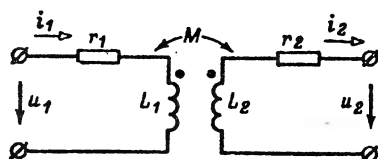


Рис. 8-11. Трансформатор без ферромагнитного сердечника.

трансформатора, так и между самими обмотками и обмотками и землей, то трансформатор может быть представлен схемой рис. 8-11, в которой активные сопротивления обмоток условно вынесены и изображены отдельно.

Обмотка трансформатора, присоединяемая к источнику питания, называется первичной, а обмотка, к которой подключается нагрузка, — вторичной. Соответственно напряжения и токи на зажимах этих обмоток называются первичными и вторичными. Следует заметить, что такие наименования в некоторых случаях являются условными, если в зависимости от режима энергия может передаваться, как в одну, так и в другую стороны.

При заданной полярности зажимов обмоток трансформатора на схеме рис. 8-11 токи направлены встречно (что в данном случае не имеет принципиального значения).

Уравнения трансформатора в дифференциальной форме при встречном направлении токов имеют вид:

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \quad -u_2 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Если напряжения и токи синусоидальны, то уравнения трансформатора в комплексной форме запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 &= (r_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

Эти уравнения равносильны следующим:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= [r_1 + j\omega(L_1 - M) + j\omega M] \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 &= [r_2 + j\omega(L_2 - M) + j\omega M] \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{aligned}$$

Последние уравнения являются контурными уравнениями, которые соответствуют схеме рис. 8-12.

Следовательно, эта схема может рассматриваться в качестве схемы замещения трансформатора без ферромагнитного сердечника.

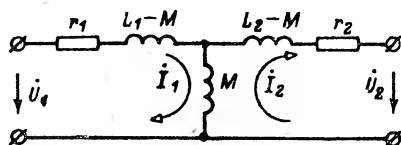


Рис. 8-12. Схема замещения трансформатора без ферромагнитного сердечника.

магнитного сердечника. В отличие от рис. 8-11 в схеме замещения первичная и вторичная цепи трансформатора связаны не индуктивно, а электрически¹.

Если $L_1 = L_2$, то $L_1 - M > 0$ и $L_2 - M > 0$, так как коэффициент связи $k = M / \sqrt{L_1 L_2} < 1$. При неравных значениях L_1 и L_2 одна из разностей ($L_1 - M$ или $L_2 - M$) может оказаться отрицательной. Например, если $\omega_1 \gg \omega_2$, то на основании (8-12) $L_1 > M$ и $L_2 < M$. В этом случае схема замещения рис. 8-12 может быть практически осуществлена только при фиксированной частоте, когда отрицательная индуктивность может быть замещена емкостным элементом; в общем же случае схема с линейным элементом, имеющим отрицательную индуктивность, практически нереализуема.

Входящие в схему рис. 8-12 разности $L_1 - M$ и $L_2 - M$ имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток ($\omega_1 = \omega_2$); в этом случае, как видно из (8-12), они представляют собой индуктивности рассеяния L_{s1} и L_{s2} первичной и вторичной обмоток трансформатора.

При неодинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток ($\omega_1 \neq \omega_2$) на практике часто пользуются так

¹ Такая схема замещения дает возможность, например, применить метод узловых напряжений в цепи со взаимной индукцией.

называемой приведенной схемой замещения трансформатора, показанной на рис. 8-13. Приведение заключается в том, что напряжения $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$ заменяются величинами, приведенными к первичной обмотке: напряжение $\dot{U}_2$ умножается на n , а ток $\dot{I}_2$, делится на n . Здесь $n = w_1/w_2$ — отношение чисел витков, которое называется коэффициентом трансформации.

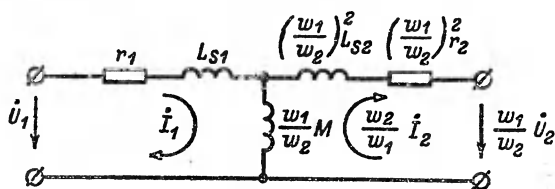


Рис. 8-13. Схема замещения, приведенная к первичной обмотке.

Придав уравнениям (8-15) следующий вид:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega n M \frac{\dot{I}_2}{n};$$

$$-n\dot{U}_2 = n^2 (r_2 + j\omega L_2) \frac{\dot{I}_2}{n} - j\omega n M \dot{I}_1,$$

можно преобразовать их таким образом:

$$\dot{U}_1 = [r_1 + j\omega (L_1 - nM)] \dot{I}_1 + j\omega n M \dot{I}_1 - j\omega n M \frac{\dot{I}_2}{n};$$

$$-n\dot{U}_2 = n^2 \left[r_2 + j\omega \left(L_2 - \frac{M}{n} \right) \right] \frac{\dot{I}_2}{n} + j\omega n M \frac{\dot{I}_2}{n} - j\omega n M \dot{I}_1.$$

Полученные уравнения являются контурными уравнениями для приведенной схемы замещения трансформатора (рис. 8-13).

Схема замещения трансформатора, приведенная к первичной обмотке, содержит: сопротивление r_1 и индуктивность рассеяния L_{s1} первичной обмотки трансформатора; индуктивность $\frac{w_1}{w_2} M$ в поперечной ветви (эта ветвь называется ветвью намагничивания); сопротивление r_2 и индуктивность рассеяния L_{s2} вторичной обмотки, приведенные к первичной обмотке трансформатора, т. е. умноженные на $n^2 = (w_1/w_2)^2$ (квадрат отношения чисел витков).

схеме замещения трансформатора, приведенной к первичной обмотке, проходит через ветвь намагничивания, принято называть намагничивающим током трансформатора.

Схеме рис. 8-13 соответствует векторная диаграмма, показанная на рис. 8-14. При построении векторной диаграммы в качестве исходных могут быть приняты приведенные вторичные напряжение и ток.

Падения напряжения от приведенного вторичного тока $\dot{I}_2/n$ в приведенных активном сопротивлении $r_2 n^2$ и индуктивном сопротивлении рассеяния $\omega L_{s2} n^2$ вторичной обмотки геометрически складываются с приведенным вторичным напряжением $n \dot{U}_2$. Полученное напряжение равно падению напряжения от намагничивающего тока в индуктивном сопротивлении ветви намагничивания $j\omega n M \left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n} \right)$, причем намагничивающий ток отстает от полученного напряжения на 90° . Первичный ток находится как геометрическая сумма намагничивающего тока и приведенного вторичного тока:

$$\left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n} \right) + \frac{\dot{I}_2}{n} = \dot{I}_1.$$

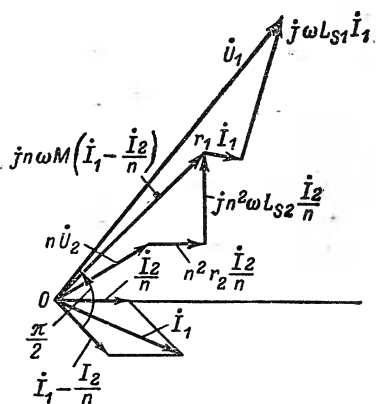


Рис. 8-14. Векторная диаграмма к схеме на рис. 8-13.

Схема замещения с измененным положительным направлением вторичного тока соответствовали бы согласному направлению токов в исходной схеме.

Пример 8-4. Решить пример 8-1 с помощью схемы замещения трансформатора (см. рис. 8-12).

Рассматривая индуктивно связанные элементы схемы рис. 8-16, *а* в качестве трансформатора с попарно соединенными первичными и вторичными зажимами и пользуясь схемой замещения рис. 8-12 (с изменением направления тока $\dot{I}_2$), получаем эквивалентную схему рис. 8-16, *б* без индуктивных связей.

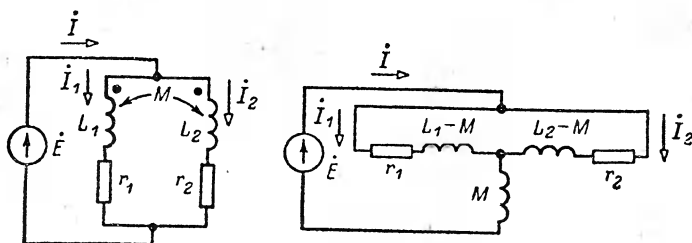


Рис. 8-16. Пример 8-4.

а — исходная схема; *б* — схема замещения.

Комплексное сопротивление всей цепи равно:

$$Z = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = j\omega M + \frac{[r_1 + j\omega(L_1 - M)][r_2 + j\omega(L_2 - M)]}{r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}.$$

Применяя сокращенную запись:

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M,$$

находим:

$$Z = Z_M + \frac{(Z_1 - Z_M)(Z_2 - Z_M)}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}.$$

8-6. ЭНЕРГИЯ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ ОБМОТКОВ

Рассмотрим вопрос об энергии индуктивно связанных обмоток. Дифференциальные уравнения двух индуктивно связанных обмоток при встречном направлении токов (см. рис. 8-11), имеют вид:

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \quad 0 = u_2 + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Умножив первое уравнение на i_1 , а второе на i_2 , сложив и сгруппировав слагаемые, получим:

$$p_1 = u_1 i_1 = u_2 i_2 + r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + \\ + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} - M \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right)$$

или

$$p_1 = r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \frac{dw_M}{dt} + u_2 i_2,$$

где w_M — энергия магнитного поля:

$$w_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} - M i_1 i_2.$$

Как и следовало ожидать, мгновенная мощность, подводимая к трансформатору с первичных зажимов, равна сумме мгновенных значений мощностей, расходуемых на нагрев обмоток, скорости изменения энергии w_M , накопленной в магнитном поле, и мощности, передаваемой нагрузке.

Первое слагаемое энергии магнитного поля равно энергии поля первой обмотки при $i_2=0$, второе слагаемое равно энергии поля второй обмотки при $i_1=0$; третье слагаемое представляет собой энергию, связанную с взаимным расположением обеих обмоток.

При согласном направлении токов третье слагаемое в выражении энергии будет иметь знак плюс.

Первое и второе слагаемые положительны, третье же в зависимости от знаков мгновенных токов i_1 и i_2 может иметь положительный или отрицательный знак. Поэтому энергия системы, состоящей из двух индуктивно связанных обмоток, может быть больше или меньше суммы энергий обеих обмоток, взятых отдельно.

Пример 8-5. Две индуктивно связанные катушки имеют индуктивности $L_1=4$ гн и $L_2=25$ гн; коэффициент связи $k=0,5$.

Определить энергию поля, создаваемую этими катушками при токах $i_1=10$ а и $i_2=20$ а.

Взаимная индуктивность катушек

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0,5 \sqrt{4 \cdot 25} = 5 \text{ гн}.$$

Энергия каждой катушки, взятой отдельно, составляет:

$$\frac{L_1 i_1^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^2}{2} = 200 \text{ дж}; \quad \frac{L_2 i_2^2}{2} = \frac{25 \cdot 20^2}{2} = 5000 \text{ дж}.$$

Энергия взаимного расположения

$$M i_1 i_2 = 5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000 \text{ дж}.$$

Энергия поля всей системы при согласном направлении токов

$$w_M = 200 + 5000 + 1000 = 6200 \text{ дж}.$$

а при встречном направлении токов

$$w_M = 200 + 5000 - 1000 = 4200 \text{ дж}.$$

8-7. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРАНСФОРМАТОРА

Если нагрузка Z_H присоединена к источнику электроэнергии не непосредственно, а через трансформатор (рис. 8-17), то согласно (8-15):

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2;$$

$$0 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + (r_2 + j\omega L_2 + Z_H) \dot{I}_2.$$

Следовательно, $\dot{I}_2 = \frac{\mp j\omega M \dot{I}_1}{r_2 + j\omega L_2 + Z_H}$, откуда сопротивление на входных зажимах трансформатора

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = r_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{r_2 + j\omega L_2 + Z_H}. \quad (8-16)$$

Третье слагаемое в правой части выражения (8-16) представляет собой комплексное сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную; схема рис. 8-18 эквивалентна схеме рис. 8-17. В зависимости от характера Z_H мнимая часть вносимого сопротивления может быть положительной или отрицательной.

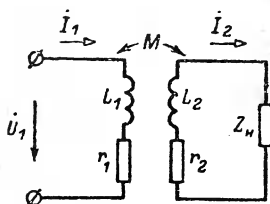


Рис. 8-17. Присоединение нагрузки к источнику через трансформатор.

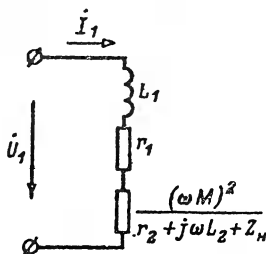


Рис. 8-18. Схема для определения входного сопротивления нагруженного трансформатора.

Допустим теперь, что нагрузка Z_H присоединена к идеальному трансформатору. Учитывая условия $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = n$, которыми характеризуется идеальный трансформатор, получим входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n \dot{U}_2}{\frac{1}{n} \dot{I}_2} = n^2 Z_H. \quad (8-17)$$

Следовательно, идеальный трансформатор, включенный между нагрузкой и источником электроэнергии, изменяет сопротивление нагрузки пропорционально квадрату коэффициента трансформации без изменения его угла.

Это свойство практически используется в различных областях электротехники, проводной связи, радио, приборостроения, автоматики для уравнивания сопротивлений источника и нагрузки (с целью повышения отдавае-

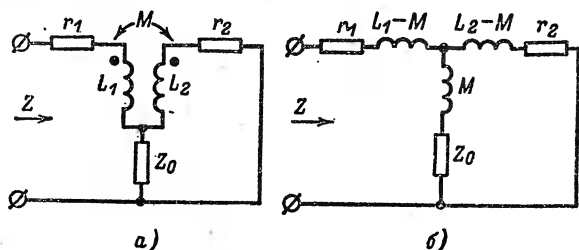


Рис. 8-19. Пример 8-6.

а — исходная схема; б — схема замещения.

мой источником мощности). Поэтому в том случае, когда требуется изменить величину сопротивления какой-либо нагрузки без изменения самой нагрузки, включается промежуточный трансформатор, по свойствам приближающийся к идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации, определяемым на основании (8-17):

$$n = \sqrt{\frac{z_{1\text{вх}}}{z_{\text{н}}}},$$

где $z_{1\text{вх}}$ — требуемая величина сопротивления.

Формула (8-17) непосредственно вытекает также из приведенной схемы замещения трансформатора (см. рис. 8-13), поскольку идеальный трансформатор не имеет активных сопротивлений и индуктивностей рассеяния ($r_1=r_2=0$; $L_{s1}=L_{s2}=0$) и его взаимная индуктивность равна бесконечности.

Входное сопротивление идеального трансформатора при замкнутых выходных зажимах равно нулю, а при разомкнутых — бесконечности.

Пример 8-6. Определить входное сопротивление цепи, показанной на рис. 8-19, а.

Пользуясь схемой замещения, представленной на рис. 8-19, б, находим:

$$Z = r_1 + j\omega(L_1 - M) + \frac{[r_2 + j\omega(L_2 - M)][j\omega M + Z_0]}{r_2 + j\omega L_2 + Z_0}.$$

Пример 8-7. Определить входное сопротивление цепи, состоящей из двух трансформаторов, включенных каскадно, с нагрузкой r_n на выходе (рис. 8-20, а). Активные сопротивления обмоток трансформаторов не учитываются.

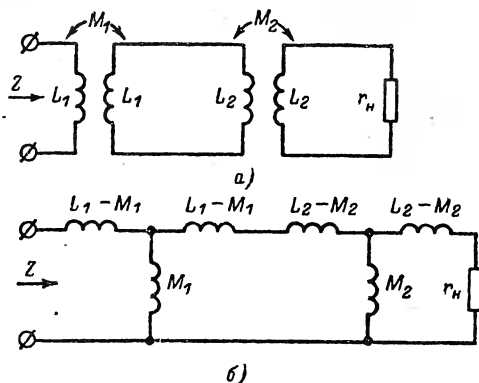


Рис. 8-20. Пример 8-7.

а — исходная схема; б — схема замещения.

В соответствии с (8-16) входное сопротивление второго трансформатора будет:

$$Z_2 = j\omega L_2 + \frac{(\omega M_2)^2}{j\omega L_2 + r_n}.$$

Рассматривая Z_2 в качестве нагрузки первого трансформатора, определяем входное сопротивление цепи по той же формуле (8-16):

$$Z = j\omega L_1 + \frac{(\omega M_1)^2}{j\omega L_1 + Z_2}.$$

После преобразования находим:

$$Z = \frac{\omega r_n (L_1^2 + L_1 L_2 - M_1^2) + j\omega^2 (L_1^2 L_2 + L_1 L_2^2 - L_1 M_2^2 - L_2 M_1^2)}{\omega (L_1 L_2 + L_2^2 - M_2^2) - j r_n (L_1 + L_2)}.$$

К тому же результату можно прийти на основе схемы замещения, показанной на рис. 8-20, б.

8-8. АВТОТРАНСФОРМАТОР

Автотрансформатор отличается от трансформатора тем, что его обмотка низшего напряжения является частью обмотки высшего напряжения (рис. 8-21, а). Так же как и трансформатор, он может быть понижающим или повышающим.

Уравнения автотрансформатора в комплексной форме для указанных на рис. 8-21, а положительных направлений токов и напряжений записываются так:

$$\dot{U}_1 = [r_1 + j\omega(L_1 + M)] \dot{I}_1 + [r_2 + j\omega(L_2 + M)] (\dot{I}_1 - \dot{I}_2);$$

$$\dot{U}_2 = [r_2 + j\omega(L_2 + M)] \dot{I}_1 - (r_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2.$$

Эти уравнения соответствуют схеме замещения, показанной на рис. 8-21 б. Правая ветвь схемы состоит из

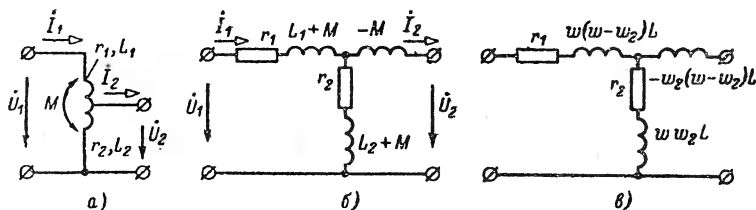


Рис. 8-21. Автотрансформатор без ферромагнитного сердечника (а) и его схемы замещения (б и в).

практически неосуществимого линейного элемента — отрицательной индуктивности ($-M$). Поэтому полученная схема замещения рис. 8-21, б может быть использована только для расчета. Практически осуществить ее можно только для фиксированной частоты, когда элемент $-M$ замещается емкостью. Однако если индуктивность нагрузки, подключенной к выходным зажимам, компенсирует отрицательную индуктивность, то схема замещения автотрансформатора в сочетании с нагрузкой практически осуществима.

Итак, схема замещения автотрансформатора представляет собой трехлучевую звезду. Сопротивления лучей этой звезды могут быть найдены и другим способом, если поочередно приравнять суммы сопротивлений двух лучей сопротивлениям между соответствующими зажимами автотрансформатора (при разомкнутом третьем зажиме).

Обозначим: индуктивность каждого витка L , общее число витков ω , число витков обмотки низшего напряжения ω_2 ; приняв коэффициент связи равным единице, т. е. пренебрегая рассеянием, получим в этом случае схему замещения автотрансформатора, показанную на рис. 8-21, в.

В режиме холостого хода автотрансформатора (т. е. при разомкнутых выходных зажимах), если не учитывать рассеяния, отношение первичного напряжения $\dot{U}_1$ к вторичному $\dot{U}_2$ равно отношению суммарного числа витков обмотки к числу витков обмотки низшего напряжения:

$$U_1/U_2 = \omega/\omega_2 = n;$$

n — коэффициент трансформации автотрансформатора.

При нагрузке подводимая к автотрансформатору мощность передается на вторичную сторону как посредством электромагнитной индукции (через магнитное поле), так и непосредственно через электрическую связь.

Применение автотрансформатора вместо обычного трансформатора той же мощности и с таким же коэффициентом трансформации дает экономию в меди, затрачиваемой на обмотку. Экономия достигается за счет сокращения общего числа витков и уменьшения толщины провода обмотки, через которую проходит ток, равный разности первичного и вторичного токов.

Экономия в меди тем больше, чем ближе к единице коэффициент трансформации, так как при этом уменьшается разность токов $|\dot{I}_1 - \dot{I}_2|$.

8-9. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

В радиотехнике широко распространены двухконтурные колебательные системы, в которых связь между контурами осуществляется при помощи взаимной индукции.

На рис. 8-22, а показаны колебательные контуры с индуктивной (трансформаторной) связью. Обозначим собственные сопротивления контуров через $Z_1 = r_1 + jx_1$ и $Z_2 = r_2 + jx_2$. На основании § 8-7 сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную, равно:

$$Z_{1\text{вн}} = r_{1\text{вн}} + jx_{1\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2} = \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 r_2 - j \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 x_2.$$

На рис. 8-22, б изображена схема замещения для первичного контура. Первичный ток равен:

$$I_1 = \frac{\dot{E}}{Z_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2}}, \quad (8-18)$$

а вторичный ток

$$I_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_2}. \quad (8-19)$$

Следует заметить, что напряжение $Z_{1\text{вн}} \dot{I}_1$ на сопротивлении, вносимом из вторичного контура в первичный, равно — $j\omega M \dot{I}_2$.

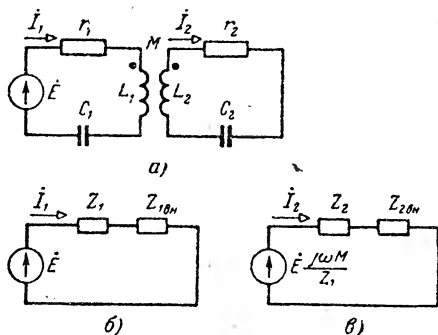


Рис. 8-22. Индуктивно связанные колебательные контуры (а) и их схемы замещения (б и в).

Подставив (8-18) в (8-19) и умножив числитель и знаменатель на Z_2/Z_1 , получим:

$$I_2 = \frac{\dot{E} \frac{j\omega M}{Z_1}}{Z_2 + \frac{(\omega M)^2}{Z_1}}. \quad (8-20)$$

Выражение (8-20) могло быть выведено и по теореме об эквивалентном источнике.

Числитель полученной дроби равен э. д. с., наводимой во вторичном контуре, когда он разомкнут, а знаменатель представляет собой эквивалентное сопротивление вторичного контура, в котором влияние первичного контура уч-

тено сопротивлением $Z_{2\text{вн}} = (\omega M)^2 / Z_1$, вносимым из первичного контура во вторичный.

Схема замещения для вторичного контура показана на рис. 8-22, в; здесь

$$Z_{2\text{вн}} = r_{2\text{вн}} + jx_{2\text{вн}} = \left(\frac{\omega M}{z_1}\right)^2 r_1 - j\left(\frac{\omega M}{z_1}\right)^2 x_1.$$

Активные составляющие вносимых сопротивлений всегда положительны, а знаки реактивных составляющих $x_{1\text{вн}}$ и $x_{2\text{вн}}$ противоположны знакам реактивных сопротивлений x_2 и x_1 соответственно.

Как $r_{1\text{вн}}$ и $r_{2\text{вн}}$, так и $x_{1\text{вн}}$ и $x_{2\text{вн}}$ зависят от частоты. По мере приближения частоты источника к резонансной частоте вторичного контура $r_{1\text{вн}}$ возрастает, стремясь к максимальному значению $r_{1\text{вн.макс}} = (\omega M)^2 / r_2$, а $x_{1\text{вн}}$ стремится к нулю. В свою очередь если частота приближается к резонансной частоте первичного контура, то $r_{2\text{вн}}$ растет, стремясь к $r_{2\text{вн.макс}} = (\omega M)^2 / r_1$, а $x_{2\text{вн}}$ стремится к нулю.

8-10. НАСТРОЙКА СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

На практике часто добиваются получения максимальной величины тока I_2 (или максимальной мощности P_2) во вторичном контуре. Это достигается соответствующей настройкой связанных контуров. Существуют различные способы настройки, а именно:

1) изменением параметров первичного контура, например емкости C_1 ; резонанс, который при этом возникает, называется первым частным резонансом;

2) изменением параметров вторичного контура, например емкости C_2 ; в этом случае возникает второй частный резонанс;

3) изменением параметров одного из контуров и сопротивления связи; резонанс в этом случае называется сложным;

4) изменением параметров обоих контуров и сопротивления связи; в этом случае резонанс называется полным.

Первый частный резонанс. Согласно (8-19) вторичный ток прямо пропорционален первичному. Поэтому максимуму тока I_1 соответствует и максимум I_2 .

Первый частный резонанс наступает при

$$x_1 - \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 x_2 = 0. \quad (8-21)$$

В этом случае:

$$I_{1\text{макс}} = \frac{E}{r_1 + \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 r_2}; \quad I_{2\text{макс}} = \frac{E\omega M}{r_1 z_2 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} r_2}.$$

Второй частный резонанс наступает при

$$x_2 - \left(\frac{\omega M}{z_1}\right)^2 x_1 = 0. \quad (8-22)$$

При этом

$$I_{2\text{макс}} = \frac{E\omega M}{r_2 z_1 + \frac{(\omega M)^2}{z_1} r_1}.$$

Сложный резонанс. При настройке первичного контура оптимальное сопротивление связи найдем, приравняв нулю первую производную $I_{2\text{макс}}$ по ωM :

$$\frac{\partial I_{2\text{макс}}}{\partial (\omega M)} = \frac{E \left[r_1 z_2 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} r_2 - 2\omega M \frac{\omega M}{z_2} r_2 \right]}{\left[r_1 z_2 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} r_2 \right]^2} = 0.$$

Отсюда

$$r_1 = \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 r_2.$$

Следовательно, оптимальное сопротивление связи

$$\omega M_{\text{опт}} = z_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \quad (8-23)$$

В этом случае получается максимум максимуму вторичного тока:

$$I_{2\text{макс.макс}} = \frac{E}{2 \sqrt{r_1 r_2}}.$$

Условия (8-21) и (8-23), которые при этом выполняются, означают, что собственное сопротивление первичного контура равно сопротивлению, комплексно сопряженному с сопротивлением, вносимым из вторичного контура в первичный, т. е.

$$Z_1 = \dot{Z}_{1\text{вн}}.$$

Из § 3-5 [формула (3-17)] известно, что это и есть условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику.

Аналогично при настройке вторичного контура оптимальное сопротивление связи равно:

$$\omega M_{\text{опт}} = z_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, \quad (8-24)$$

причем условия (8-22) и (8-24) в совокупности означают, что

$$Z_2 = \dot{Z}_{2\text{вн}},$$

т. е. и в этом случае выполняется условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику. При этом

$$I_{2\text{макс.макс}} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Следовательно, при сложном резонансе максимум максимумов вторичного тока не зависит от того, какой из контуров настраивается на резонанс..

Полный резонанс. При настройке на полный резонанс сначала настраивают первичный контур при разомкнутом вторичном, т. е. добиваются условия $x_1=0$. Затем настраивают вторичный контур, добиваясь условия $x_2=0$.

Наконец, подбирают оптимальное сопротивление связи.

При $x_1=x_2=0$

$$I_{2\text{макс}} = \frac{E\omega M}{r_1 r_2 + (\omega M)^2}.$$

Оптимальное сопротивление связи находится из условия

$$\frac{\partial I_{2\text{макс}}}{\partial (\omega M)} = \frac{E[r_1 r_2 + (\omega M)^2 - 2(\omega M)^2]}{[r_1 r_2 + (\omega M)^2]^2} = 0,$$

откуда

$$\omega M_{\text{опт}} = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (8-25)$$

При этом вторичный ток равен:

$$I_{2\text{макс.макс}} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Хотя максимум максиморум вторичного тока при настройке на полный резонанс и получается таким же, как при настройке на сложный резонанс, *настройка на полный резонанс имеет то преимущество, что сопротивление связи меньше, чем при сложном резонансе*; оно как и активные сопротивления r_1 и r_2 , исчисляется единицами ом.

Эффективность передачи энергии из первичного контура во вторичный оценивается коэффициентом полезного действия двухконтурной системы, равным отношению мощности, поглощаемой сопротивлением r_2 , к сумме мощностей, поглощаемых сопротивлениями r_1 и r_2 :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2}.$$

Очевидно, $P_1 = r_1 I_1^2$; $P_2 = r_2 I_2^2 = r_{1\text{вн}} I_1^2$. Поэтому

$$\eta = \frac{r_{1\text{вн}}}{r_1 + r_{1\text{вн}}}.$$

Когда вторичный контур настроен на частоту источника

$$r_{1\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{r_2} \text{ и } \eta = \frac{(\omega M)^2}{r_1 r_2 + (\omega M)^2}.$$

При настройке на полный резонанс $\omega M = \sqrt{r_1 r_2}$ и $\eta = 0,5$.

Если колебательные контуры идентичны и частота близка к резонансной, то *оптимальный коэффициент связи при настройке на полный резонанс с учетом (8-25) примерно равен затуханию контура*:

$$k_{\text{опт}} = \frac{\omega_0 M}{\omega_0 L} \approx \frac{r}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} = d.$$

Например, для радиотехнических контуров с добротностью $Q = 100$ оптимальный коэффициент связи составит $k_{\text{опт}} \approx 0,01$.

8-11. РЕЗОНАНСНЫЕ КРИВЫЕ

И ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

Ограничимся рассмотрением случая, когда связанные колебательные контуры имеют одинаковую резонансную частоту ω_0 и добротность Q .

Для построения резонансных кривых вторичного тока воспользуемся выражением (8-20), приняв $Z_1 = Z_2 = Z$. При рассмотрении последовательного колебательного контура в § 5-2 встречалось выражение

$$Z = r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = r(1 + j\xi).$$

Величина $\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ называется обобщенной расстройкой контура.

При частотах, близких к резонансной, $\omega M \approx \omega_0 LM/L = Qrk$. Поэтому

$$I_2 = \frac{EjQrk}{r^2(1 + j\xi)^2 + (Qrk)^2},$$

откуда

$$I_2 = \frac{EQk}{r \sqrt{(1 + Q^2 k^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

Отнеся вторичный ток к току $I_{2\text{макс.макс}} = E/2r$, получим:

$$\frac{I_2}{I_{2\text{макс.макс}}} = \frac{2Qk}{\sqrt{(1 + Q^2 k^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (8-26)$$

Если контуры настроены на частоту источника, то $\xi = 0$ и

$$\frac{I_{20}}{I_{2\text{макс.макс}}} = \frac{2Qk}{1 + Q^2 k^2}. \quad (8-27)$$

Выясним, каким значениям ξ соответствуют максимумы резонансной кривой $I_2/I_{2\text{макс.макс}}$. Приравняв нулю производную по ξ от подкоренного выражения (8-26), получим три корня:

$$\xi_0 = 0; \quad \xi_{1,2} = \pm \sqrt{Q^2 k^2 - 1}.$$

При $Qk < 1$ второй и третий корни лишены физического смысла и резонансная кривая имеет только один максимум — при $\xi_0 = 0$ ($\omega = \omega_0$). Вторичный ток при этом меньше $I_{2\text{макс.макс}}$.

При $Qk = 1$ и $\xi = 0$ получаем $I_2/I_{2\text{макс.макс}} = 1$, т. е. вторичный ток достигает значения максимума максимумом. При $Qk > 1$ резонансная кривая получается двугорбой, причем впадина двугорбой кривой соответствует значению $\xi = 0$, а $I_2/I_{2\text{макс.макс}} = 1$ соответствует $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$.

Сказанное иллюстрируется рис. 8-23.

Легко показать, что при $Qk \gg 1$, когда $\xi_{1,2} \approx \pm Qk$, максимумы вторичного тока соответствуют частотам

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} \pm \frac{k}{2} \right].$$

Коэффициент связи $k=1/Q=d$, при котором получается предельная однокорбная резонансная кривая, называется критическим. Он совпадает с оптимальным коэффициентом связи двух идентичных контуров, настроенных на полный резонанс (см. § 8-10).

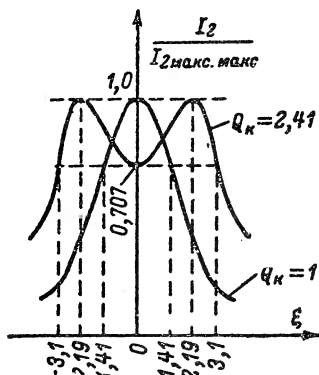


Рис. 8-23. Резонансные кривые связанных колебательных контуров.

Полосой пропускания связанных колебательных контуров, как и в случае одиночного колебательного контура, условно считается область частот, на границах которой резонансная кривая снижается не более чем в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с максимумом.

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{Q} &= \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \\ &= \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{\omega + \omega_0}{\omega}, \end{aligned}$$

то приняв вблизи резонансной частоты $\frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx 2$, можно считать, что $|\xi|/Q = 2|\delta|$ определяет полосу пропускания связанных контуров при $Qk \gg 1$ (здесь δ — относительная расстройка частоты — см. § 5-2). Решением уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2Qk}{\sqrt{(1 + Q^2 k^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}$$

служит

$$\xi = \pm \sqrt{Q^2 k^2 + 2Qk - 1}. \quad (8-28)$$

Это выражение справедливо до тех пор, пока впадина резонансной кривой находится выше или совпадает

с $1/\sqrt{2}$. В предельном случае $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2Qk}{1+Q^2k^2}$, откуда $Qk=2,41$.

Подставив это значение Qk в (8-28), найдем:

$$\frac{|\xi|}{Q} = \frac{3,1}{Q} = 3,1d,$$

т. е. при $Qk=2,41$ полоса пропускания в 3,1 раза больше, чем у одиночного колебательного контура

Если $Qk=1$, то $|\xi| = \sqrt{2}$ и $|\xi|/Q = \sqrt{2}d$, т. е. полоса пропускания в 1,41 раз больше, чем у одиночного контура.

При $Qk=0,68$ полоса пропускания связанных контуров равна полосе пропускания одиночного контура, а при $Qk<0,68$ она меньше полосы пропускания одиночного контура.

Величина Qk в радиотехнической литературе носит название параметра связи.

8-12. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

8-1. Перекрестив в схеме рис. 8-7 концы одной из индуктивно связанных катушек, определить сопротивление параллельно соединенных катушек без учета активных сопротивлений.

Ответ: $\frac{j\omega(L_1L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M}$.

8-2. В ветвь первой катушки схемы рис. 8-7 последовательно включена емкость 50 мкф; $r_1=20$ ом, $r_2=10$ ом; $L_1=0,2$ гн; $L_2=0,1$ гн; коэффициент связи равен 0,4. Вычислить напряжение на емкости, если напряжение на параллельных ветвях равно 100 В; $\omega=400$ рад/сек.

Ответ: 83,6 В; $\angle -143^\circ$.

8-3. Заданы параметры трансформатора: сопротивление 40 ом и индуктивность 0,05 гн — для первичной обмотки, сопротивление 50 ом и индуктивность 0,05 гн — для вторичной обмотки, коэффициент связи 0,6. Первичная обмотка присоединена к источнику э. д. с. 100 В; $\angle 0^\circ$, вторичная обмотка — к источнику э. д. с. 150 В; $\angle 30^\circ$; угловая частота равна 400 рад/сек. Электродвижущие силы источников направлены к одноименным зажимам трансформатора. Вычислить активные мощности, поступающие от обоих источников и идущие на потери внутри трансформатора.

Ответ: 128, 360 Вт.

8-4. Две индуктивно связанные одинаковые катушки с сопротивлением $10+j10$ ом каждая соединены последовательно и согласны; сопротивление взаимной индукции равно $j4$ ом. К общему зажиму катушек подключена емкость $-j20$ ом. К свободным зажимам ка-

тушек подключены источники э. д. с. $10 \angle 0^\circ$ и $10 \angle 30^\circ$ в, вторые зажимы которых присоединены к свободному зажиму емкости.

Найти напряжение на емкости.

Ответ: $10,95 \angle -1^\circ 18'$ в.

8-5. Трансформатор, имеющий две обмотки на общем сердечнике, характеризуется следующими данными: $r_1 = 100$ ом; $L_2 = 1$ гн; общее сопротивление вторичной обмотки и нагрузки $10\,000$ ом; отношение чисел витков $\omega_2 : \omega_1 = 10$; коэффициент связи $k = 0,5$. Вычислить параметры схемы рис. 8-12.

Ответ: $L_1 - M = -0,04$ гн; $L_2 - M = 0,95$ гн; $M = 0,05$ гн.

8-6. Вывести формулу (8-17) на основании выражения (8-16), положив, что L_1 и L_2 стремятся к бесконечности, $M^2 = L_1 L_2$. $r_1 = r_2 = 0$.

8-7. Какие зажимы называются однополярными?

8-8. Что называется током намагничивания?

8-9. Пояснить понятие «идеальный трансформатор».

8-10. В чем заключается приведение схемы трансформатора к первичной цепи?

8-11. Построить векторную диаграмму токов и напряжений для цепи, показанной на рис. 8-7.

8-12. Как применить трансформатор в качестве согласующего устройства?

8-13. Почему в случае двух индуктивно связанных катушек не могут одновременно выполняться условия $L_1 < M$ и $L_2 < M$?

8-14. Пользуясь схемой замещения рис. 8-22, б, построить векторную диаграмму токов и напряжений для индуктивно связанных колебательных контуров, настроенных на частоту источника. Убедиться, что в этом случае первичный ток I_1 совпадает по фазе с э. д. с. $\dot{E}$, а ток I_2 опережает I_1 на 90° .

8-15. Что называется обобщенной расстройкой контура?

8-16. Как определяется полоса пропускания индуктивно связанных колебательных контуров?

8-17. Показать, что максимумы двугорбой кривой рис. 8-23 соответствуют $\xi_{1,2} = \pm 2,19$.

8-18. Как зависит глубина впадины двугорбой резонансной кривой от параметра связи Qk ?

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

9-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

И КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к любым двум парам ее зажимов, называется четырехполюсником (рис. 9-1). Понятием «четыре-полюсник» пользуются тогда, когда интересуются величинами токов и напряжений только в двух ветвях или двух парах узлов электрической цепи. Так, в качестве четырехполюсника могут быть представлены длинная линия, электрический фильтр, трансформатор, уси-

литель, корректирующее и всякое другое устройство с двумя парами зажимов, включенное между источником и приемником электрической энергии, когда предметом исследования являются токи и напряжения на этих зажимах, а не токи и напряжения внутри самого четырехполюсника.

Зажимы четырехполюсника, к которым присоединяется источник электрической энергии, называются **входными**, а зажимы, к которым присоединяется нагрузка, — **выходными**. Ради краткости применяются также термины «вход» и «выход» четырехполюсника.

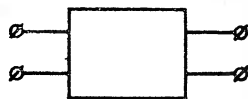


Рис. 9-1. Четырехполюсник.

На практике возможны случаи, когда обе пары зажимов четырехполюсника являются входными (случай двустороннего питания четырехполюсника) или выходными (случай четырехполюсника, содержащего независимые источники электрической энергии и нагруженного с обеих сторон).

Четырехполюсники могут быть классифицированы по различным признакам.

По признаку линейности элементов, входящих в них, четырехполюсники разделяются на линейные и нелинейные. Ниже рассматриваются **линейные** четырехполюсники.

По схеме внутренних соединений четырехполюсников различают Г-образный (рис. 9-2, а), Т-образный (рис. 9-2, б), П-образный (рис. 9-2, в), мостовой (рис. 9-2, г), Т-образно-мостовой (рис. 9-2, д) и другие.

Четырехполюсники делятся на активные и пассивные.

Четырехполюсник называется **активным**, если он содержит внутри источники электрической энергии. При этом, если эти источники являются независимыми, то в случае линейного четырехполюсника обязательным дополнительным условием активности четырехполюсника является наличие на одной или обеих парах его разомкнутых зажимов напряжения, обусловленного источниками электрической энергии, находящимися внутри него, т. е. необходимо, чтобы действия этих источников не компенсировались взаимно внутри четырехполюсника. Такой активный четырехполюсник называется **автономным**.

В случае, когда источники внутри четырехполюсника являются зависимыми, как это, например, имеет место в схемах замещения электронных ламп и полупроводниковых триодов, то после отсоединения четырехполюсника от остальной части цепи напряжение на разомкнутых зажимах его не обнаруживается. Такой активный четырехполюсник называется **неавтономным**.

Четырехполюсник называется **пассивным**, если он не содержит источников электрической энергии; линей-

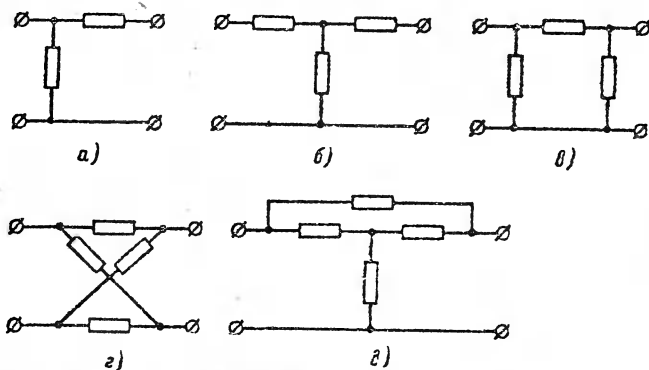


Рис. 9-2. Разновидности четырехполюсников.

ный четырехполюсник может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующие таким образом, что напряжения на обоих парах разомкнутых зажимов четырехполюсника равны нулю. Так, например, четырехполюсник на рис. 9-3, а пассивен, так как любые две э. д. с. четырехполюсника взаимно компенсируются в контуре (в уравнениях Кирхгофа эти э. д. с. взаимно уничтожаются); четырехполюсник, изображенный на рис. 9-3, б, пассивен вследствие того что напряжение на зажимах ветви с источниками всегда равно нулю.

Если все э. д. с. в схемах рис. 9-3 приравнять нулю, то получатся четырехполюсники, эквивалентные в электрическом смысле исходным. Под **эквивалентностью** двух четырехполюсников понимается возможность взаимной замены их в электрической цепи без изменения токов и напряжений в остальной ее части.

Различают четырехполюсники симметричные и несимметричные. Четырехполюсник является **симметричным** в том случае, когда перемена местами его входных

и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в цепи, с которой он соединен. В противном случае четырехполюсник является *несимметричным*.

Четырехполюсник называется *обратимым*, если выполняется теорема обратимости, т. е. отношение напряжения на входе к току на выходе, или, что то же, передаточное сопротивление входного и выходного контуров не зависит от того, какая из двух пар зажимов яв-

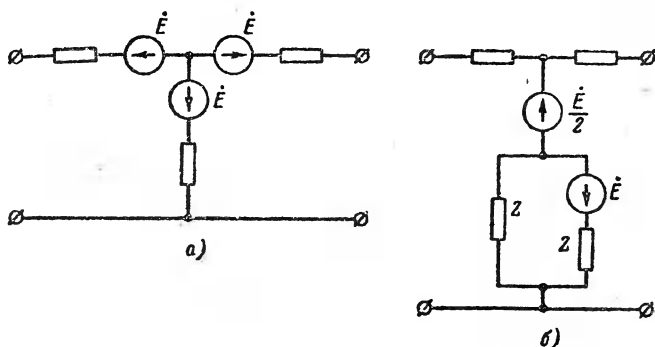


Рис. 9-3. Четырехполюсники, внутри которых действия источников электрической энергии компенсированы.

ляется входной и какая выходной. В противном случае четырехполюсник называется *необратимым*.

Пассивные линейные четырехполюсники являются обратимыми, несимметричные же активные (автономные и неавтономные) четырехполюсники *необратимы*. Симметричные четырехполюсники всегда обратимы.

Основной смысл теории четырехполюсника заключается в том, что, пользуясь некоторыми обобщенными параметрами четырехполюсника, можно находить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

Сложная электрическая цепь (например, канал связи), имеющая входные и выходные зажимы, может рассматривать как совокупность составных четырехполюсников, соединенных по определенной схеме.

Теория четырехполюсника позволяет вычислить параметры такого сложного четырехполюсника по параметрам составных четырехполюсников и, таким образом, получить аналитическую зависимость между токами и напряжениями на входе и выходе результирующего слож-

ного четырехполюсника, не производя расчетов токов и напряжений внутри заданной схемы.

Получаемые таким путем электрические величины на входе и выходе позволяют оценить режим работы передачи в целом. При этом пользование обобщенными параметрами четырехполюсника дает возможность сопоставлять и правильно оценивать передающие свойства электрических цепей, различных по своему типу и структуре.

Теория четырехполюсника позволяет также решать задачи синтеза, т. е. находить структуру и элементы четырехполюсника по заданным характеристикам (см. гл. 17).

Основы теории пассивного четырехполюсника разрабатывались многими отечественными и зарубежными учеными. Понятие четырехполюсник может быть применено и к механизму, служащему для передачи силы и скорости от источника механической энергии к приемнику. Такой «механический четырехполюсник», имеющий два полюса (вход и выход), может быть описан линейными уравнениями, связывающими силы и скорости на полюсах [Л. 5].

Механическому четырехполюснику соответствует электрический четырехполюсник, построенный по одному из двух принципов электромеханических аналогий, указанных в § 7-13: силы заменяются напряжениями, скорости — токами, либо силы заменяются токами, а скорости — напряжениями.

В настоящей главе рассматриваются активные (неавтономные) и пассивные четырехполюсники, имеющие одну пару входных и одну пару выходных зажимов. Рассмотрение общей теории многополюсника не входит в рамки данного курса.

9-2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Положим, что имеется четырехполюсник, не содержащий независимых источников электрической энергии. Обозначим левую пару зажимов четырехполюсника цифрами $1-1'$, а правую пару зажимов — цифрами $2-2'$. Этому условного обозначения будем придерживаться во всем последующем изложении, приписывая индексы 1 и 2 токам и напряжениям, относящимся соответственно к левой и правой парам зажимов четырехполюсника. Теми же индексами 1 и 2 будут обозначаться входной и выходной контуры четырехполюсника.

На рис. 9-4 обозначены принятые положительные направления для токов и напряжений на зажимах четырехполюсника. Вариант с токами $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ принято называть прямой передачей (см. уравнения по форме $\|A\|$), вариант с токами $\dot{I}'_1$ и $\dot{I}'_2$ — обратной передачей (см. уравнения по форме $\|B\|$). Используется также вариант с токами $\dot{I}_1$ и $\dot{I}'_2$, который будем называть третьим вариантом (см. уравнения по формам $\|Y\|$, $\|Z\|$, $\|H\|$, $\|G\|$). Во всех случаях каждое из напряжений $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ понимается как разность потенциалов верхнего (1 или 2) и нижнего (1' или 2') зажимов четырехполюсника.

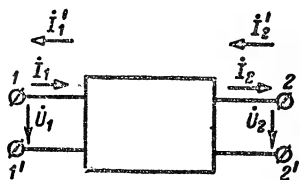


Рис. 9-4. Положительные направления токов и напряжений четырехполюсника.

Напряжения и токи на зажимах четырехполюсника обуславливаются присоединением активных цепей к обоим парам зажимов либо присоединением активной цепи к одной паре и пассивной цепи к другой паре зажимов четырехполюсника.

Электрические цепи, присоединенные к зажимам 1—1' и 2—2', могут быть на основании теоремы компенсации в любом режиме замещены источниками э. д. с. $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$, которые могут рассматриваться как контурные э. д. с., включенные в два независимых контура четырехполюсника, а токи $\dot{I}_1 = -\dot{I}'_1$ и $\dot{I}_2 = -\dot{I}'_2$ — как контурные токи.

Соотношения между напряжениями и токами на входе и выходе четырехполюсника могут быть записаны в виде следующих ниже шести форм уравнений:

1. Форма $\|Y\|$: $\dot{I}_1$ и $\dot{I}'_2$ выражаются в зависимости от $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}'_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

2. Форма $\|Z\|$: $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ выражаются в зависимости от $\dot{I}_1$ и $\dot{I}'_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}'_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

3. Форма $\|A\|$: $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ выражаются в зависимости от $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

4. Форма $\|B\|$: $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2'$ выражаются в зависимости от $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1'$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11} \dot{U}_1 + B_{12} \dot{I}_1'; \\ \dot{I}_2' &= B_{21} \dot{U}_1 + B_{22} \dot{I}_1'. \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

5. Форма $\|H\|$: $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_2'$ выражаются в зависимости от $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2' &= H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

6. Форма $\|G\|$: $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$ выражаются в зависимости от $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_2'$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= G_{11} \dot{U}_1 + G_{12} \dot{I}_2'; \\ \dot{U}_2 &= G_{21} \dot{U}_1 + G_{22} \dot{I}_2'. \end{aligned} \right\} \quad (9-6)$$

Из перечисленных выше шести форм уравнений рассмотрим более подробно формы $\|Y\|$ и $\|A\|$.

Коэффициенты и определители каждой системы уравнений четырехполюсника могут быть выражены через коэффициенты и определители любой другой системы (см. приложения II и III). Таблицы облегчают переход от одной формы записи уравнений четырехполюсника к другой.

Контурные токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2'$ связаны с контурными э. д. с. $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$ (рис. 9-4) линейными уравнениями (9-1), которые непосредственно следуют из (7-11) (см. § 7-5), поскольку рассматриваемый четырехполюсник не содержит независимых источников электрической энергии.

Коэффициенты Y представляют собой входные и передаточные проводимости контуров 1 и 2. В общем случае — это комплексные величины, зависящие от частоты; они определяются следующим образом:

$Y_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right)_{U_2=0}$ — входная проводимость со стороны зажимов 1 при закороченных зажимах 2;

$Y_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2'}{\dot{U}_2} \right)_{U_1=0}$ — входная проводимость со стороны зажимов 2 при закороченных зажимах 1;

$Y_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2'}{\dot{U}_1} \right)_{U_2=0}$ — передаточная проводимость при закороченных зажимах 2;

$Y_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{U_1=0}$ — передаточная проводимость при закороченных зажимах 1.

В случае обратимого четырехполюсника

$$Y_{12} = Y_{21}, \quad (9-7)$$

т. е. только три коэффициента в уравнениях (9-1) являются независимыми.

Если четырехполюсник симметричен, то наряду с (9-7) выполняется условие

$$Y_{11} = Y_{22}. \quad (9-8)$$

В этом случае число независимых коэффициентов равно двум (например, Y_{11} и Y_{12}).

Коэффициенты Z_{11} , Z_{22} , Z_{21} , Z_{12} в общем случае комплексные и зависят от частоты. Они имеют размерность сопротивления и могут быть определены следующим образом:

$Z_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right)_{I_2'=0}$ — входное сопротивление со стороны зажимов 1 при разомкнутых зажимах 2;

$Z_{22} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2'} \right)_{I_1=0}$ — входное сопротивление со стороны зажимов 2 при разомкнутых зажимах 1;

$Z_{21} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right)_{I_2'=0}$ — передаточное сопротивление при разомкнутых зажимах 2;

$Z_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2'} \right)_{I_1=0}$ — передаточное сопротивление при разомкнутых зажимах 1*.

* Коэффициенты четырехполюсников по форме $\|Z\|$ не являются обратными величинами по отношению к коэффициентам по форме $\|Y\|$, так что, например, $Y_{21} = 1/Z_{21}$ или $Y_{11} = 1/Z_{11}$.

В случае обратимого четырехполюсника

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad (9-9)$$

т. е. только три коэффициента в уравнениях (9-2) являются независимыми.

Если четырехполюсник симметричен, то наряду с (9-9) выполняется условие

$$Z_{11} = Z_{22}. \quad (9-10)$$

В этом случае остаются только два независимых коэффициента (например, Z_{11} и Z_{12}).

9-3. УРАВНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА В ФОРМЕ $\|A\|$

Как уже отмечалось в § 9-2, при записи уравнений в форме $\|A\|$ положительное направление токов I_1 и I_2 выбирается согласно рис. 9-4. Удобство выбора именно такого положительного направления тока I_2 связано в данном случае с тем, что форма $\|A\|$ применяется обычно при передаче электрической энергии от входных зажимов к выходным, причем четырехполюсник, включенный между источником и приемником, может состоять из нескольких четырехполюсников, соединенных каскадно; вход каждого последующего четырехполюсника совпадает с выходом предыдущего четырехполюсника.

Выведем форму $\|A\|$ из формы $\|Y\|$. Для этого в уравнениях (9-1), заменив I_2 через $-I_2$, получим:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ -I_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

Из второго уравнения (9-11) следует:

$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} I_2. \quad (9-12)$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение (9-11) дает:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \left[-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} I_2 \right] + Y_{12} \dot{U}_2 = \\ &= -\frac{|Y|}{Y_{21}} \dot{U}_2 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2, \end{aligned} \quad (9-13)$$

где $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$.

Положив в (9-12) и (9-13):

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}; & A_{12} &= -\frac{1}{Y_{21}}; \\ A_{21} &= -\frac{|Y|}{Y_{21}}; & A_{22} &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}, \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

получим систему уравнений четырехполюсника¹ (9-3). Коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} в общем случае комплексные и зависят от частоты: A_{11} и A_{22} — безразмерные, A_{12} имеет размерность сопротивлений, A_{21} имеет размерность проводимости. Эти коэффициенты могут быть определены аналогично предыдущему следующим образом:

A $A_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{I_2=0}$ — отношение напряжений при разомкнутых выходных зажимах;

B $A_{22} = \left(\frac{i_1}{i_2} \right)_{U_2=0}$ — отношение токов при закороченных выходных зажимах;

B $A_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{i_2} \right)_{U_2=0}$ — величина, обратная передаточной проводимости при закороченных выходных зажимах;

C $A_{21} = \left(\frac{i_1}{\dot{U}_2} \right)_{I_2=0}$ — величина, обратная передаточному сопротивлению при разомкнутых выходных зажимах.

Определитель, составленный из коэффициента A , равен:

$$|A| = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}}. \quad (9-15)$$

В случае обратимого четырехполюсника $Y_{12} = Y_{21}$, и поэтому

$$|A| = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1, \quad (9-16)$$

т. е. только три любых коэффициента в уравнениях (9-3) являются независимыми; четвертый коэффициент связан с остальными условием (9-16).

Если четырехполюсник симметричен, то на основании (9-14) с учетом (9-8)

$$A_{11} = A_{22}, \quad (9-17)$$

т. е. число независимых коэффициентов равно двум (например, A_{11} и A_{12}).

В случае перемены направления передачи электрической энергии, а именно при передаче энергии от зажимов 2 к зажимам 1, в уравнениях четырехполюсника свя-

¹ Коэффициенты A_{11} , A_{12} и A_{22} часто также обозначаются через A , B , C и D .

зывают напряжения и токи $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ и $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ [см. уравнения (9-4) по форме $\|B\|$]. Если заменить в (9-3) токи $\dot{I}_1$ на $-\dot{I}_1'$ и $\dot{I}_2$ на $-\dot{I}_2'$ и решить уравнения относительно $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2'$, то получим уравнения четырехполюсника в форме $\|B\|$, выраженные через коэффициенты формы $\|A\|$. Для обратимого четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= A_{22} \dot{U}_1 + A_{12} \dot{I}_1'; \\ \dot{I}_2' &= A_{21} \dot{U}_1 + A_{11} \dot{I}_1'. \end{aligned} \right\} \quad (9-18)$$

Сопоставляя уравнение (9-18) с уравнениями (9-3), соответствующими направлению передачи энергии от зажимов 1 к зажимам 2, заключаем, что с переменной направления передачи энергии коэффициенты A_{11} и A_{22} , входящие в системы уравнений, меняются местами.

9-4. ПАРАМЕТРЫ ХОЛОСТОГО ХОДА И КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

В § 9-3 было показано, что коэффициенты Y_{11} и Y_{22} представляют собой входные проводимости четырехполюсника рис. 9-4, измеренные слева и справа при закороченных противоположных зажимах; соответственно Z_{11} и Z_{22} представляют собой входные сопротивления четырехполюсника при разомкнутых зажимах.

Введя индексы «к» и «х» для обозначения режимов короткого замыкания (зажимы замкнуты) и холостого хода (зажимы разомкнуты), получим параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1к} &= \frac{1}{Y_{11}}; & Z_{2к} &= \frac{1}{Y_{22}}; \\ Z_{1х} &= Z_{11}; & Z_{2х} &= Z_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (9-19)$$

Этих параметров достаточно для составления уравнений обратимого четырехполюсника. Для записи уравнений необратимого четырехполюсника недостаточно параметров холостого хода и короткого замыкания, так как из них только три являются независимыми.

Действительно, на основании (9-19) и таблицы приложения II

$$\frac{Z_{1к}}{Z_{1х}} = \frac{1}{Y_{11} Z_{11}} = \frac{|Y|}{Y_{11} Y_{22}}$$

и

$$\frac{Z_{2K}}{Z_{2X}} = \frac{1}{Y_{22} Z_{22}} = \frac{|Y|}{Y_{11} Y_{22}},$$

откуда

$$\frac{Z_{1K}}{Z_{1X}} = \frac{Z_{2K}}{Z_{2X}}. \quad (9-20)$$

Таким образом, параметры холостого хода и короткого замыкания, выражаемые формулами (9-19), принудительно связаны уравнением (9-20).

В случае симметричного четырехполюсника

$$Z_{1K} = Z_{2K}, \quad Z_{1X} = Z_{2X},$$

т. е. симметричный четырехполюсник характеризуется только двумя параметрами.

Параметры холостого хода и короткого замыкания могут быть выражены через любую систему коэффициентов, например через коэффициенты A :

$$\left. \begin{aligned} Z_{1K} &= \frac{A_{12}}{A_{22}}; & Z_{1X} &= \frac{A_{11}}{A_{21}}; \\ Z_{2K} &= \frac{A_{12}}{A_{11}}; & Z_{2X} &= \frac{A_{22}}{A_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-21)$$

В свою очередь любая система коэффициентов обратимого четырехполюсника может быть выражена через параметры холостого хода и короткого замыкания. Например, для коэффициентов A получаем ¹:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1X}}{Z_{2X} - Z_{2K}}} \quad (9-22)$$

и, используя (9-21), выражаем все остальные коэффициенты через A_{11} :

$$A_{12} = A_{11} Z_{2K}; \quad A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1X}}; \quad A_{22} = A_{11} \frac{Z_{2X}}{Z_{1X}}. \quad (9-22a)$$

9-5. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

На основании уравнений четырехполюсника могут быть построены различные схемы замещения, которые облегчают исследование общих свойств рассматриваемой

¹ Эта формула дает двузначное решение, так как входящие в нее параметры не меняются от перекрещивания любой пары зажимов.

цепи. Ниже показаны некоторые схемы замещения четырехполюсника, параметры которых выражаются через коэффициенты Y , Z и A .

На практике чаще всего пользуются П-образной и Т-образной схемами замещения четырехполюсника.

На рис. 9-5, а показана П-образная схема замещения четырехполюсника, в которой проводимости ветвей выражены через коэффициенты Y . При этом зависимый источник тока $(Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1$ сохраняется в эквивалентной схеме

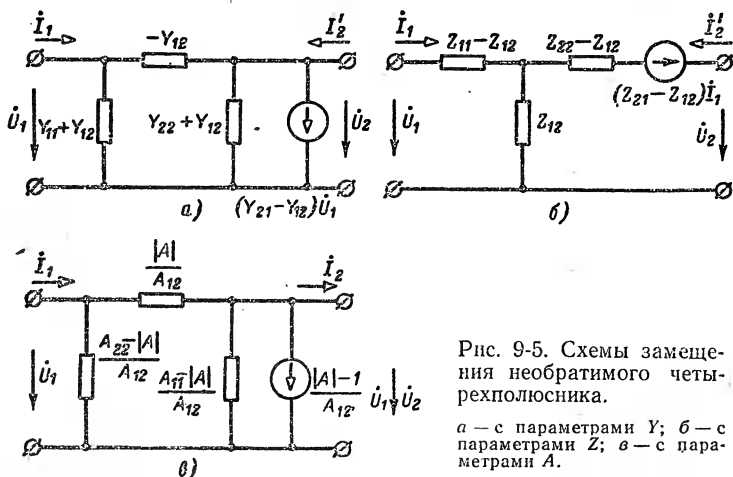


Рис. 9-5. Схемы замещения необратимого четырехполюсника.

а — с параметрами Y ; б — с параметрами Z ; в — с параметрами A .

ме только в случае необратимого четырехполюсника; в схеме обратимого четырехполюсника ($Y_{12} = Y_{21}$) источник тока отсутствует (см. рис. 9-6, а).

Схема рис. 9-5, а соответствует системе уравнений (9-1). Действительно, по первому закону Кирхгофа ток $\dot{I}_1$ равен сумме токов, входящих в ветви с проводимостями $Y_{11} + Y_{12}$ и $-Y_{12}$. Ток, входящий в первую ветвь, равен $(Y_{11} + Y_{12})\dot{U}_1$, а ток, входящий во вторую ветвь, равен $-Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$.

Итак,

$$\dot{I}_1 = (Y_{11} + Y_{12})\dot{U}_1 - Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2.$$

В свою очередь ток $\dot{I}_2$ равен сумме токов, входящих в ветви с проводимостями $Y_{22} + Y_{12}$ и $-Y_{12}$, и тока источника $(Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{I}_2' &= (Y_{22} + Y_{12}) \dot{U}_2 - Y_{12} (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + (Y_{21} - Y_{12}) \dot{U}_1 = \\ &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2.\end{aligned}$$

и по

На рис. 9-5, б показана Т-образная схема замещения, в которой сопротивления ветвей выражены через коэффициенты Z четырехполюсника. Применяв второй закон Кирхгофа, легко убедиться в том, что данная схема соответствует уравнениям (9-2).

Схема замещения четырехполюсника содержит зависимый источник э. д. с. или тока в случае, когда четырехполюсник необратим. В схеме обратимого четырехполюсника ($Z_{12} = Z_{21}$) зависимый источник отсутствует (рис. 9-6, б).

Параметры схемы замещения четырехполюсника могут быть выражены также через коэффициенты A . Так, например, пользуясь таблицей приложения II, можно в П-образной схеме (см. рис. 9-5, а) проводимости ветвей выразить через коэффициенты A ; при этом получится схема рис. 9-5, в; в случае обратимого четырехполюсника будем иметь схему рис. 9-6, в, которая часто применяется для расчета энергетических систем.

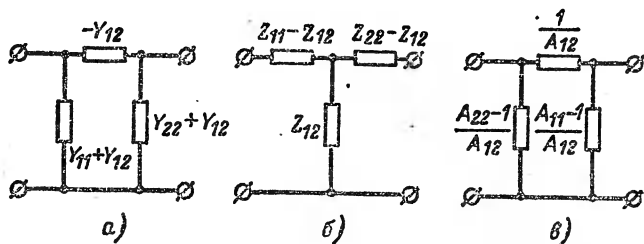


Рис. 9-6. Эквивалентные схемы пассивного четырехполюсника.

Пассивный П-образный четырехполюсник может быть преобразован в Т-образный (или наоборот) по правилу преобразования треугольника в эквивалентную звезду (см. § 4-5).

Следует заметить, что П-образная и Т-образная схемы замещения четырехполюсника не всегда физически реализуемы¹.

¹ Это не относится к четырехполюсникам, не содержащим реактивных элементов.

Под физически реализуемой пассивной схемой понимается такая схема, в которой параметры r , L и C положительные (см. гл. 17). Если в какой-либо ветви схемы данное условие не выполнено, то схема физически нереализуема. Например, схема рис. 9-6, б нереализуема при отрицательном знаке действительной части Z_{12} , т. е. если

$$\operatorname{Re} Z_{12} < 0.$$

Схемой замещения четырехполюсника может служить и мостовая схема (см. § 9-15). Мостовая схема является физически реализуемым эквивалентом для любого реально осуществимого симметричного пассивного четырехполюсника.

Схемы замещения необратимых четырехполюсников, описанные выше, применяются для анализа и расчета электрических цепей, содержащих электронные лампы и полупроводниковые триоды. К этому вопросу предстоит вернуться во второй части курса.

Пример 9-1. Рассматривая автотрансформатор (см. рис. 8-21, а) как четырехполюсник, построить для него Т-образную схему замещения.

Выбрав положительные направления токов по третьему варианту и воспользовавшись параметрами Z , найдем:

$$Z_{11} = r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M); \quad Z_{22} = r_2 + j\omega L_2;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2'} \right)_{I_1=0} = r_2 + j\omega(L_2 + M).$$

На основании рис. 9-6, б получаются следующие сопротивления ветвей Т-образной схемы:

$$Z_{11} - Z_{12} = r_1 + j\omega(L_1 + M); \quad Z_{22} - Z_{12} = -j\omega M;$$

$$Z_{12} = r_2 + j\omega(L_2 + M).$$

Полученный результат совпадает с данными § 8-8 (см. рис. 8-21, б).

9-6. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Обозначим через $Z_{1\text{вх}}$ входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 1, когда к зажимам 2 присоединено произвольное комплексное сопротивление Z_2 (рис. 9-7, а); соответственно через $Z_{2\text{вх}}$ обозначим входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 2, когда к зажимам 1 присоединено произвольное комплексное сопротивление Z_1 (рис. 9-7, б).

Следовательно, входное сопротивление $Z_{1\text{вх}}$ равно отношению напряжения $\dot{U}_1$ к току $\dot{I}_1$ при прямой передаче энергии:

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1},$$

а $Z_{2\text{вх}}$ равно отношению напряжения $\dot{U}_2$ к току $\dot{I}'_2$ при обратной передаче энергии:

$$Z_{2\text{вх}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}'_2}.$$

Входные сопротивления четырехполюсника могут быть выражены через любую систему коэффициентов четырех-

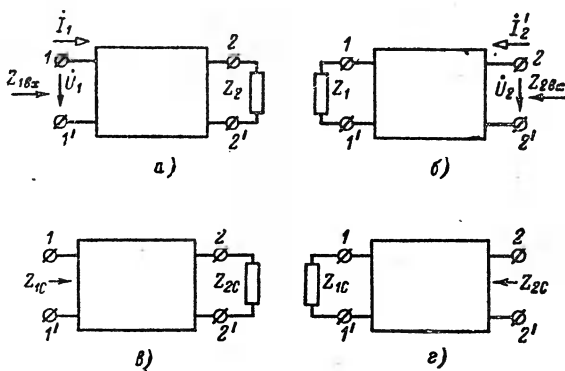


Рис. 9-7. Несимметричный четырехполюсник при прямой и обратной передаче.

а и б — произвольная нагрузка; в и г — согласованная нагрузка.

полюсника и комплексные сопротивления нагрузок Z_1 и Z_2 .

Например, если воспользоваться системой уравнений (9-3), то, разделив первое из уравнений на второе, получим:

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}. \quad (9-23)$$

Аналогично при обратной передаче на основании (9-18)

$$Z_{2BX} = \frac{A_{22} \dot{U}_1 + A_{12} \dot{I}'_1}{A_{21} \dot{U}_1 + A_{11} \dot{I}'_1} = \frac{A_{22} Z_1 + A_{12}}{A_{21} Z_1 + A_{11}}. \quad (9-24)$$

Если воспользоваться таблицами приложений II и III, то можно выразить Z_{1BX} и Z_{2BX} через другие коэффициенты четырехполюсника.

На практике применяются и другие выражения для Z_{1BX} и Z_{2BX} . Например, в тех случаях, когда известны параметры холостого хода (Z_{1X} и Z_{2X}) и короткого замыкания (Z_{1K} и Z_{2K}), удобно пользоваться зависимостями Z_{1BX} и Z_{2BX} от этих параметров. С этой целью выражениям (9-23) и (9-24) с учетом (9-21) придается следующий вид:

$$Z_{1BX} = \frac{A_{11}}{A_{21}} \frac{\frac{A_{12}}{A_{11}} + Z_2}{\frac{A_{22}}{A_{21}} + Z_2} = Z_{1X} \frac{Z_{2K} + Z_2}{Z_{2X} + Z_2};$$

$$Z_{2BX} = \frac{A_{22}}{A_{21}} \frac{\frac{A_{12}}{A_{22}} + Z_1}{\frac{A_{11}}{A_{21}} + Z_1} = Z_{2X} \frac{Z_{1K} + Z_1}{Z_{1X} + Z_1}.$$

Рассмотренные выше функциональные зависимости $Z_{1BX} = F_1(Z_2)$, $Z_{2BX} = F_2(Z_1)$ представляют собой дробно-линейные преобразования, связывающие величины сопротивлений на зажимах четырехполюсника; они иллюстрируют одно из свойств четырехполюсника — способность преобразовывать сопротивления.

9-7. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Положим, что сопротивления Z_1 и Z_2 в схемах рис. 9-7, а и б подобраны таким образом, что $Z_{1BX} = Z_1$ и $Z_{2BX} = Z_2$. Иначе говоря, будем считать, что существует два сопротивления: $Z_1 = Z_{1c}$ и $Z_2 = Z_{2c}$, которые удовлетворяют следующему условию: входное сопротивление Z_{1BX} четырехполюсника, нагруженного сопротивлением Z_{2c} , равно Z_{1c} (рис. 9-7, в); входное сопротивление Z_{2BX} четырехполюсника, нагруженного сопротивлением Z_{1c} , равно Z_{2c} (рис. 9-7, г).

Такие два сопротивления называются характеристическими сопротивлениями несимметричного четырехполюсника.

Условие, когда четырехполюсник нагружен соответствующим характеристическим сопротивлением, называется условием согласованной нагрузки или согласованного включения.

Положив в (9-23) и (9-24)

$$Z_{1BX} = Z_1 = Z_{1c}$$

и

$$Z_{2BX} = Z_2 = Z_{2c},$$

получим:

$$Z_{1c} = \frac{A_{11}Z_{2c} + A_{12}}{A_{21}Z_{2c} + A_{22}}; \quad Z_{2c} = \frac{A_{22}Z_{1c} + A_{12}}{A_{21}Z_{1c} + A_{11}}.$$

Совместное решение этих уравнений относительно величин Z_{1c} и Z_{2c} дает:

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}. \quad (9-25)$$

Введем для рассматриваемого обратимого четырехполюсника новый параметр g , удовлетворяющий условиям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} g &= \sqrt{A_{11}A_{22}}; \\ \operatorname{sh} g &= \sqrt{A_{12}A_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-26)$$

Эти условия всегда осуществимы, так как параметр g может быть комплексным. Кроме того, эти условия взаимно дополняют друг друга, так как имеющая место связь между коэффициентами (9-16) соответствует тригонометрической формуле

$$\operatorname{ch}^2 g - \operatorname{sh}^2 g = 1.$$

Параметр g в общем случае комплексный; $g = a + jb$ называется мерой передачи¹ четырехполюсника. Это — третий характеристический параметр обратимого четырехполюсника. Его действительная часть a называется собственным затуханием четырехполюсника, а мнимая часть b — коэффициентом фазы.

Физический смысл этих коэффициентов будет пояснен ниже. Выразим коэффициенты четырехполюсника формы $\|A\|$ через характеристические параметры.

¹ Иногда этот параметр называется коэффициентом передачи, его не следует смешивать с терминами «коэффициент передачи по напряжению» и «коэффициент передачи по току». В литературе ранее применялось обозначение $g = b + ja$.

На основании (9-25):

$$\sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \quad (9-27)$$

и

$$\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \quad (9-28)$$

Умножение (9-26) на (9-27) и (9-28) дает:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \operatorname{ch} g; \quad (9-29)$$

$$A_{12} = \sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} \operatorname{sh} g. \quad (9-30)$$

Деление (9-26) на (9-27) и (9-28) дает:

$$A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \operatorname{ch} g; \quad (9-31)$$

$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}}} \operatorname{sh} g. \quad (9-32)$$

В результате подстановки (9-29)–(9-32) в (9-3) получаются уравнения несимметричного обратимого четырехполюсника в гиперболической форме, соответствующие положительным направлениям токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, указанным на рис. 9-4:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} (\dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_{2c} \dot{I}_2 \operatorname{sh} g); \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \left(\dot{I}_2 \operatorname{ch} g + \frac{1}{Z_{2c}} \dot{U}_2 \operatorname{sh} g \right). \end{aligned} \right\} \quad (9-33)$$

При согласованно подобранной нагрузке ($Z_2 = Z_{2c}$) имеет место равенство.

$$Z_{2c} \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_{2c}} \dot{U}_2 = \dot{I}_2.$$

Если воспользоваться известным математическим соотношением

$$\operatorname{ch} g + \operatorname{sh} g = e^g,$$

то уравнения (9-33) упростятся:

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \dot{U}_2 e^g; \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \dot{I}_2 e^g. \quad (9-34)$$

Отсюда следует, что при согласованно подобранной нагрузке модули напряжений и соответственно токов на входе и выходе четырехполюсника связаны уравнениями:

$$U_1 = \sqrt{\frac{z_{1c}}{z_{2c}}} U_2 e^a; I_1 = \sqrt{\frac{z_{2c}}{z_{1c}}} I_2 e^a.$$

Множитель $\sqrt{z_{1c}/z_{2c}} e^a$ равен отношению амплитуд или действующих значений напряжений на входе и выходе четырехполюсника при согласованной нагрузке. В свою очередь множитель $\sqrt{z_{2c}/z_{1c}} e^a$ равен отношению амплитуд или действующих значений токов при той же нагрузке.

Если аргументы (углы) комплексных характеристических сопротивлений Z_{1c} и Z_{2c} обозначить через φ_{1c} и φ_{2c} , то фазовый сдвиг напряжения на входе относительно напряжения на выходе определится величиной $b + \frac{1}{2} \times (\varphi_{1c} - \varphi_{2c})$, а фазовый сдвиг тока на выходе относительно тока на входе — величиной $b + \frac{1}{2} (\varphi_{2c} - \varphi_{1c})$.

В общем случае коэффициент фазы b может быть определен как полусумма фазовых сдвигов между напряжениями и соответственно между токами на входе и выходе четырехполюсника, нагруженного согласованно. При равенстве углов φ_{1c} и φ_{2c} и согласованно подобранной нагрузке фазовые сдвиги между напряжениями и соответственно между токами четырехполюсника одинаковы и равны b .

Характеристические параметры Z_{1c} , Z_{2c} и g могут быть выражены через параметры холостого хода и короткого замыкания, а именно: на основании (9-21), (9-25) и (9-26)

$$\left. \begin{aligned} Z_{1c} &= \sqrt{Z_{1x} Z_{1k}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{Z_{2x} Z_{2k}}; \\ \text{th } g &= \sqrt{\frac{Z_{1k}}{Z_{1x}}} = \sqrt{\frac{Z_{2k}}{Z_{2x}}} \end{aligned} \right\} \quad (9-35)$$

Подстановка (9-26) в формулу $\text{ch } g + \text{sh } g = e^g$ приводит к выражению, связывающему характеристический

параметр g с коэффициентами четырехполюсника формы $\|A\|$;

$$e^g = e^a e^{jb} = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}. \quad (9-36)$$

По этой формуле величина g вычисляется однозначно, если подставлять под радикалы коэффициенты A в показательной форме с последующим сложением углов и делением их суммы на 2. По формуле (9-35) для тангенса принципиально невозможно получить однозначное решение, так как входные сопротивления под радикалом не изменяются от перекрещивания зажимов четырехполюсника. Поэтому формула (9-36) предпочтительнее формулы (9-35) для $\text{th } g$.

Вычисление g по формуле для $\text{th } g$ ведется в следующем порядке:

$$\text{th } g = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}},$$

откуда

$$e^{2g} = \frac{1 + \text{th } g}{1 - \text{th } g} = M < \varphi;$$

в результате логарифмирования

$$g = a + jb = \frac{\ln M}{2} + j \frac{\varphi}{2}.$$

Следует отметить, что параметр g может быть также получен как половина натурального логарифма отношения произведений комплексных напряжения и тока на входе и выходе четырехполюсника при согласованной нагрузке.

Действительно, на основании (9-34)

$$\left(\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right)_{Z_2 = Z_{2c}} = e^{2g},$$

откуда

$$g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right)_{Z_2 = Z_{2c}}. \quad (9-37)$$

В случае симметричного четырехполюсника ($A_{11} = A_{22}$) характеристические сопротивления Z_{1c} и Z_{2c} равны друг другу:

$$Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}.$$

Следовательно, входное сопротивление симметричного четырехполюсника, нагруженного характеристическим сопротивлением Z_c , равно Z_c . Это означает, что всякому симметричному четырехполюснику соответствует некоторое характеристическое сопротивление Z_c , обладающее следующим свойством: *если нагрузить данный четырехполюсник сопротивлением Z_c , то отношения напряжения к току на входе и выходе четырехполюсника будут одинаковыми, т. е.*

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_c.$$

На основании (9-33) уравнения симметричного четырехполюсника при произвольной нагрузке записываются в гиперболической форме (для положительных напряжений рис. 9-4) так:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} g; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} g + \frac{1}{Z_c} \dot{U}_2 \operatorname{sh} g.$$

Если нагрузка подобрана согласованно, т. е. $Z_c \dot{I}_2 = \dot{U}_2$, то

$$e^g = e^a e^{jb} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{Z_2=Z_c} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{Z_2=Z_c}. \quad (9-38)$$

В этом случае амплитудные изменения напряжения и тока определяются множителем e^a , а фазовый сдвиг между напряжениями или токами — углом b . Собственное затухание a будет:

$$a = \ln \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{Z_2=Z_c} = \ln \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{Z_2=Z_c}. \quad (9-39)$$

Величины g , a и b — безразмерные. Угол b вычисляется в радианах (*рад*); собственное затухание a , входящее в (9-39), вычисляется в *неперах* (*неп*).

Затуханию 1 *неп* соответствует уменьшение амплитуды и действующего значения напряжения или тока в $e = 2,718$ раза (так как при $\ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = 1$ имеем $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = 2,718$).

В радиотехнике принято затухание вычислять в *беллах* (*б*) или *децибеллах* (*дб*), которые определяются следующим образом.

Если полная мощность на выходе четырехполюсника в 10 раз меньше мощности на его входе, то затухание со-

ставляет 1 б; если мощность уменьшается в 100 раз, то затухание оценивается в 2 б и т. д. Поэтому

$$a_0 = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}.$$

В случае согласованно нагруженного симметричного четырехполюсника

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^2$$

и, следовательно,

$$a_0 = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

Децибел — единица затухания, в 10 раз меньшая бела.

Затухание 1 дб соответствует уменьшению полной мощности в 1,26 раза или уменьшению величин напряжения и тока в 1,12 раза.

Табл. 9-1 иллюстрирует зависимость затухания в децибелах от отношений полных мощностей S_1/S_2 на входе и выходе четырехполюсника;

Таблица 9-1

Затухание при различных отношениях $\frac{S_1}{S_2}$, дб

a , дб	$\frac{S_1}{S_2}$	a , дб	$\frac{S_1}{S_2}$	a , дб	$\frac{S_1}{S_2}$
0,1	1,02	4	2,51	8	6,31
1	1,23	5	3,16	9	7,94
2	1,58	6	3,98	10	10
3	1,99	7	5,01	10 n	10 ⁿ

соответствующие им отношения величин напряжений или токов симметричного четырехполюсника, нагруженного согласованно, составляют $\sqrt{S_1/S_2}$.

Для перехода от неперов к децибелам или обратно можно воспользоваться приведенным выше условием:

$$\begin{aligned} a_{\text{дб}} &= 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg e^{a_{\text{неп}}} = 20 a_{\text{неп}} \lg e = \\ &= 20 \cdot 0,4343 a_{\text{неп}} = 8,686 a_{\text{неп}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$1 \text{ неп} = 8,686 \text{ дб},$$

или

$$1 \text{ дб} = 0,115 \text{ неп}.$$

9-8. ВНОСИМОЕ ЗАТУХАНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Вносимое затухание (или усиление) является мерой оценки изменения условий передачи при включении четырехполосника между источником и приемником.

Положим, что между источником напряжения, имеющим внутреннее сопротивление Z_1 , и приемником Z_2 включен четырехполосник.

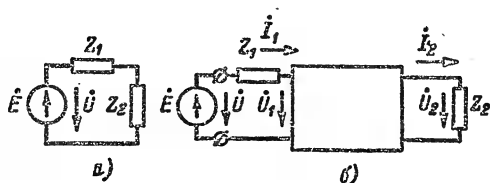


Рис. 9-8. Питание приемника непосредственно от источника (а) и через четырехполосник (б).

Под вносимым затуханием четырехполосника подразумевается половина натурального логарифма или десятикратное значение десятичного логарифма отношения полной мощности S_1 , которую непосредственно отдавал бы источник сопротивлению Z_2 (рис. 9-8, а), к полной мощности S_2 на выходе четырехполосника, нагруженного сопротивлением Z_2 (рис. 9-8, б):

$$\alpha_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}, \text{ неп}, \quad (9-40)$$

или

$$\alpha_{\text{вн}} = 10 \lg \frac{S_1}{S_2}, \text{ дб}. \quad (9-41)$$

Мощности S_1 и S_2 выражаются следующим образом:

$$S_1 = \frac{U^2 z_2}{|Z_1 + Z_2|^2}; \quad S_2 = z_2 I_2^2.$$

Согласно (9-40)

$$\alpha_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{U^2}{|Z_1 + Z_2|^2 I_2^2} = \ln \frac{U}{|Z_1 + Z_2| I_2}. \quad (9-42)$$

Отношение U/I_2 , входящее в (9-42), может быть выражено через характеристические параметры четырехполюсника и сопротивления Z_1 и Z_2 .

Пользуясь обозначениями рис. 9-8, б и уравнениями четырехполюсника, записанными в форме $\|A\|$, находим:

$$\begin{aligned}\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{Z}_1 \dot{I}_1 &= A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2 + Z_1 (A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2) = \\ &= (A_{11} Z_2 + A_{12} + A_{21} Z_1 Z_2 + A_{22} Z_1) \dot{I}_2,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = A_{11} Z_2 + A_{12} + A_{21} Z_1 Z_2 + A_{22} Z_1. \quad (9-43)$$

На основании (9-29) — (9-32):

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \frac{e^g + e^{-g}}{2}; \\ A_{12} &= \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} \frac{e^g - e^{-g}}{2}; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} \frac{e^g - e^{-g}}{2}; \\ A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \frac{e^g + e^{-g}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9-44)$$

Подстановка (9-44) в (9-43) дает:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} &= \left(\sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} Z_2 + \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} + \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} + \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} Z_1 \right) \frac{e^g}{2} + \\ &+ \left(\sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} Z_2 - \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} - \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} + \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} Z_1 \right) \frac{e^{-g}}{2}.\end{aligned}$$

После ряда алгебраических преобразований получается:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = \frac{e^g \sqrt{Z_1 Z_2 (Z_1 + Z_{1c})}}{2 \sqrt{Z_1 Z_{1c}}} \cdot \frac{(Z_2 + Z_{2c}) (1 - n_1 n_2 e^{-2g})}{\sqrt{Z_2 Z_{2c}}},$$

где

$$n_1 = \frac{Z_1 - Z_{1c}}{Z_1 + Z_{1c}} \text{ и } n_2 = \frac{Z_2 - Z_{2c}}{Z_2 + Z_{2c}},$$

так называемые коэффициенты отражения на входе и выходе четырехполюсника.

В связи с этим выражение (9-42) принимает следующий вид:

$$\alpha_{\text{вн}} = a + \ln \left| \frac{Z_1 + Z_{1c}}{2 \sqrt{Z_1 Z_{1c}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_2 + Z_{2c}}{2 \sqrt{Z_2 Z_{2c}}} \right| + \\ + \ln |1 - n_1 n_2 e^{-2g}| - \ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2 \sqrt{Z_1 Z_2}} \right|.$$

Следовательно, вносимое затухание состоит из пяти слагаемых. Первое слагаемое — собственное затухание четырехполюсника, второе — затухание вследствие несогласованности сопротивлений на входе четырехполюсника, третье — затухание вследствие несогласованности сопротивлений на выходе, четвертое — затухание вследствие взаимодействия несогласованностей на входе и выходе и пятое со знаком минус — затухание вследствие несогласованности сопротивлений источника и приемника.

В случае согласованного включения сопротивлений на входе и выходе четырехполюсника, т. е. при $Z_1 = Z_{1c}$ и $Z_2 = Z_{2c}$, вносимое затухание равно собственному затуханию четырехполюсника.

Если вносимое затухание равно нулю, то это означает, что мощности на входе и выходе четырехполюсника равны между собой.

Когда четырехполюсник является усилителем мощности (например, в случае лампового или полупроводникового триода), выражения (9-40) и (9-41) дают отрицательные значения $\alpha_{\text{вн}}$; это указывает на то, что вместо затухания в данном случае имеет место усиление (измеряемое в неперах или децибелах).

9.9. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Передаточной функцией называется зависимость от частоты отношения комплексных амплитуд или комплексных действующих значений электрических величин¹ на выходе и входе четырехполюсника при заданном режиме передачи. Необходимо помнить, что именно *выходная электрическая величина делится на входную*, а не наоборот.

Передаточные функции, соответствующие отношению одноименных электрических величин, — коэффициент передачи по напряжению

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$$

и коэффициент передачи по току

$$K_I = \frac{i_2}{i_1}$$

¹ Иногда под передачной функцией понимается отношение операторных изображений (см. гл. 15) электрических величин на выходе и входе четырехполюсника.

представляют собой безразмерные, в общем случае комплексные, зависящие от частоты величины. Применительно к усилительным устройствам они носят название коэффициентов усиления по напряжению и току.

Отношения разноименных электрических величин — передаточное сопротивление $Z = \dot{U}_2/\dot{I}_1$ и передаточная проводимость $Y = \dot{I}_2/\dot{U}_1$ — имеют соответственно размерности сопротивления и проводимости и также являются в общем случае комплексными величинами, зависящими от частоты.

Модули этих комплексных отношений представляют собой амплитудно-частотные, а их аргументы — фазо-частотные характеристики четырехполюсника. Эти характеристики имеют важное значение для работы устройств автоматики и радиотехники.

В общем случае четырехполюсника, нагруженного произвольным сопротивлением Z_2 , передаточные функции могут быть выражены через любую систему коэффициентов четырехполюсника и сопротивление Z_2 .

Через коэффициенты формы $\|A\|$ они выразятся следующим образом (положительные направления для токов соответствуют прямой передаче):

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2} = \frac{Z_2}{A_{11}Z_2 + A_{12}};$$

$$K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21}Z_2 + A_{22}}.$$

При холостом ходе и коротком замыкании эти коэффициенты примут вид:

$$K_{Ux} = \frac{1}{A_{11}}; \quad K_{Ik} = \frac{1}{A_{22}}.$$

В случае обратной передачи, очевидно, можно написать (при $|A| = 1$):

$$K'_{Ux} = \frac{1}{A_{22}} \text{ и } K'_{Ik} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Отсюда видно, что для обратимого четырехполюсника коэффициент передачи по напряжению при холостом ходе и прямом направлении передачи энергии равен коэффициенту передачи по току при коротком замыкании и обратном направлении передачи энергии. В свою очередь коэффициент передачи по току при коротком замы-

кании и прямом направлении передачи равен коэффициенту передачи по напряжению при холостом ходе и обратном направлении передачи.

9-10. КАСКАДНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ, ОСНОВАННОЕ НА СОГЛАСОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

На практике широко распространено каскадное или цепочечное соединение четырехполюсников, при котором входные зажимы каждого последующего четырехполюсника присоединяются к выходным зажимам пре-

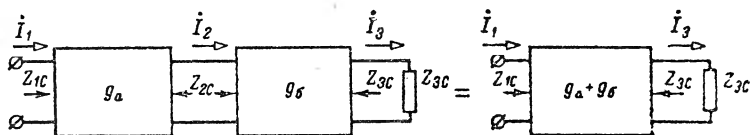


Рис. 9-9. Согласованное каскадное соединение четырехполюсников.

дыдущего четырехполюсника; цепи, служащие для передачи электрической энергии (каналы связи и т. д.) обычно состоят из отдельных звеньев, следующих друг за другом.

Каскадное соединение четырехполюсников, выполненное по принципу согласования характеристических сопротивлений, заключается в том, что входное сопротивление на зажимах любого четырехполюсника равно характеристическому.

Рисунок 9-9 иллюстрирует каскадное соединение двух четырехполюсников. Ввиду того что комплексное сопротивление нагрузки согласовано с выходным характеристическим сопротивлением Z_{3c} второго четырехполюсника, входное сопротивление этого четырехполюсника равно характеристическому (Z_{2c}); при этом оно служит согласованной нагрузкой для первого четырехполюсника. Поэтому входное сопротивление первого четырехполюсника также равно характеристическому (Z_{1c}).

Отсюда следует, что каскадно соединенные четырехполюсники с согласованными характеристическими сопротивлениями могут быть замещены одним четырехполюсником, имеющим характеристические сопротивления, равные входному характеристическому сопротивлению

первого и выходному характеристическому сопротивлению последнего четырехполюсников (рис. 9-9). Мера передачи g результирующего четырехполюсника определяется алгебраической суммой мер передачи составных четырехполюсников.

В самом деле, применительно к схеме рис. 9-9 в соответствии с (9-34)

$$\dot{U}_2 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{3c}}} \dot{U}_3 e^{g_6}; \quad \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \dot{U}_2 e^{g_a};$$

$$\dot{I}_2 = \sqrt{\frac{Z_{3c}}{Z_{2c}}} \dot{I}_3 e^{g_6}; \quad \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \dot{I}_2 e^{g_a},$$

откуда

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{3c}}} \dot{U}_3 e^{g_a + g_6}; \quad \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{Z_{3c}}{Z_{1c}}} \dot{I}_3 e^{g_a + g_6}.$$

Полученные выражения подтверждают сказанное выше: результирующий четырехполюсник имеет характеристические сопротивления Z_{1c} и Z_{3c} и меру передачи $g = g_a + g_6$. Соответственно собственное затухание результирующего четырехполюсника $a = a_a + a_6$, а фазовый коэффициент $b = b_a + b_6$.

В гл. 3 (см. § 3-5) было показано, что передача максимума активной мощности обеспечивается, когда комплексные сопротивления источника и нагрузки являются сопряженными. Это условие не выполняется в случае согласования характеристических сопротивлений каскада в прямом и обратном направлениях, если характеристические сопротивления комплексные. Однако если они активные (включая сопротивление источника), как это нередко имеет место на практике, то обеспечивается оптимальное условие передачи мощности.

Согласование характеристических сопротивлений широко применяется в автоматике, приборостроении и электронике.

9-11. УРАВНЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Для получения параметров результирующего четырехполюсника, составленного из более простых четырехполюсников, параметры которых известны, удобно пользоваться матричной записью (см. § 7-10).

В зависимости от схемы соединения сложного четырехполюсника применяется та или иная форма уравнений, а именно:

- 1) при каскадном соединении (рис. 9-10) — форма $\|A\|$ или $\|B\|$;
 - 2) при последовательном соединении (см. рис. 9-11) — форма $\|Z\|$;
 - 3) при параллельном соединении (см. рис. 9-12) — форма $\|Y\|$.
- Каскадное соединение четырехполюсников (рис. 9-10).

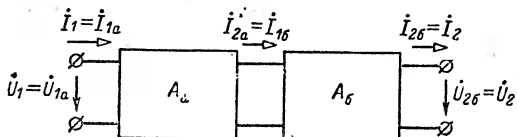


Рис. 9-10. Каскадное соединение четырехполюсников.

Уравнения составных четырехполюсников в матричной форме $\|A\|$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_a \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_a = \|A_a\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_a;$$

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix}_б = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_б \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_б = \|A_б\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_б.$$

Здесь индексом a отмечены величины, относящиеся к первому четырехполюснику, а индексом $б$ — величины, относящиеся ко второму четырехполюснику.

При каскадном соединении:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_{1a}; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2б}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2б}; \quad \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{1б}; \quad \dot{I}_{2a} = \dot{I}_{1б}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \|A_a\| \cdot \|A_б\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \|A\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\|A\|$ результирующего четырехполюсника равна произведению матриц составных четырехполюсников:

$$\|A\| = \|A_a\| \cdot \|A_б\|.$$

Это правило распространяется на случай каскадного соединения любого числа четырехполюсников. При этом матрицы, подлежащие перемножению, записываются в порядке следования соответствующих четырехполюсников, так как умножение матриц не подчиняется переместительному закону.

Последовательное соединение четырехполюсников (рис. 9-11).

Уравнения составных четырехполюсников в матричной форме $\|Z\|$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}_a = \|Z_a\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_a; \quad \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}_б = \|Z_б\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_б.$$

Здесь:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1б}; \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2б}.$$

Если при этом

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1б} \text{ и } \dot{I}'_2 = \dot{I}'_{2a} = \dot{I}'_{2б},$$

то

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} = \{\|Z_a\| + \|Z_б\|\} \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix} = \|Z\| \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix}.$$

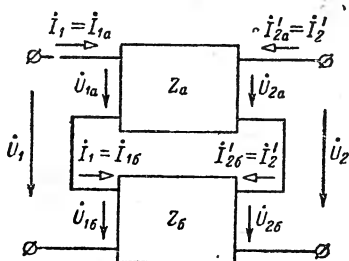


Рис. 9-11. Последовательное соединение четырехполюсников.

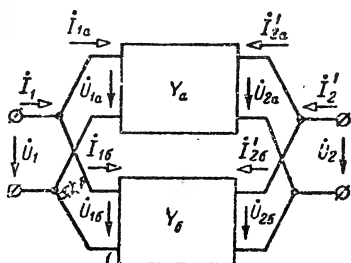


Рис. 9-12. Параллельное соединение четырехполюсников.

Таким образом, матрица $\|Z\|$ результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составных четырехполюсников:

$$\|Z\| = \|Z_a\| + \|Z_б\|.$$

Параллельное соединение четырехполюсников (рис. 9-12).

Уравнения составных четырехполюсников в матричной форме $\|Y\|$ имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix}_a = \|Y_a\| \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_a; \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix}_б = \|Y_б\| \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_б.$$

При параллельном соединении четырехполюсников:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1б}; \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2б}; \dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1б}; \dot{I}'_2 = \dot{I}'_{2a} + \dot{I}'_{2б}.$$

Следовательно,

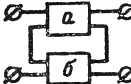
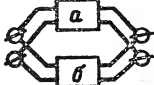
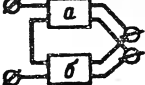
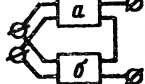
$$\begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix} = \{\|Y_a\| + \|Y_б\|\} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} = \|Y\| \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\|Y\|$ результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составных четырехполюсников

$$\|Y\| = \|Y_a\| + \|Y_б\|.$$

Правила нахождения матриц сложных четырехполюсников сведены в табл. 9-2. Они справедливы при любом числе составных че-

Матричные уравнения сложных четырехполюсников

Соединение	Схема	Матричное уравнение
Каскадное		$\ A\ = \ A_a\ \cdot \ A_b\ $
Последовательное		$\ Z\ = \ Z_a\ + \ Z_b\ $
Параллельное		$\ Y\ = \ Y_a\ + \ Y_b\ $
Последовательно-параллельное		$\ H\ = \ H_a\ + \ H_b\ $
Параллельно - последовательное		$\ G\ = \ G_a\ + \ G_b\ $

тырехполюсников. Однако правила сложения матриц применимы только при равенстве токов входящего и выходящего в каждой паре зажимов составных четырехполюсников, которое должно быть обеспечено тем или иным способом.

Соединение четырехполюсников, удовлетворяющее этому условию, называется регулярным [Л. 2 и 6].

9-12. ОДНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Простейшими четырехполюсниками являются одноэлементные четырехполюсники, состоящие из последовательного (см. рис. 9-13, а) или параллельного (рис. 9-13, б) двухполюсника.

Уравнения первого из них в форме $\|A\|$ записываются следующим образом:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + Zi_2; \quad i_1 = 0 + i_2,$$

или, что то же,

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения одноэлементного четырехполюсника с параллельной ветвью (рис. 9-13, б) в форме $\|A\|$ записываются следующим образом:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + 0; \dot{I}_1 = \frac{1}{Z} \dot{U}_2 + \dot{I}_2$$

или, что то же,

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Если в первом четырехполюснике (рис. 9-13, а) положить $Z = 0$ или, что то же, во втором четырехполюснике

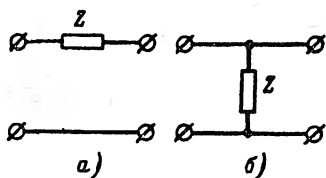


Рис. 9-13. Одноэлементные четырехполюсники с последовательной (а) и параллельной (б) ветвями.

(рис. 9-13, б) принять $Z = \infty$, то получится уравнение в форме $\|A\|$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{Bmatrix},$$

соответствующее непосредственному прямому соединению, показанному на рис. 9-14, а.

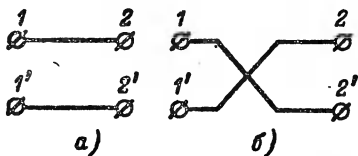


Рис. 9-14. Соединения: прямое (а) и перекрещенное (б).

Легко убедиться, что перекрещенному соединению (рис. 9-14, б) соответствует уравнение в форме $\|A\|$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Поэтому при перекрещивании входных или выходных зажимов любого четырехполюсника его матрица $\|A\|$

умножается на $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, что равносильно перемене знаков коэффициентов A .

9-13. Г-ОБРАЗНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК

Коэффициенты Г-образного четырехполюсника (см. рис. 9-15) могут быть получены непосредственно по формулам, приведенным в § 9-2 и 9-3. Например, для схемы

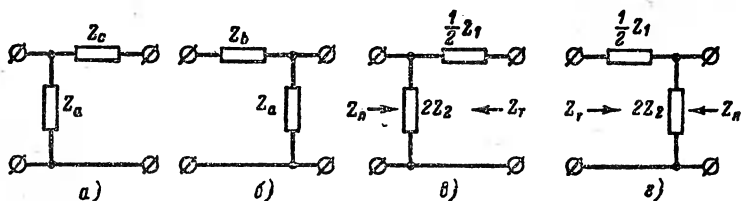


Рис. 9-15. Г-образный четырехполюсник.

рис. 9-15, а коэффициенты формы $\|A\|$ согласно формулам § 9-3 будут:

$$A_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{I_2=0} = 1;$$

$$A_{22} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{U_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\frac{Z_a}{Z_a + Z_c} \dot{I}_1} = 1 + \frac{Z_c}{Z_a};$$

$$A_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{1}{Z_c} \dot{U}_1} = Z_c; \quad A_{21} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{I_2=0} = \frac{1}{Z_a}.$$

Аналогично могут быть вычислены и другие коэффициенты.

Характеристические параметры Г-образного четырехполюсника могут быть вычислены по формулам (9-25) и (9-26).

Для схемы рис. 9-15, а:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1c} &= Z_a \sqrt{\frac{Z_c}{Z_a + Z_c}}; \\ Z_{2c} &= \sqrt{Z_c (Z_a + Z_c)}; \\ \operatorname{ch} g &= \sqrt{1 + \frac{Z_c}{Z_a}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-45)$$

Для схемы рис. 9-15, б:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1c} &= \sqrt{Z_b (Z_a + Z_b)}; \\ Z_{2c} &= Z_a \sqrt{\frac{Z_b}{Z_a + Z_b}}; \\ \operatorname{ch} g &= \sqrt{1 + \frac{Z_b}{Z_a}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-46)$$

При расчете электрических фильтров (см. гл. 10) и в ряде других случаев за исходные схемы Г-образных четырехполюсников принимаются схемы рис. 9-15, в и г, причем мера передачи Г-образного четырехполюсника обозначается через $g/2$, для того чтобы при согласованном каскадном соединении двух таких четырехполюсников получался Т- или П-образный четырехполюсник с мерой передачи g (см. § 9-14). При этом характеристическое сопротивление со стороны параллельной ветви обозначается через Z_{Π} , а со стороны последовательной ветви — через Z_T .

На основании (9-45) или (9-46):

$$\left. \begin{aligned} Z_T &= \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}; \\ Z_{\Pi} &= \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}; \end{aligned} \right\} \quad (9-47)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{g}{2} &= \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}; \\ \operatorname{sh} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-48)$$

Эти выражения используются в теории электрических фильтров.

9-14. Т-ОБРАЗНЫЙ И П-ОБРАЗНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

В § 9-5 рассматривались схемы замещения четырехполюсника и приводились схемы Т-образного и П-образного четырехполюсников. Коэффициенты таких четырехполюсников вычисляются по общей методике, описанной в § 9-2, 9-3 и 9-4.

Так, для Т-образной схемы рис. 9-16 получим:

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_b}{Z_a} & Z_b + Z_c + \frac{Z_b Z_c}{Z_a} \\ \frac{1}{Z_a} & 1 + \frac{Z_c}{Z_a} \end{vmatrix}.$$

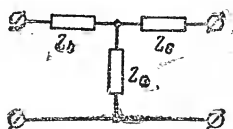


Рис. 9-16. Т-образный четырехполюсник.

Характеристические параметры находятся по формулам (9-25) и (9-26).

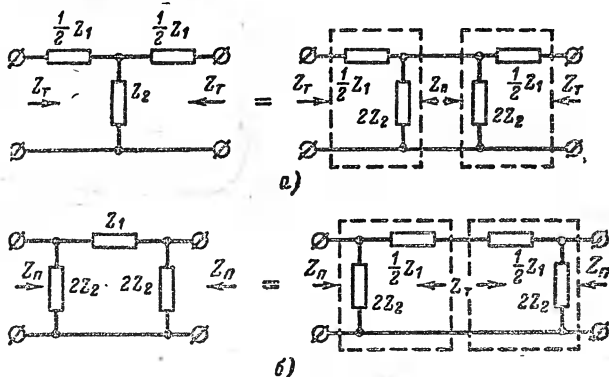


Рис. 9-17. Разложение симметричных Т-образного (а) и П-образного (б) четырехполюсников на Г-образные.

Симметричные Т- и П-образные четырехполюсники можно получить согласованным каскадным соединением двух одинаковых Г-образных четырехполюсников (рис. 9-17, а и б). Результирующие четырехполюсники имеют характеристические сопротивления Z_T и Z_{Π} , определяемые согласно (9-47), и меру передачи g , вдвое пре-

вышающую меру передачи Г-образного четырехполюсника.

С учетом (9-48) имеем:

$$\operatorname{ch} g = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{2g}{2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \quad (9-49)$$

Тот же результат получается на основании (9-26).

9-15. СИММЕТРИЧНЫЙ МОСТОВОЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК

Для симметричного мостового четырехполюсника (см. рис. 9-18) в соответствии с § 9-3 можно получить

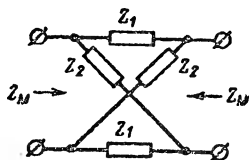


Рис. 9-18. Мостовой четырехполюсник.

коэффициенты формы $\|A\|$:

$$\|A\| = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ \frac{2}{Z_1 - Z_2} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{bmatrix}.$$

Характеристические параметры симметричного мостового четырехполюсника находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Z_M &= \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{Z_1 Z_2}; \\ \operatorname{ch} g &= A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}; \\ \operatorname{sh} g &= \sqrt{A_{12} A_{21}} = \frac{2 \sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2 - Z_1}; \\ \operatorname{sh} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} g - 1}{2}} = \sqrt{\frac{Z}{Z_2 - Z_1}}; \\ \operatorname{ch} \frac{g}{2} &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{g}{2}} = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_2 - Z_1}}; \\ \operatorname{th} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-50)$$

Как уже отмечалось в § 9-5, мостовой четырехполюсник является физически реализуемым эквивалентом для любого реально осуществимого симметричного пассивного четырехполюсника [Л. 2 и 16].

9-16. ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

Последовательно-параллельное соединение двух четырехполюсников представляет собой один из основных видов цепи с обратной связью, в которой напряжение на выходе воздействует на входные напряжения системы. Пусть некоторое устройство, которое назовем основным, представляет собой четырехполюсник с передаточной функцией $K'(j\omega) = \dot{U}_2'/\dot{U}_1$ (рис. 9-19).

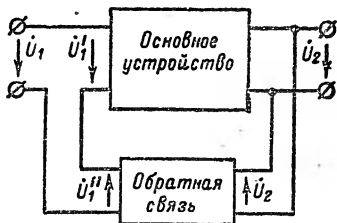


Рис. 9-19. Цепь с обратной связью.

Если выходное напряжение $\dot{U}_2$ подвести к зажимам другого четырехполюсника, называемого устройством обратной связи, и включить его противоположные зажимы последовательно с входными зажимами основного устройства, то получится система с обратной связью по напряжению.

Обозначим передаточную функцию устройства обратной связи через $K''(j\omega) = \dot{U}_1''/\dot{U}_2$. Очевидно, $\dot{U}_1 = \dot{U}_1' - \dot{U}_1''$.

Следовательно, передаточная функция всей системы

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1' - \dot{U}_1''},$$

или, если разделить числитель и знаменатель на $\dot{U}_1'$,

$$K = \frac{K'}{1 - K'K''}. \quad (9-51)$$

Если поменять полярность одной из пар зажимов устройства обратной связи, то в знаменателе (9-51) вместо знака минус получится знак плюс.

Обратная связь, при которой напряжение, пропорциональное выходному напряжению, добавляется к входному напряжению системы так, что $|K| > |K'|$, называется

ся положительной; если же $|K| < |K'|$, то обратная связь называется отрицательной.

Выражение (9-51) может быть переписано так:

$$K = \frac{1}{K''} \cdot \frac{K' K''}{1 - K' K''}.$$

Если $|K' K''| \gg 1$, то

$$K \approx -\frac{1}{K''}.$$

Это выражение показывает, что передаточная функция системы зависит от передаточной функции устройства обратной связи. Регулируя последнюю, можно воздействовать на передаточную функцию всей системы.

9-17. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

9-1. Доказать, что в случае симметричного четырехполюсника, нагруженного согласованно, коэффициент передачи по напряжению равен:

$$\frac{1}{A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 - 1}}.$$

9-2. Доказать, что

$$Z_{21} = \pm \sqrt{Z_{2x}(Z_{1x} - Z_{1k})},$$

где Z_{1x} , Z_{2x} , Z_{1k} — параметры холостого хода и короткого замыкания.

9-3. Доказать, что

$$e^{-2g} = \frac{Z_{1c} - Z_{1k}}{Z_{1c} + Z_{1k}} = \frac{Z_{2c} - Z_{2k}}{Z_{2c} + Z_{2k}}.$$

9-4. Доказать, что коэффициент передачи по напряжению четырехполюсника, нагруженного произвольным сопротивлением Z_2 , равен коэффициенту передачи по напряжению при холостом ходе, деленному на $1 + \frac{Z_{2k}}{Z_2}$.

9-5. Доказать, что коэффициент передачи по току четырехполюсника, нагруженного произвольным сопротивлением Z_2 , равен коэффициенту передачи по току при коротком замыкании, деленному на $1 + \frac{Z_2}{Z_{2x}}$.

9-6. Определить коэффициент передачи по напряжению при холостом ходе и коэффициент передачи по току при коротком замыкании для П-образного четырехполюсника, продольная ветвь которого состоит из L , а поперечные ветви — из C (каждая),

Ответ: $\frac{1}{1 - \omega^2 LC}$.

9-7. В схеме рис. 9-16 заданы: $Z_a = 30 - j40$; $Z_b = Z_c = 12 + j16$ ом. Определить a и b .

Ответ: 0,562 *нп*; 0,703 *рад*.

9-8. Определить коэффициенты A трансформатора (см. рис. 8-11). Дано: $r_1 = 15$ ом; $L_1 = 20$ мГн; $r_2 = 45$ ом; $L_2 = 60$ мГн; $M = 25$ мГн; $\omega = 1000$ рад/сек.

Ответ: $1 \angle -36^\circ 50'$; $72,3 \angle -3^\circ 20'$ ом; $0,04 \angle -90^\circ$ сим; $3 \angle -36^\circ 50'$.

9-9. Определить характеристическое сопротивление и меру передачи симметричного мостового четырехполюсника.

9-10. Доказать для симметричного мостового четырехполюсника, что

$$Z_{11} = \frac{1}{2} (Z_1 + Z_2); \quad Z_{12} = \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1);$$

$$Y_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right); \quad Y_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1} \right).$$

9-11. Вывести условия эквивалентности симметричных Т-образного и мостового четырехполюсника.

9-12. Несимметричный четырехполюсник нагружен сопротивлением Z_2 . Пользуясь формой $\|Z\|$, доказать, что коэффициент передачи по току равен $K_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_2}$, а коэффициент передачи по напряжению

$$K_U = \frac{Z_{21} Z_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} + Z_{11} Z_2}.$$

9-13. Опыт холостого хода со стороны входных зажимов и опыты холостого хода и короткого замыкания со стороны выходных зажимов четырехполюсника дали следующие результаты:

$$I_{1x} = 0,24a; \quad P_{1x} = 13 \text{ вт}; \quad I'_{2x} = 1,11a;$$

$$P_{2x} = 92,3 \text{ вт}; \quad I'_{2k} = 1,04 a; \quad P_{2k} = 89,2 \text{ вт}.$$

Напряжение источника питания при всех опытах было равно 100 в, и все три тока отставали по фазе от напряжения.

Определить коэффициенты A .

Ответ: $7,44 \angle 120^\circ 30'$; $715 \angle 151^\circ 30'$ ом; $17,9 \cdot 10^{-2} \angle 63^\circ 25'$ сим; $1,59 \angle 97^\circ$.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

10-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Изучая свойства резонансных цепей (см. гл. 5), мы встретились с понятием полосы пропускания колебательного контура. Было установлено, что чем выше добротность контура, тем уже его полоса пропускания и соот-

ветственно острее резонансная кривая. Острота резонансной кривой характеризует частотную избирательность колебательного контура, т. е. его способность пропускать или задерживать электрические колебания только определенной частоты — резонансной или близкой к ней.

Однако на практике встречается необходимость выделения не только одной какой-либо частоты, но целой полосы частот. Например, для передачи по радио разговора требуется отделить определенную полосу частот, в пределах которой ведется данная передача, от всех других частот. Такое разделение частот осуществляется с помощью электрических фильтров.

Электрический фильтр представляет собой пассивный четырехполюсник, пропускающий некоторую определенную полосу частот с малым затуханием; вне этой полосы частот затухание велико. Полоса частот, при которых затухание мало, называется полосой пропускания фильтра. Остальную область частот составляет полоса задерживания (или затухания) фильтра.

Практическое применение электрических фильтров весьма широко и разнообразно. Они применяются не только в аппаратуре связи, но и в автоматике, приборостроении и других областях техники, где используется принцип разделения частот.

Система одновременного телеграфирования и телефонирования по одному и тому же проводу с использованием индуктивностей и емкостей для устранения влияния одного вида связи на другой была применена в России впервые в 1880 г. военным инженер-капитаном Г. Г. Игнатьевым, осуществившим разделение двух каналов связи (телефона и телеграфа) с помощью индуктивных катушек и конденсаторов.

Эти элементы, примененные в целях отделения полосы нижних частот от полосы верхних частот, являлись простейшим видом фильтрующих устройств.

Совершенствование электрических фильтров неразрывно связано с последующим развитием высокочастотной техники и электроники. Создание многоканальной проводной связи и радиосвязи сопровождалось разработкой теории электрических фильтров и методов их расчета и непрерывным совершенствованием самих фильтров. Теория электрических фильтров базируется на общей теории четырехполюсников.

Электрические фильтры могут быть классифицированы различным образом.

Классификация по пропускаемым частотам. В зависимости от пропускаемого спектра частот фильтры разделяются на фильтры: а) нижних частот (низкочастотные); б) верхних частот (высокочастотные); в) полосовые; г) заграждающие (режекторные).

Классификация по схемам звеньев. Фильтры могут состоять из звеньев Г-, Т-, П-образных, мостовых и др. В зависимости от числа звеньев фильтр может быть одноступенчатым или многоступенчатым.

Классификация фильтров по характеристикам. В отличие от простейших фильтров типа k различают фильтры более высокого класса — производные фильтры типа m и др. Смысл коэффициентов k и m будет пояснен ниже.

Классификация фильтров по типам элементов. Различают фильтры: а) реактивные (состоящие из элементов L и C); б) пьезоэлектрические (состоящие преимущественно из кварцевых пластин); в) безындукционные (состоящие из элементов r и C) и др.

10-2. УСЛОВИЕ ПРОПУСКАНИЯ РЕАКТИВНОГО ФИЛЬТРА

Наименьшее число элементов, из которых может состоять фильтр, равно двум (Г-образное звено). Фильтры, содержащие Т- и П-образные звенья, могут рассматри-

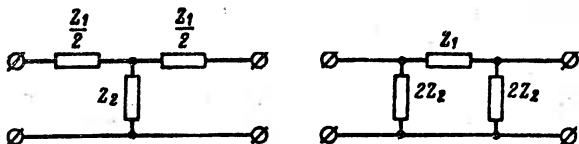


Рис. 10-1. Симметричные Т- и П-образные фильтры.

ваться в качестве комбинаций, составленных из Г-образных звеньев.

В случае симметричного Т- или П-образного фильтра (рис. 10-1) параметры A_{11} и g вычисляются по формуле (9-49):

$$A_{11} = \operatorname{ch} g = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \quad (10-1)$$

Мера передачи g симметричного Т- или П-образного фильтра может быть определена как удвоенная мера передачи $g/2$ Г-образного фильтра. Согласно (9-48)

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (10-2)$$

Полосой пропускания реактивного фильтра является область частот, при которых собственное затухание реактивного фильтра равно нулю ($a = 0$).

Покажем, что четырехполюсник, состоящий из одних индуктивностей или одних емкостей (знаки Z_1 и Z_2 одинаковы), не может иметь полосы пропускания. Иначе говоря, такой четырехполюсник не является фильтром. Действительно, пусть Г-образный или симметричный Т- или П-образный четырехполюсник состоит из чисто реактивных элементов, т. е.

$$Z_1 = \pm jx_1, \quad Z_2 = \pm jx_2; \quad (10-3)$$

здесь x_1 и x_2 — абсолютные значения реактивных сопротивлений; положительные знаки относятся к индуктивным, отрицательные — к емкостным элементам.

Согласно (10-2)

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{g}{2} &= \operatorname{sh} \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \\ &+ j \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}, \end{aligned}$$

откуда, разделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}; \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = 0. \quad (10-4)$$

Ввиду того что гиперболический косинус действительного аргумента не может быть равен нулю ($\operatorname{ch} \frac{a}{2} \geq 1$), на основании (10-4)

$$\sin \frac{b}{2} = 0 \text{ и } \cos \frac{b}{2} = \pm 1.$$

Таким образом, при одинаковом характере сопротивлений Z_1 и Z_2 затухание фильтра определяется по формуле

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}},$$

т. е. $a > 0$ (четыреполюсник не имеет полосы пропускания).

Четыреполюсник обладает свойствами фильтра только в том случае, когда сопротивления Z_1 и Z_2 имеют разные знаки, т. е.

$$Z_1 = \pm jx_1; \quad Z_2 = \pm jx_2. \quad (10-5)$$

При этом

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = 0; \quad (10-6)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (10-7)$$

Уравнение (10-6) удовлетворяется при

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = 0 \quad (10-8)$$

или

$$\cos \frac{b}{2} = 0. \quad (10-9)$$

Условие (10-8) соответствует полосе пропускания ($a = 0$). В этом случае $\operatorname{ch} \frac{a}{2} = 1$ и согласно (10-7)

$$\sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (10-10)$$

По такому закону изменяется коэффициент фазы фильтра в полосе пропускания (x_1 и x_2 зависят от частоты).

В свою очередь условие (10-9) соответствует полосе задерживания. В этом случае $b = \pm \pi$; $\sin \frac{b}{2} = \pm 1$ и на основании (10-7)

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (10-11)$$

По такому закону изменяется затухание фильтра в полосе задерживания. Формулы (10-10) и (10-11) спра-

ведливы для Г-образных и симметричных Т- и П-образных фильтров. При этом под $a/2$ и $b/2$ подразумеваются собственное затухание и коэффициент фазы каждого Г-образного звена. Т- или П-образный фильтр состоит из двух Г-образных звеньев, и поэтому его собственное затухание и коэффициент фазы равны соответственно a и b .

Для любого симметричного реактивного фильтра в полосе пропускания, т. е. при $a = 0$, выполняется условие

$$A_{11}(\omega) = \operatorname{ch} g = \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} jb = \cos b.$$

Поскольку косинус изменяется от -1 до $+1$,

$$-1 \leq A_{11}(\omega) \leq 1.$$

Это условие в случае Т- или П-образного фильтра принимает вид:

$$-1 \leq 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \leq 1$$

или

$$-2 \leq \frac{Z_1}{2Z_2} \leq 0.$$

Разделив все части неравенства на 2, получим

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0. \quad (10-12)$$

: Таким образом, предельные частоты, лежащие на границе полосы пропускания (так называемые частоты с р е з а), удовлетворяют условиям:

$$Z_1 = -4Z_2; \quad Z_1 = 0. \quad (10-13)$$

Неравенство (10-12) носит название условия пропускания реактивного фильтра (Г-, Т- или П-образного).

Частоты среза находятся из уравнений (10-13) аналитически (если заданы функциональные выражения Z_1 и Z_2 в зависимости от частоты) или графически (если заданы частотные характеристики Z_1 и Z_2).

На рис. 10-2, б в виде примера показаны частотные характеристики Z_1 и Z_2 фильтра, изображенного на рис. 10-2, а; полоса пропускания графически найдена на рис. 10-2, в.

Частоты среза могут быть также получены из рассмотрения частотной характеристики входного сопротив-

ления фильтра, нагруженного согласованно, т. е. при помощи характеристического сопротивления фильтра.

В случае Т-образного фильтра характеристическое сопротивление

$$Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}; \quad (10-14)$$

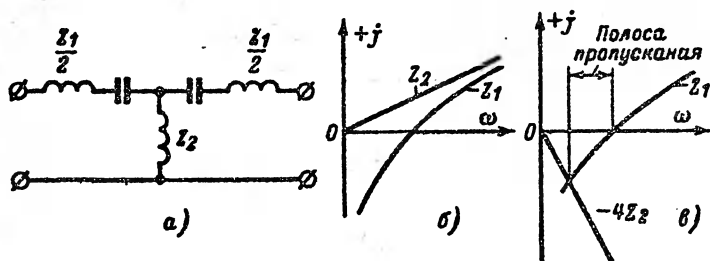


Рис. 10-2. Графическое определение полосы пропускания на основании условий (10-13).

в случае П-образного фильтра

$$Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}. \quad (10-15)$$

Как было доказано выше, условие $a=0$ может быть получено только при разных знаках Z_1 и Z_2 . В этом случае

$$\frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0, \quad (10-16)$$

а произведение $Z_1 Z_2$ — действительное число.

Выражение (10-14) и (10-15) получаются действительными при

$$1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \geq 0,$$

т. е. при

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2}. \quad (10-17)$$

Сопоставление (10-16) и (10-17) с (10-12) показывает, что условие, при котором характеристическое сопро-

тивление рассматриваемого фильтра имеет действительное значение, совпадает с условием пропускания фильтра. Поэтому предельные частоты полосы, соответствующей действительным значениям характеристического сопротивления, являются частотами среза.

Физически это объясняется следующим образом. В полосе частот, при которых характеристическое сопротивление фильтра действительно, фильтр нагружен активным сопротивлением r , равным характеристическому по условиям согласованного включения.

Рассматриваемая здесь теория фильтров предполагает нагрузку фильтра согласованной, хотя в действительности согласовать нагрузку на всех частотах невозможно.

Мощность, потребляемая этой нагрузкой, является активной мощностью. Она равна

$$P_2 = rI_2^2 = \frac{U_2^2}{r}, \quad (10-18)$$

где I_2 и U_2 — действующие значения тока и напряжения на выходе фильтра.

Входное сопротивление симметричного фильтра, нагруженного согласованно, в зоне пропускания также равно r , и поэтому мощность на входе фильтра равна:

$$P_1 = rI_1^2 = \frac{U_1^2}{r}; \quad (10-19)$$

здесь I_1 и U_1 — действующие значения тока и напряжения на входе фильтра.

Поскольку рассматривается идеальный фильтр, т. е. фильтр, состоящий из чисто реактивных элементов, активная мощность внутри фильтра не расходуется и поэтому $P_1 = P_2$.

На основании (10-18) и (10-19) следует, что

$$I_1 = I_2; \quad U_1 = U_2,$$

т. е. затухание равно нулю.

Итак, в полосе пропускания фильтр имеет активное характеристическое сопротивление. В полосе задерживания характеристическое сопротивление фильтра является реактивным.

Отсюда вытекает простой способ графического нахождения частот среза по частотным характеристикам входных сопротивлений холостого хода (Z_x) и короткого замыкания (Z_k).

Характеристическое сопротивление Z_c фильтра связано с Z_x и Z_k формулой

$$Z_c = \sqrt{Z_x Z_k}. \quad (10-20)$$

Очевидно, что Z_c будет действительным числом при разных знаках Z_x и Z_k .

На рис. 10-3, б показаны кривые Z_x и Z_k для фильтра рис. 10-3, а. После перемножения Z_x на Z_k и извлечения

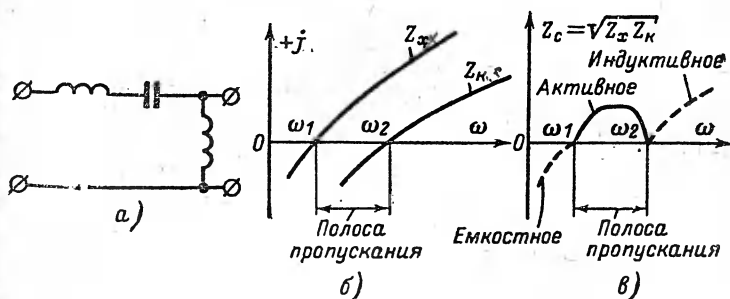


Рис. 10-3. Графическое определение полосы пропускания на основании условия (10-20).

корня получается кривая рис. 10-3, в; полоса частот, в пределах которой Z_c имеет действительное значение, т. е. представляет активное сопротивление, соответствует полосе пропускания фильтра.

Очевидно, что эта полоса ограничена частотами ω_1 и ω_2 (рис. 10-3, б); в пределах этой полосы Z_x и Z_k имеют разные знаки. Вне этой полосы Z_x и Z_k имеют одинаковый знак и, следовательно, характеристическое сопротивление в соответствии с (10-20) имеет мнимые значения (реактивное сопротивление), показанные на рис. 10-3, в пунктиром.

Данное положение является общим для фильтров без потерь всех типов.

10-3. ФИЛЬТРЫ ТИПА k

Пусть составные элементы Г-образного звена являются взаимно обратными двухполюсниками. Это означает, что произведение их комплексных сопротивлений

во всем диапазоне частот постоянно, т. е. не зависит от частоты:

$$\frac{1}{2} Z_1 \cdot 2Z_2 = Z_1 Z_2 = k^2, \quad (10-21)$$

где k — действительное число.

Можно показать, что и произведение характеристических сопротивлений Z_T и Z_Π того же Γ -образного звена также равно k^2 . Действительно, умножая (10-14) на (10-15), получаем:

$$Z_T Z_\Pi = Z_1 Z_2 = k^2.$$

Фильтры, удовлетворяющие условию (10-21), получили название фильтров типа k .

С учетом (10-5) и (10-21) выражения (10-10) — (10-12), (10-14) и (10-15) принимают вид

$$\sin \frac{b}{2} = \pm \frac{k}{2x_2} = \pm \frac{x_1}{2k}; \quad (10-10a)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \frac{k}{2x_2^2} = \frac{x_1}{2k}; \quad (10-11a)$$

$$1 \geq \frac{k}{2x_2} \geq 0; \quad 1 \geq \frac{x_1}{2k} \geq 0; \quad (10-12a)$$

$$Z_T = k \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2x_2}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{2k}\right)^2}; \quad (10-14a)$$

$$Z_\Pi = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2x_2}\right)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{2k}\right)^2}}. \quad (10-15a)$$

Таким образом, при заданном значении k достаточно воспользоваться только одной из частотных функций x_1 или x_2 (представленной аналитически или графически) для определения всех прочих характеристик фильтра типа k^* .

Приведенные выше формулы справедливы для Γ , T - и Π -образных звеньев. Иначе говоря, при одних и тех же значениях k и x_1 (или x_2) ширина полосы пропускания и характеристические сопротивления Γ -образного фильтра получаются такими же, как и в случае T - и

* В расчетах коэффициент k выбирается из условия согласования сопротивления нагрузки с характеристическим сопротивлением фильтра при определенной частоте.

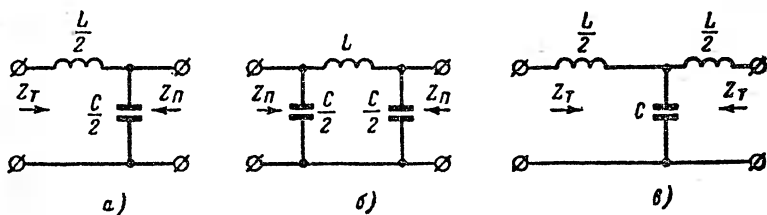


Рис. 10-4. Фильтр нижних частот типа k .

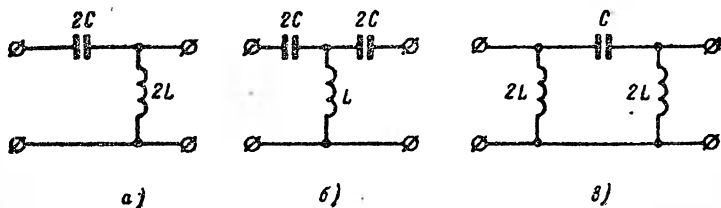


Рис. 10-5. Фильтр верхних частот типа k .

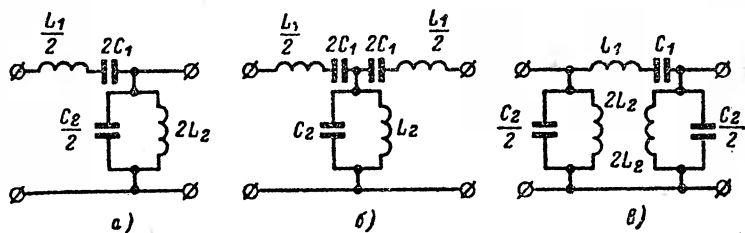


Рис. 10-6. Полосовой фильтр типа k .

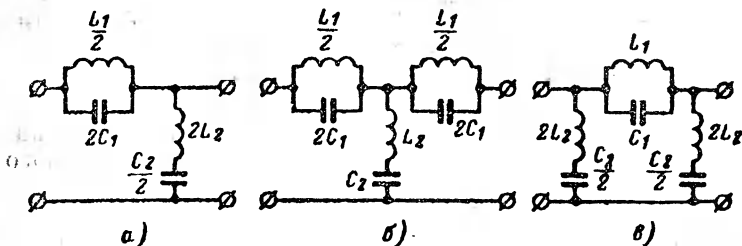


Рис. 10-7. Заграждающий фильтр типа k .

П-образных фильтров. Разница заключается лишь в собственном затухании и коэффициенте фазы, которые при переходе от Г-образного звена к Т- или П-образному звену удваиваются.

На рис. 10-4—10-7 показаны схемы фильтров нижних частот, верхних частот, полосовых и заграждающих (для Г-, Т- и П-образных звеньев).

Физическое действие таких фильтров легко объяснить тем, что на низких частотах индуктивные сопротивления малы, а емкостные велики; на высоких же частотах имеет место обратное явление — индуктивные сопротивления велики, а емкостные малы. Поэтому, например, в фильтре нижних частот (см. рис. 10-4) токи нижних частот проходят через индуктивность в нагрузку, лишь в малой степени ответвляясь в емкость.

В области же верхних частот индуктивность представляет большое сопротивление и, кроме того, ток высокой частоты, прошедший через индуктивность, замыкается в основном через емкость, представляющую для него малое сопротивление.

Аналогичные рассуждения применимы и к фильтрам верхних частот (см. рис. 10-5), которые благодаря емкостному характеру сопротивления продольной ветви и индуктивному характеру сопротивления поперечной ветви обуславливают большое затухание на нижних частотах и малое затухание на верхних.

В свою очередь в полосовых и заграждающих фильтрах (рис. 10-6 и 10-7) проявляются частотные зависимости сопротивлений двухполюсников, состоящих из последовательно и параллельно соединенных индуктивностей и емкостей.

Частотные характеристики a , b , Z_T и Z_{Π} рассматриваемых фильтров типа k изображены на рис. 10-8—10-11, а расчетные выражения основных характеристик и параметров фильтров сведены в табл. 10-1* и 10-2.

Как видно из расчетных выражений и характеристик (рис. 10-8 и 10-9), в пределах полосы пропускания напря-

$$* \text{ Примечание к табл. 10-1. } F = \frac{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}}, \quad \text{где } f_m = \sqrt{f_1 f_2}.$$

Основные характеристики фильтров

Характеристика		Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
Полоса пропускания	$\sin \frac{b}{2}$ при $a = 0$	$\frac{f}{f_c}$	$-\frac{f_c}{f}$	F	$-\frac{1}{F}$
	$\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ b	$\frac{f}{f_c}$ π	$\frac{f_c}{f}$ $-\pi$	$ F $ $\pm \pi$	$\frac{1}{ F }$ $\pm \pi$
Z_T		$k \sqrt{1 + \left(\frac{if}{f_c}\right)^2}$	$k \sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{if}\right)^2}$	$k \sqrt{1 + (jF)^2}$	$k \sqrt{1 + \frac{1}{(jF)^2}}$
Z_{Π}		$\frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{if}{f_c}\right)^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{if}\right)^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{1 + (jF)^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{1 + \frac{1}{(jF)^2}}}$
k		$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$

Расчетные параметры фильтров

Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
$L = \frac{k}{\pi f_c}$	$L = \frac{k}{4\pi f_c}$	$L_1 = \frac{k}{\pi(f_2 - f_1)}$ $L_2 = \frac{k(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}$	$L_1 = \frac{k(f_2 - f_1)}{\pi f_1 f_2}$ $L_2 = \frac{k}{4\pi(f_2 - f_1)}$
$C = \frac{1}{\pi f_c k}$	$C = \frac{1}{4\pi f_c k}$	$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi k f_1 f_2}$, $C_2 = \frac{1}{\pi k(f_2 - f_1)}$	$C_1 = \frac{1}{4\pi k(f_2 - f_1)}$ $C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi k f_1 f_2}$
$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}}$	$f_c = \frac{1}{4\pi \sqrt{LC}}$	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} \mp \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \right]$	$f_{1,2} = \frac{1}{8\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{16}{L_1 C_1}} \mp \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \right]$

жение на входе симметричного фильтра, нагруженного согласованно, опережает напряжение на выходе ($b > 0$ — фильтр нижних частот) или отстает от него ($b < 0$ — фильтр верхних частот); в случае полосового фильтра

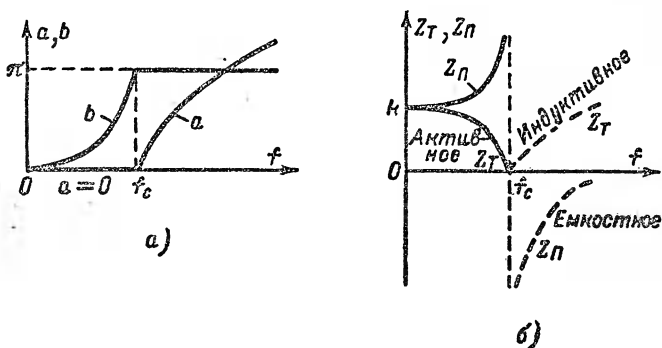


Рис. 10-8. Частотные характеристики фильтра нижних частот типа k .

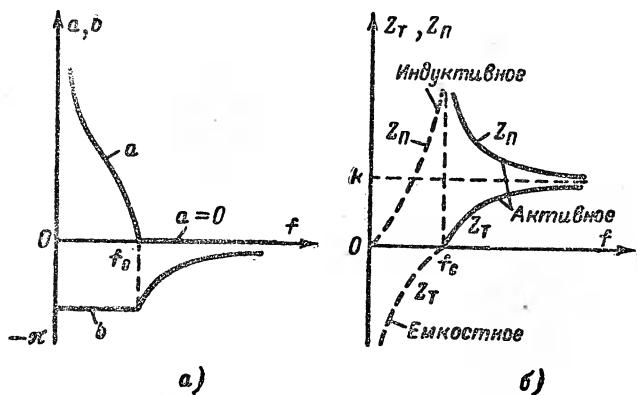


Рис. 10-9. Частотные характеристики фильтра верхних частот типа k .

(рис. 10-10) знак b изменяется в пределах полосы пропускания с минуса на плюс. В полосе задерживания симметричного фильтра коэффициент фазы b равен π (фильтр нижних частот) или $-\pi$ (фильтр верхних частот); в случае симметричного полосового фильтра ко-

эффицент фазы ниже полосы пропускания равен $-\pi$, а выше полосы пропускания — равен π .

Выше отмечалось, что коэффициент фазы Г-образного фильтра равен $b/2$, и поэтому в полосе задерживания

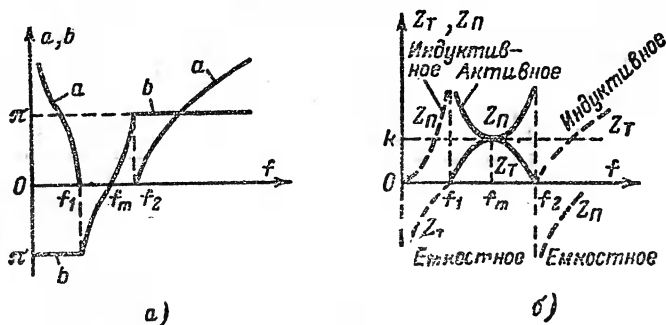


Рис. 10-10. Частотные характеристики полосового фильтра типа k .

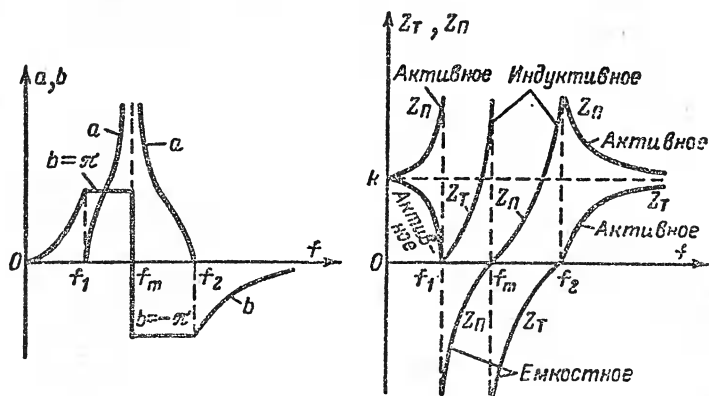


Рис. 10-11. Частотные характеристики заграждающего фильтра типа k .

он равен $\pi/2$ или $-\pi/2$ в зависимости от типа фильтра.

Если Г-образный фильтр нагружен согласованно, то угол фазового сдвига между напряжениями на входе и выходе составляет $\frac{1}{2}(b + \varphi_{1c} - \varphi_{2c})$, где φ_{1c} и φ_{2c} — углы характеристических сопротивлений рассматриваемого Г-образного фильтра (см. § 9-7).

В полосе задерживания характеристические сопротивления мнимые, разного знака и соответственно разность углов $\varphi_{1c} - \varphi_{2c}$ составляет π или $-\pi$. В этом случае угол между входным и выходным напряжениями Г-образного фильтра, нагруженного согласованно, с учетом того, что в полосе затухания $b/2 = \pm\pi/2$, получается равным $\pm\pi$. Это соответствует физическим представлениям о фазовых сдвигах в реактивных цепях, поскольку в полосе задерживания нагрузка фильтра предполагается также реактивной.

Следует заметить, что если, например, Г-образный фильтр нижних частот согласованно нагружен со стороны выхода, имеющего характеристическое сопротивление Z_{Π} , то в полосе пропускания нагрузка фильтра, равная Z_{Π} , активна.

Можно показать, что в результате параллельного соединения активного сопротивления нагрузки (Z_{Π}) с емкостным сопротивлением поперечной ветви Г-образного звена ($2Z_2$) получится активно-емкостное сопротивление, емкостная составляющая которого компенсирует индуктивное сопротивление продольной ветви ($\frac{1}{2} Z_1$). В результате останется только активная составляющая, равная характеристическому сопротивлению Z_T при данной частоте f .

Для определения знака характеристического сопротивления фильтра в полосе задерживания ($+j$ или $-j$) удобно пользоваться формулами табл. 10-1, в которых под корнем сохранен множитель j . В полосе задерживания слагаемое, содержащее множитель j , больше единицы; поэтому при отбрасывании слагаемого 1 под корнем остается выражение с множителем j в числителе или знаменателе в зависимости от типа фильтра и от того, рассматривается ли Z_T или Z_{Π} .

Преимуществом фильтров типа k является их простота, а также то, что в полосе задерживания затухание по мере удаления частоты от частоты среза неуклонно возрастает.

Что касается недостатков фильтров типа k , то они в основном заключаются в следующем:

1. Характеристические сопротивления Z_T и Z_{Π} в полосе пропускания фильтра очень резко изменяются в зависимости от частоты, вследствие чего согласовать на-

грузку с фильтром удастся только в ограниченной части полосы пропускания.

2. Кривая затухания вблизи частоты среза имеет недостаточную крутизну, вследствие чего не обеспечивается четкое разделение частот.

Для увеличения крутизны кривой затухания приходится применять многозвенный фильтр.

10-4. ФИЛЬТРЫ ТИПА m

В целях наилучшего согласования нагрузки с фильтром необходимо, чтобы характеристическое сопротивление фильтра было по возможности постоянным в полосе пропускаемых частот. В связи с этим попытаемся изменить продольную или поперечную ветвь Γ -образного звена типа k таким образом, чтобы получилось новое Γ -образное звено с характеристическим сопротивлением, мало меняющимся в зависимости от частоты в полосе пропускания. Второе характеристическое сопротивление этого звена должно быть равно характеристическому сопротивлению исходного звена типа k (именуемого «прототипом»).

Равенство характеристических сопротивлений нового фильтра (так называемого фильтра типа m) и прототипа позволяет включать их согласованно и образовывать, таким образом, комбинированные фильтры, сочетающие в себе преимущества фильтров обоих типов. Ввиду того что Γ -образный прототип имеет два характеристических сопротивления, в данном случае возможны два варианта:

1. Одинаковыми остаются характеристические сопротивления Z_T (рис. 10-12). Полученное при этом звено m носит название последовательно-производного.

2. Одинаковыми остаются характеристические сопротивления Z_{Π} (рис. 10-13). В этом случае звено m носит название параллельно-производного.

Рассмотрим первый вариант. Из условия равенства характеристических сопротивлений Z_T звеньев, изображенных на рис. 10-12, a и b , следует:

$$Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} = \sqrt{Z_{1m} Z_{2m} \left(1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}\right)}. \quad (10-22)$$

Пусть

$$Z_{1m} = mZ_1, \quad (10-23)$$

причем

$$1 \geq m \geq 0. \quad (10-24)$$

Подстановка (10-23) в (10-22) и решение полученного уравнения относительно $2Z_{2m}$ дают

$$2Z_{2m} = \frac{2Z_2}{m} + \frac{Z_1}{2} \frac{1-m^2}{m}. \quad (10-25)$$

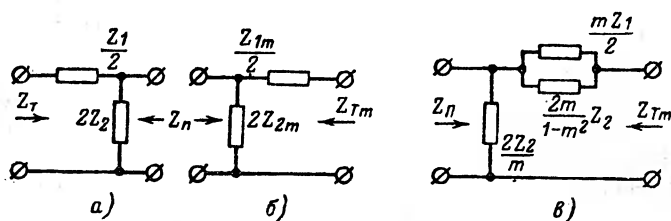


Рис. 10-12. Образование последовательно-производного звена типа m .

Из этого выражения видно, что поперечное плечо последовательно-производного Г-образного звена типа m состоит из двух последовательно включенных сопротивлений $2Z_2/m$ и $\frac{(1-m^2)Z_1}{2m}$ (см. рис. 10-12, в).

Рассмотрим теперь второй вариант. Исходя из условия равенства характеристических сопротивлений применительно к рис. 10-13, а и б, имеем:

$$Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}}. \quad (10-26)$$

Пусть

$$Z_{2m} = \frac{Z_2}{m}, \quad (10-27)$$

причем сохраняется условие (10-24).

После подстановки (10-27) в (10-26) решение уравнения относительно $2/Z_{1m}$ дает:

$$\frac{2}{Z_{1m}} = \frac{2}{mZ_1} + \frac{1}{Z_2} \cdot \frac{1-m^2}{2m}. \quad (10-28)$$

Значит, продольное плечо параллельно-производного Г-образного звена типа m состоит из сопротивлений $mZ_1/2$ и $\frac{2mZ_2}{1-m^2}$, соединенных параллельно (рис. 10-13, в).

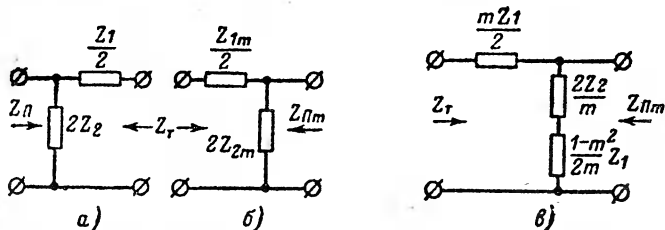


Рис. 10-13. Образование параллельно-производного звена типа m .

В соответствии с (10-25) и (10-28) могут быть найдены выражения характеристических сопротивлений Z_{Tm} (рис. 10-13) и $Z_{\Pi m}$ (см. рис. 10-12):

$$Z_{Tm} = Z_T \frac{1}{1 + (1 - m^2) \frac{Z_1}{4Z_2}}; \quad (10-29)$$

$$Z_{\Pi m} = Z_{\Pi} \left[1 + (1 - m^2) \frac{Z_1}{4Z_2} \right]. \quad (10-30)$$

Очевидным является соотношение

$$Z_{Tm} Z_{\Pi m} = Z_T Z_{\Pi} = k^2. \quad (10-31)$$

Полосы пропускания фильтров типа k и полученных из них фильтров типа m совпадают. Действительно, на основании (10-23) и (10-25) можно получить:

$$\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} = \frac{mZ_1}{4 \left(\frac{Z_2}{m} + \frac{Z_1}{4} \frac{1-m^2}{m} \right)} = \frac{m^2}{\frac{4Z_2}{Z_1} + 1 - m^2}; \quad (10-32)$$

то же самое выражение получается на основании (10-27) и (10-28) для другого варианта фильтра типа m . Подставляя в (10-32) условия (10-13), отвечающие предельным частотам фильтра типа k , получаем при $Z_1=0$ и $Z_1=-4Z_2$:

$$\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} = 0; \quad \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} = -1. \quad (10-33)$$

Эти условия соответствуют предельным частотам фильтра типа m (имеющего последовательно- или параллельно-производное звено).

Следовательно, частоты среза для обоих типов фильтров совпадают.

О совпадении полос пропускания прототипа и производных от него звеньев можно также судить на основании равенства характеристических сопротивлений (в полосе пропускания характеристические сопротивления имеют действительные значения).

В полосе задерживания в соответствии с общей формулой (10-11)

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|} = \frac{m}{\sqrt{\left| \frac{4Z_2}{Z_1} + 1 - m^2 \right|}}. \quad (10-34)$$

Затухание обращается в бесконечность при частоте f_∞ , при которой $\frac{4Z_2}{Z_1} + 1 - m^2 = 0$, или, что то же,

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{1}{1 - m^2}.$$

При этом условии Z_{2m} , выражаемое формулой (10-25), обращается в нуль. Это означает, что при f_∞ наступает резонанс напряжений в поперечной ветви (в случае последовательно-производного звена). При этом же условии Z_{1m} , выражаемое формулой (10-28), обращается в бесконечность, что означает резонанс токов в продольной ветви (в случае параллельно-производного звена). Частота f_∞ называется частотой бесконечно большого затухания.

При переходе частоты через значение f_∞ , т. е. в области частот $f > f_\infty$ (когда $f_\infty > f_c$) или $f < f_\infty$ (когда $f_\infty < f_c$), сопротивления обоих плеч фильтра Z_{1m} и Z_{2m} имеют одинаковый знак. В этом случае в соответствии с § 10-2 в левой части формулы (10-34) гиперболический косинус должен быть заменен гиперболическим синусом.

При $4Z_2/Z_1$, стремящемся к нулю,

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}. \quad (10-35)$$

На рис. 10-14 показано семейство кривых собственного затухания a фильтра типа m (при разных значениях

m) в функции $\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}$. При $m=1$ кривая затухания обращается в характеристику фильтра типа k .

Чем меньше коэффициент m , тем меньше значение f_∞ , т. е. тем круче кривая затухания a . Однако, как видно из рис. 10-14, предельное значение a при $\frac{Z_1}{4Z_2} \rightarrow \infty$ уменьшается по мере снижения m .

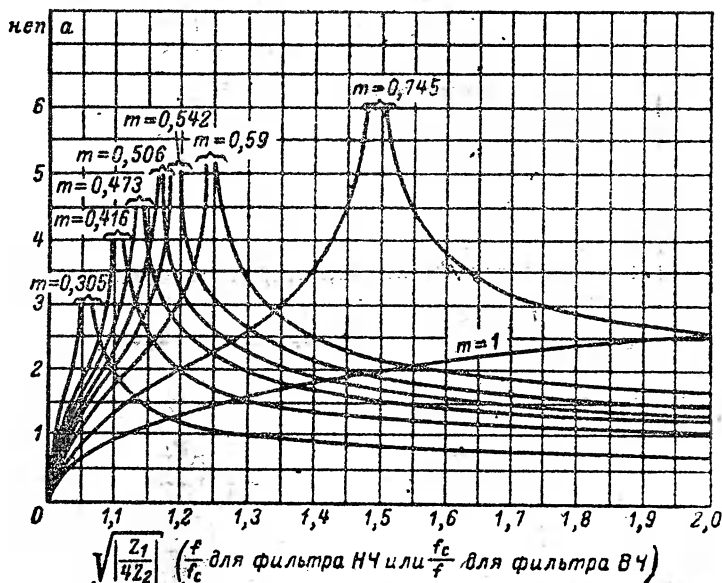


Рис. 10-14. Кривые затухания фильтра типа m .

Наряду с большой крутизной кривой затухания фильтры типа m отличаются от фильтров типа k относительно большим постоянством характеристических сопротивлений Z_{Tm} или $Z_{\Pi m}$ (по сравнению с частотными характеристиками Z_T и Z_Π).

На рис. 10-15 изображены кривые Z_{Tm}/k и соответственно $k/Z_{\Pi m}$ в зависимости от величины $\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}$, равной f/f_c для фильтров нижних частот и f_c/f для фильтров верхних частот.

В спектре частот, соответствующем $\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|} = 0 \div 0,9$, характеристические сопротивления Z_{Tm} и $Z_{\Pi m}$ отклоняются от величины k на $\pm 5\%$ при $m=0,59$ и на $\pm 10\%$ при $m=0,54$.

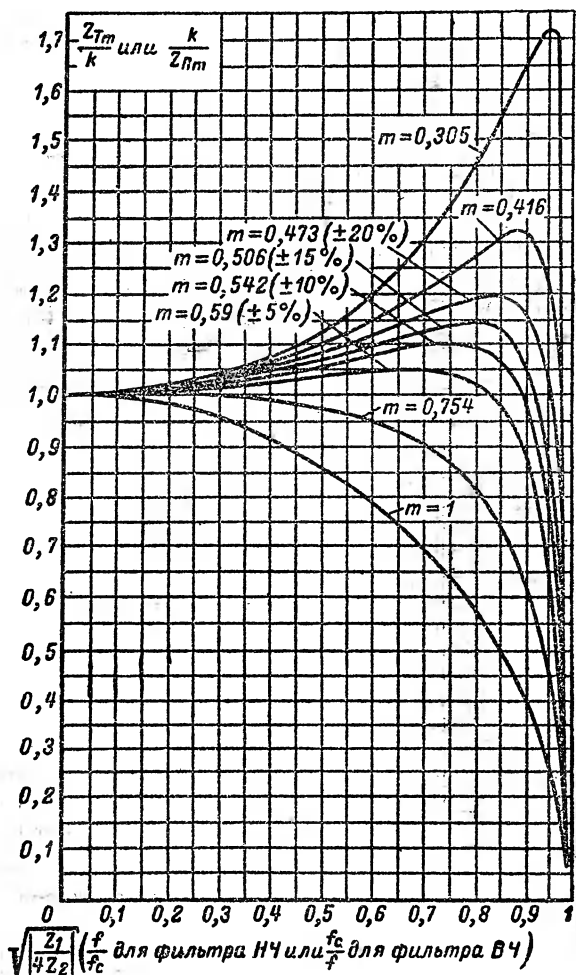


Рис. 10-15. Характеристическое сопротивление фильтра типа m .

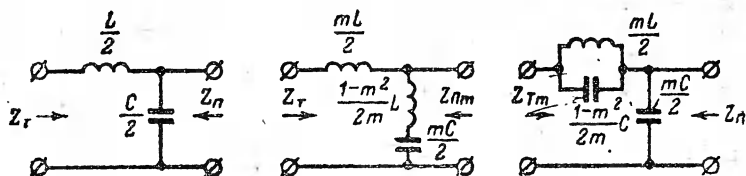


Рис. 10-16. Фильтр нижних частот типа m .

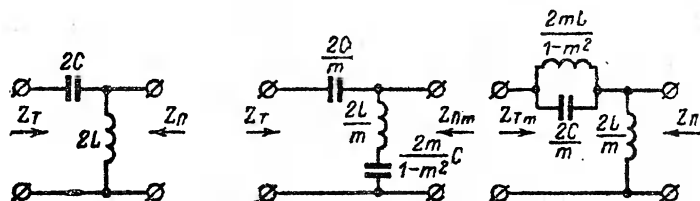


Рис. 10-17. Фильтр верхних частот типа m .

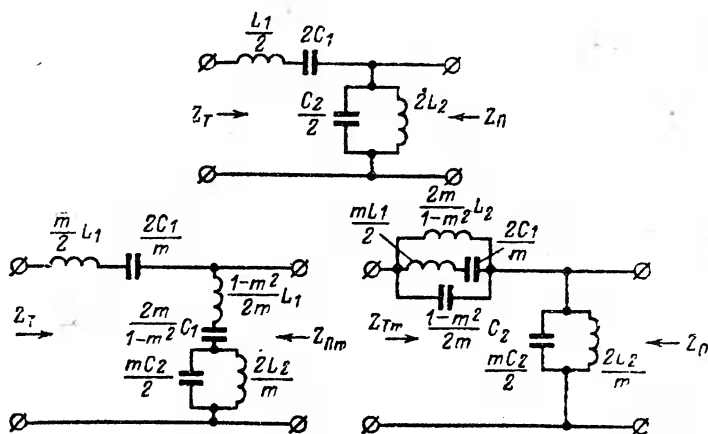


Рис. 10-18. Полосовой фильтр типа m .

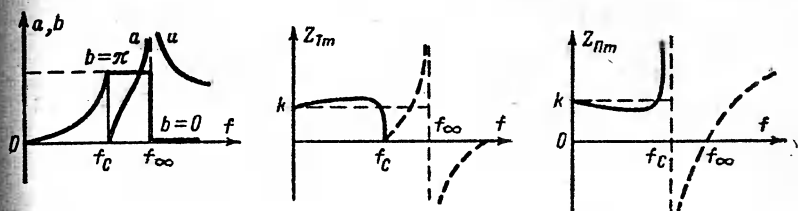


Рис. 10-19. Частотные характеристики фильтра нижних частот типа m .

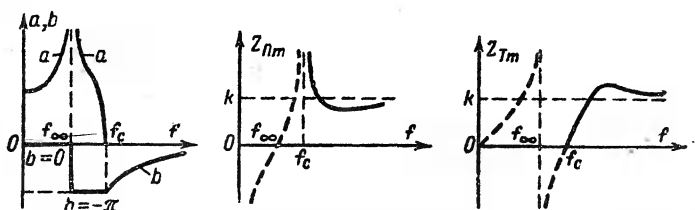


Рис. 10-20. Частотные характеристики фильтра верхних частот типа m .

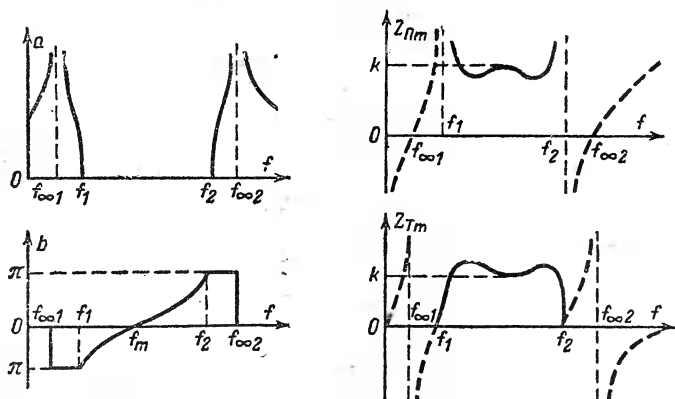


Рис. 10-21. Частотные характеристики полосового фильтра типа m .

Типовые схемы Г-образных звеньев фильтров нижних частот, верхних частот и полосовых фильтров типов k и m приведены на рис. 10-16—10-18; частотные характеристики фильтров типа m показаны на рис. 10-19—10-21.

Как видно из частотных характеристик, фильтры типа m имеют более постоянную величину характеристики-

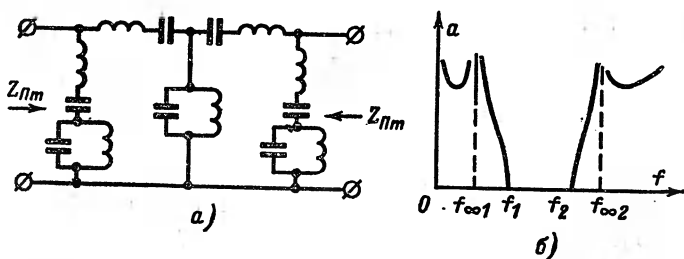


Рис. 10-22. Комбинированный фильтр.

a — схема; b — характеристика затухания.

ческого сопротивления в полосе пропускания, чем фильтры типа k . Кроме того, они обладают большей крутизной кривой затухания.

Недостатком фильтров типа m является снижение затухания при $f < f_{\infty}$ (фильтры верхних частот и полосовые) и $f > f_{\infty}$ (фильтры нижних частот и полосовые).

Соединяя последовательно звенья типов k и m , можно достигнуть некоторого постоянства характеристических сопротивлений и крутизны кривой затухания при одновременном сохранении необходимой величины затухания ниже или выше частоты бесконечно большого затухания. На рис. 10-22, a в виде примера показан полосовой фильтр, состоящий из Т-образного фильтра типа k (в середине) и двух Г-образных звеньев типа m (по концам). На рис. 10-22, b изображена характеристика затухания такого фильтра.

10-5. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ КАК ФИЛЬТРУЮЩАЯ СИСТЕМА

Индуктивно связанные контуры при соответствующем подборе параметров представляют собой полосовой фильтр, пропускающий заданную полосу частот.

Положим, что в первичную и вторичную цепи трансформатора включены емкости C (рис. 10-23, а).

Индуктивности обмоток трансформатора примем равными L ; коэффициент индуктивной связи обозначим через k_0 .

Трансформатор с емкостями C представляет собой симметричный четырехполюсник, эквивалентная схема

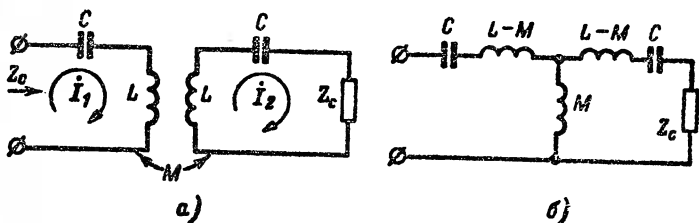


Рис. 10-23. Фильтрующая система.

а — индуктивно связанные резонансные контуры; б — схема замещения.

которого показана на рис. 10-23, б. Выше мы уже встречались с аналогичной схемой полосового фильтра (см. рис. 10-2). Исследуем теперь более подробно фильтрующие свойства рассматриваемого четырехполюсника в предположении, что он нагружен согласованно. Его характеристическое сопротивление может быть вычислено по формуле (10-14), куда следует подставить:

$$Z_1 = j2 \left[\omega (L - M) - \frac{1}{\omega C} \right]; \quad Z_2 = j\omega M.$$

После преобразования получим:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} \sqrt{ - [\omega^2 C (L + M) - 1] [\omega^2 C (L - M) - 1] }.$$

Приняв $\omega_0^2 = 1/LC$ и введя коэффициент индуктивной связи $k_0 = M/L$, получим окончательно:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} \sqrt{ - \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 + k_0) - 1 \right] \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 - k_0) - 1 \right] }.$$

Характеристическое сопротивление Z_c действительно при условии, что выражения в квадратных скобках имеют разные знаки, а именно:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 + k_0) - 1 > 0; \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 - k_0) - 1 < 0,$$

откуда

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k_0}} < \omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k_0}}; \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k_0}}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k_0}};$$

ω_1 и ω_2 представляют собой частоты среза данного полосового фильтра.

В области частот ниже ω_1 характеристическое сопротивление фильтра емкостное и с уменьшением частоты приближается к $-j \frac{1}{2\omega C}$.

В области частот выше ω_2 характеристическое сопротивление фильтра индуктивное и с увеличением частоты приближается к $j\omega L \sqrt{1-k_0^2}$.

При частоте

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$Z_1 = -j2\omega_0 M$$

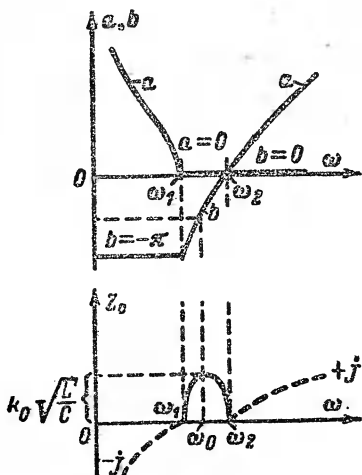


Рис. 10-24. Частотные характеристики индуктивно связанных резонансных контуров.

и

$$Z_c = \omega_0 M = \frac{M}{\sqrt{LC}} = \frac{k_0 L}{\sqrt{LC}} = k_0 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

На рис. 10-24 показаны частотные характеристики данного фильтра.

10-6. МОСТОВЫЕ ФИЛЬТРЫ.

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

Согласно § 9-15 [формулы (9-50)] характеристическое сопротивление и мера передачи симметричного мостового фильтра (рис. 10-25) находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Z_m &= \sqrt{Z_1 Z_2}; \\ \text{th} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10-36)$$

Полоса пропускания фильтра ($a=0$) имеет место при мнимых значениях корня $\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$ и действительных значениях корня $\sqrt{Z_1 Z_2}$. При этом Z_1 и Z_2 имеют разные знаки.

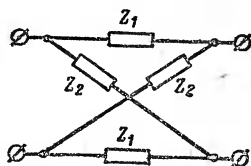


Рис. 10-25. Мостовой фильтр.

Коэффициент фазы определяется в этом случае по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}. \quad (10-37)$$

В полосе задерживания Z_1 и Z_2 имеют одинаковые знаки. В этой полосе возможны два случая:

$$b = 0 \text{ или } b = \pm \pi.$$

В первом случае

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \operatorname{th} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}.$$

Это решение соответствует условию $|Z_1| < |Z_2|$, так как гиперболический тангенс не может превышать единицу. Во втором случае

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \operatorname{cth} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}.$$

Данное решение соответствует условию $|Z_1| > |Z_2|$, так как гиперболический котангенс не может быть меньше единицы.

При $Z_1 = Z_2$ затухание $a = \infty$, так как при этом $\operatorname{th} \frac{a}{2} = 1$ и напряжение на выходе мостовой схемы равно нулю. Физически это объясняется тем, что мост уравновешен.

На рис. 10-26 показаны простейшие схемы мостовых фильтров: нижних частот, верхних частот, полосового и заграждающего.

Основываясь на том, что в полосе пропускания Z_1 и Z_2 имеют разные знаки, а в точке пересечения кривых Z_1 и Z_2 , т. е. при $Z_1 = Z_2$ $a = \infty$, можно легко найти частоты среза и бесконечно большого затухания. В виде примера это показано применительно к фильтру нижних частот на рис. 10-27. При отсутствии пересечения Z_1 и Z_2 частота бесконечно большого затухания отсутствует или удалена в бесконечность (при асимптотическом приближении Z_1 к Z_2).

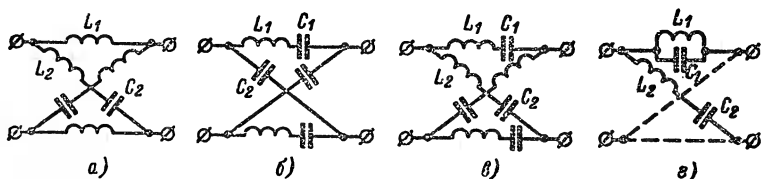


Рис. 10-26. Мостовой фильтр нижних частот (а), верхних частот (б), полосовой (в) и загораждающий (г).

На практике применяются также мостовые схемы с дифференциальным трансформатором (дифференциально-мостовые схемы), эквивалентные по своим электрическим качествам мостовым схемам, но имеющие меньшее число элементов (рис. 10-28).

Следует заметить, что в соответствии с (10-36) Z_m зависит от произведения, а g — от отношения сопротивлений плеч мостового фильтра. Поэтому характеристические параметры Z_m и g мостового фильтра не связаны друг с другом в той мере, как это, например, имеет место в Т- и П-образных фильтрах (см. задачу 10-16), и, следовательно, Z_m и g могут выбираться независимо друг от друга. Это свойство является одним из преимуществ мостовых фильтров по сравнению с другими.

Мостовые фильтры часто выполняются с помощью пьезоэлектрических резонаторов. Последние представляют собой электромеханическую систему, состоящую из пьезоэлектрической пластинки¹, электродов и держателя. Пьезоэлектрическая пластинка под воздействием переменного электрического поля совершает механические колебания с частотой приложенного напряжения. При этом на ее поверхностях возникают электрические заряды. При совпадении частоты поля с частотой собственных колебаний пластинки наступает резонанс: амплитуда колебаний и соответственно величина зарядов на пластинке достигают максимума.

Эквивалентная электрическая схема пьезоэлектрического резонатора представляет собой двухполюсник (рис. 10-29, а). Частотная характеристика реактивного сопротивления резонатора изображена на рис. 10-29, б.

¹ В технике связи применяются преимущественно кварцевые пластинки.

В отличие от индуктивных катушек, добротность которых в лучшем случае измеряется сотнями единиц, добротность пьезоэлектрических резонаторов достигает десятков тысяч.

С помощью таких резонаторов удастся получить полосовые фильтры с весьма узкой полосой пропускания и высокой крутизной кривой затухания вблизи частот среза (кварцевые мостовые фильтры допускают полосу пропускания порядка 20—50 периодов при частоте 500 кГц).

Емкость C_2 , входящая в схему замещения пьезоэлектрического резонатора (рис. 10-29, а), значительно превышает емкость C ; поэтому частоты ω_1 и ω_2 (рис. 10-29, б) располагаются весьма близко друг к другу.

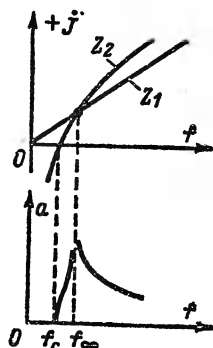


Рис. 10-27. Нахождение частот среза и бесконечно большого затухания мостового фильтра.

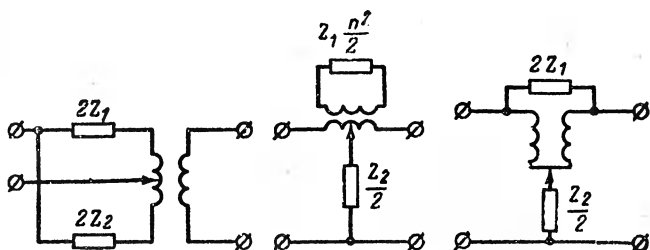


Рис. 10-28. Дифференциально-мостовые схемы.

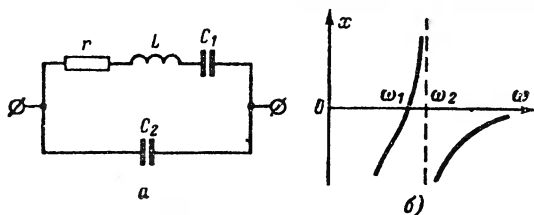


Рис. 10-29. Пьезоэлектрический резонатор.

а — эквивалентная схема; б — частотная характеристика реактивного элемента.

10.7. БЕЗЫНДУКЦИОННЫЕ ФИЛЬТРЫ

Изготовление индуктивных катушек для фильтров, работающих в области низких частот, сопряжено с трудностями, особенно когда катушки должны иметь большую индуктивность при высоком коэффициенте добротности. Увеличение сечения обмотки повышает вес, размеры и стоимость катушки, применение же ферромагнитного сердечника создает зависимость индуктивности от величины тока, проходящего по обмотке.

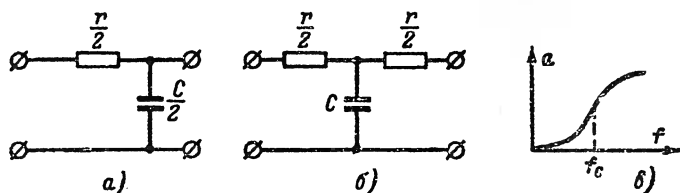


Рис. 10-30. rC -фильтр нижних частот.

Применение пьезокварцевых резонаторов для фильтров низких частот также не всегда возможно, так как самая низкая частота, на которую изготавливается кварц, составляет несколько сотен герц.

Во избежание получения громоздких фильтров с низкой добротностью катушек применяют безындукционные фильтры (rC -фильтры), состоящие из активных сопротивлений и емкостей.

На рис. 10-30 показан rC -фильтр нижних частот. При низких частотах, когда емкостное сопротивление велико, напряжение на выходе фильтра немногим меньше напряжения на его входе и, следовательно, затухание мало. С повышением частоты емкостное сопротивление убывает, напряжение на выходе уменьшается и, следовательно, затухание возрастает.

На рис. 10-30, в показана частотная характеристика собственного затухания такого фильтра. Ввиду малой крутизны кривой затухания однозвенного rC -фильтра применяют двух- или трехзвенный фильтр, однако при этом увеличивается затухание и в полосе пропускания.

На основании (10-1)

$$\operatorname{ch} g = \operatorname{ch} (a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b = 1 + j \frac{\omega r C}{2},$$

откуда

$$\operatorname{ch} a \cos b = 1; \quad \operatorname{sh} a \sin b = \frac{\omega r C}{2}. \quad (10-38)$$

При постоянном токе ($\omega=0$)

$$\operatorname{ch} a \cos b = 1; \quad \operatorname{sh} a \sin b = 0. \quad (10-39)$$

Эти равенства удовлетворяются при $a=0$ и $b=0$ одновременно.

При значениях $\omega > 0$ $\frac{\omega r C}{2} > 0$ и $\sin b > 0$, так как $\operatorname{sh} a > 0$.

Итак, в отличие от реактивных фильтров, рассмотренных в предыдущих параграфах, rC -фильтр не имеет области частот, в пределах которой собственное затухание a равно нулю.

Частотные характеристики rC -фильтра нижних частот могут быть построены по выражениям для a и b , которые получаются в результате совместного решения уравнений (10-38), первое из которых можно представить в следующем виде:

$$(1 + \operatorname{sh}^2 a)(1 - \sin^2 b) = 1.$$

Подставляя сюда выражение для $\sin b$, получаемое из второго уравнения (10-38), приходим к биквадратному уравнению

$$\operatorname{sh}^4 a - \left(\frac{\omega r C}{2}\right)^2 \operatorname{sh}^2 a - \left(\frac{\omega r C}{2}\right)^2 = 0,$$

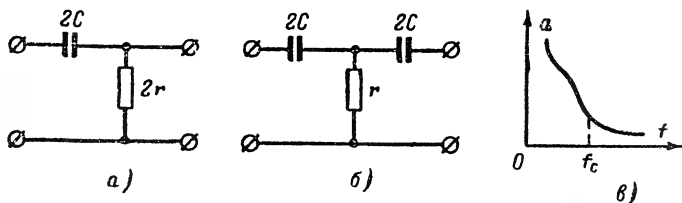


Рис. 10-31. rC -фильтр верхних частот.

откуда

$$\operatorname{sh} a = \sqrt{\frac{(\omega r C)^2}{8} + \frac{\omega r C}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega r C}{4}\right)^2}. \quad (10-40)$$

При значениях ω , при которых $\frac{\omega r C}{2} \ll 1$,

$$\operatorname{sh} a \approx a \approx \sqrt{\frac{\omega r C}{2}}.$$

За частоту среза rC -фильтра нижних частот условно принимается частота, при которой равны активное и емкостное сопротивления ветвей Г-образного звена, т. е.

$$\frac{r}{2} = \frac{2}{\omega_c C} \quad \text{или} \quad \frac{\omega_c r C}{4} = 1.$$

В этом случае выражение (10-40) дает $\operatorname{sh} a = 2,2$, откуда $a = 1,53 \text{ nep}$.

На рис. 10-31 представлен rC -фильтр верхних частот с примерной частотной характеристикой затухания.

При низких частотах, когда емкостное сопротивление велико, напряжение на выходе фильтра мало, т. е. получается большое затухание (при постоянном токе — бесконечно большое). С увеличением частоты емкостное сопротивление уменьшается и напряжение

на выходе возрастает, т. е. затухание убывает. Частотная характеристика собственного затухания такого фильтра показана на рис. 10-31 а.

Для повышения крутизны кривой затухания применяются несколько звеньев, однако при этом неизбежно увеличивается затухание и в полосе пропускания.

Пользуясь формулой (10-1), получаем в рассматриваемом случае:

$$\operatorname{ch} a \cos b = 1; \quad \operatorname{sh} a \sin b = -\frac{1}{2\omega C}. \quad (10-41)$$

При бесконечно большой частоте ($\omega = \infty$) получаются условия (10-39), которые, как было установлено выше, выполняются, если одновременно a и b равны нулю.

При значениях $0 < \omega < \infty$ $\operatorname{sh} a \sin b < 0$; поскольку $a > 0$, $b < 0$.

Совместное решение уравнений (10-41) приводит к биквадратному уравнению

$$\operatorname{sh}^4 a - \frac{1}{(2\omega r C)^2} \operatorname{sh}^2 a - \frac{1}{(2\omega r C)^2} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{sh} a = \sqrt{\frac{1}{8(\omega r C)^2} + \frac{1}{2\omega r C} \sqrt{1 + \frac{1}{(4\omega r C)^2}}}. \quad (10-42)$$

При значениях ω , при которых $\frac{1}{2\omega r C} \ll 1$,

$$\operatorname{sh} a \approx a \approx \sqrt{\frac{1}{2\omega r C}}.$$

Если за частоту среза условно принять частоту, при которой сопротивления ветвей Г-образного звена равны друг другу,

$$2r = \frac{1}{2\omega_c C} \quad \text{или} \quad \frac{1}{4\omega_c r C} = 1,$$

то на основании (10-42) будем иметь:

$$\operatorname{sh} a = 2,2; \quad a \approx 1,53 \text{ nep.}$$

Простейшие схемы полосового и заграждающего rC -фильтров и примерные частотные характеристики затухания приведены на рис. 10-32 и 10-33.

Полосовой rC -фильтр основан на том, что емкость первого звена обуславливает затухание более низких частот, а емкость второго звена — затухание более высоких частот. Средняя частота полосы пропускания, при которой собственное затухание фильтра минимально (рис. 10-32, б), ориентировочно равна:

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi \sqrt{r_1 r_2 C_1 C_2}}, \text{ гц.}$$

При $r_1 = r_2 = r$ и $C_1 = C_2 = C$

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi r C}.$$

Как видно из рис. 10-33, а, загоражающий rC -фильтр состоит из двух параллельно соединенных Т-образных rC -фильтров верхних и нижних частот. Соответствующим подбором параметров элементов можно добиться того, что при определенной частоте токи на выходе обеих Т-образных схем будут равны по величине и противоположны по знаку, вследствие чего ток в нагрузке будет равен нулю. Следовательно, затухание на этой частоте будет бесконечно большим (рис. 10-33, б).

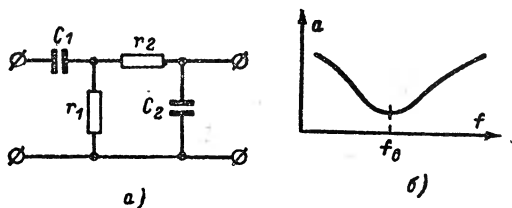


Рис. 10-32. Полосовой rC -фильтр.

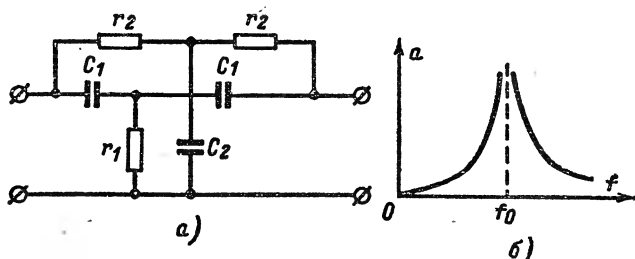


Рис. 10-33. Загоражающий rC -фильтр.

rC -фильтры часто применяются в сочетании с усилителем. В этом случае в полосе пропускания не только отсутствует затухание, но, наоборот, имеет место усиление.

10-8. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

10-1. Рассчитать фильтр нижних частот с частотой среза 1 000 гц и характеристическим сопротивлением 100 ом при нулевой частоте.

Ответ: $L = 31,8$ мГн; $C = 3,18$ мкФ.

10-2. Задан Т-образный фильтр нижних частот, состоящий из двух индуктивностей, каждая из которых равна 0,1 мГн, и емкости 2 мкФ. Определить частоту среза и построить график характеристического сопротивления.

Ответ: $\omega_c = 10^5$; $Z_T = 10 \sqrt{1 - \omega^2 \cdot 10^{-10}}$.

10-3. Задан П-образный фильтр нижних частот, состоящий из индуктивности 0,2 мГн и двух емкостей по 1 мкФ каждая. Опреде-

лить частоту среза и построить график характеристического сопротивления.

Ответ: $\omega_c = 10^5$, $Z_{\Pi} = \frac{10}{\sqrt{1 - \omega^2 \cdot 10^{-10}}}$.

10-4. Пользуясь результатом решения задачи 9-1, доказать, что в случае Т- или П-образного фильтра нижних частот (см. рис. 10-4), нагруженного согласованно, передаточная функция по напряжению имеет вид:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} + j \frac{\omega}{\omega_c} \right]^{-2}.$$

10-5. Основываясь на предыдущей задаче, показать, что в полосе пропускания коэффициент передачи по напряжению равен единице.

10-6. Два Г-образных фильтра верхних частот, каждый из которых состоит из емкости 1 мкф и индуктивности 10 мГн, образуют Т-образный фильтр. Вычислить для Т-образного фильтра частоту среза f_c , характеристическое сопротивление и собственное затухание при $2f_c$; характеристическое сопротивление и коэффициент фазы при $0,5 f_c$.

10-7. Два Г-образных фильтра верхних частот, указанные в предыдущей задаче, образуют П-образный фильтр. Вычислить для П-образного фильтра то же, что в задаче 10-6.

10-8. Пояснить, исследуя формулы для симметричного фильтра без потерь, почему в полосе пропускания фильтра его характеристическое сопротивление активное, а в полосе задерживания реактивное.

10-9. Как определить характеристические сопротивления несимметричного фильтра по данным опытов холостого хода и короткого замыкания?

10-10. Как найти полосу пропускания фильтра по заданной частотной зависимости его характеристического сопротивления?

10-11. Пояснить физическую сущность коэффициента фазы фильтра.

10-12. Как определяется в полосе пропускания и в полосе задерживания угол фазового сдвига между напряжениями на входе и выходе Г-образного фильтра, нагруженного согласованно?

10-13. Начертить схемы последовательно-производного и параллельно-производного звеньев заграждающего фильтра типа m .

10-14. На примерах схем реактивных мостовых фильтров, показанных на рис. 10-26, убедиться в том, что при разных знаках Z_1 и Z_2 появляются полосы пропускания.

10-15. Доказать, что в полосе пропускания реактивного мостового фильтра выполняется условие $-1 \leq \frac{Z_1}{Z_2 - Z_1} \leq 0$, что равносильно условию $-\infty \leq \frac{Z_1}{Z_2} \leq 0$. Пояснить физический смысл последнего условия.

10-16. Вывести для фильтров типа k зависимости

$$Z_T k \operatorname{ch} \frac{g}{2} \text{ и } Z_{\Pi} = \frac{k}{\operatorname{ch} \frac{g}{2}}.$$

10-17. Пояснить с помощью табл. 10-1 построение частотных характеристик фильтров типа k (см. рис. 10-8—10-11).

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

11-1. ПЕРВИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

До сих пор рассматривались электрические цепи с сосредоточенными параметрами, т. е. предполагалось, что электрическая цепь представляет собой совокупность некоторых самостоятельно существующих элементов r , L и C , сосредоточенных в различных точках ее. Напряжение и ток в этих элементах связываются соотношениями:

$$u_r = ri; u_L = L \frac{di}{dt}; i = C \frac{du_C}{dt},$$

основанными на предположении, что ток, входящий в каждый из этих элементов цепи, равен току, выходящему из него. Решение этих уравнений дает закон изменения исследуемой электрической величины в зависимости от времени, но не от координаты длины, которая в эти уравнения не входит.

Однако представление электротехнических устройств в виде цепей с сосредоточенными параметрами не всегда возможно. Например, рассматривая электромагнитные процессы, происходящие в электрических линиях, при помощи которых электрическая энергия или сигналы передаются на расстояние, необходимо иметь в виду, что магнитное и электрическое поля распределены по всей длине линии и превращение электромагнитной энергии в тепло также происходит по всей длине линии. Таким образом, линия является цепью с распределенными параметрами.

Если мысленно выделить какой-либо конечный участок этой линии, то токи на концах этого участка окажутся неодинаковыми вследствие наличия токов смещения, обусловленных емкостью между токоведущими проводниками, и токов утечки через изоляцию. Только при бесконечном уменьшении участков линии токи на концах их можно считать равными друг другу.

Следовательно, приведенные выше уравнения непосредственно не применимы ко всей линии в целом или

конечным участкам ее; строго говоря, они могут быть применимы только к участкам бесконечно малой длины.

Величина магнитного потока, который сцепляется с контуром тока, образуемым токоведущими проводниками, определяет индуктивность цепи.

Емкость между проводами, а также емкости этих проводов по отношению к земле (или соответственно к кор-

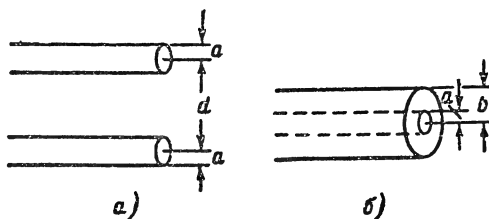


Рис. 11-1. Двухпроводные линии.
а — воздушная; б — коаксиальный кабель.

пусу машины, самолета, корабля и т. д.) и другим соседним проводам определяют емкость цепи.

Тепловые потери в проводах с учетом поверхностного эффекта и эффекта близости обуславливают продольное активное сопротивление цепи.

Наконец, несовершенство изоляции (проводимость изоляции и диэлектрические потери, возникающие в ней) определяет поперечную активную проводимость цепи.

В качестве цепи с распределенными параметрами ниже рассматривается однородная двухпроводная линия, т. е. такая линия, индуктивность, емкость, активное сопротивление и проводимость которой равномерно распределены вдоль всей длины линии. Эти электрические параметры, отнесенные к единице длины линии, называются первичными параметрами линии; они обозначаются через L , C , r и g^* .

Однородная двухпроводная линия является распространенным типом линии; она используется в электропроводной связи и радиотехнике и выполняется в виде параллельных проводников (рис. 11-1, а) или коаксиального кабеля (рис. 11-1, б).

* Следует обратить внимание на то, что здесь $r \neq 1/g$, так как параметры линии r и g не связаны друг с другом: параметр r — продольный (активное сопротивление проводов), параметр g — поперечный (активная проводимость изоляции).

Уравнения для напряжений и токов такой линии в принципе применимы и к другим типам линий — трехфазным и многопроводным.

Первичные параметры линии зависят от ее конструкции и частоты. Вычисление первичных параметров относится к задачам теории электромагнитного поля, составляющей содержание третьей части курса «Теоретические основы электротехники».

В области радиочастот первичные параметры однородной двухпроводной линии с медными проводами вычисляются по следующим формулам.

Воздушная линия (параллельные провода) (рис. 11-1, а):

$$r \approx \frac{8,33 \sqrt{f}}{a} 10^{-8}, \text{ ом/м (линии);}$$

$$L \approx 0,921 \lg \frac{d}{a} 10^{-6}, \text{ гн/м; } C \approx \frac{12,07}{\lg \frac{d}{a}} 10^{-12}, \text{ ф/м.}$$

Коаксиальный кабель (рис. 11-1, б):

$$r \approx 4,16 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{f} \cdot 10^{-8}, \text{ ом/м; } g = \omega C \operatorname{tg} \delta, \text{ сим/м}$$

(δ — угол диэлектрических потерь);

$$L \approx 0,46 \lg \frac{b}{a} 10^{-6}, \text{ гн/м; } C \approx \frac{0,241 \varepsilon}{\lg \frac{b}{a}} 10^{-10}, \text{ ф/м}$$

(ε — диэлектрическая проницаемость изоляции).

С повышением частоты угол потерь δ уменьшается. Изоляция, применяемая для коаксиальных кабелей, обычно имеет $\operatorname{tg} \delta$ порядка 10^{-3} — 10^{-4} .

Активная проводимость g между параллельными проводами, зависящая от метеорологических условий, состояния изоляторов, к которым подвешены провода, и других факторов, определяется экспериментально.

Практически во многих случаях можно считать, что $g \approx 0$.

На высоких частотах ввиду значительного преобладания индуктивного сопротивления токоведущего проводника над его активным сопротивлением последним можно во многих случаях пренебречь.

Следует заметить, что на низких частотах и при малой длине линии, когда емкостная и активная проводимости незначительны, токи в начале и конце линии практически одинаковы; в этом случае линия с достаточной

точностью может рассматриваться как цепь с сосредоточенными параметрами. Разграничение понятий «короткая» и «длинная» линии связано с частотой, на которой работает рассматриваемая линия; этот вопрос освещен в § 11-3.

11-2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

Напряжение и ток в линии являются функциями двух независимых переменных: пространственной координаты x , определяющей место наблюдения, и времени t , оп-

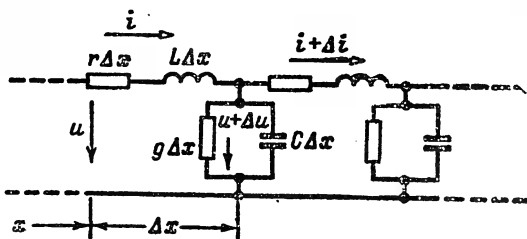


Рис. 11-2. Элементарный участок цепи с равномерно распределенными параметрами.

ределяющего момент наблюдения. Здесь предполагается, что направление координатной оси x совпадает с направлением оси линии.

Нашей ближайшей задачей является нахождение пространственно-временного распределения величин тока в линии $i(x, t)$ и напряжения между проводами $u(x, t)$. При этом в общем случае может рассматриваться передача электромагнитной энергии по линии, когда источник и приемник имеются на обоих концах линии.

Выберем положительное направление тока в линии слева направо (рис. 11-2) и условимся называть «началом» линии левый конец, а «концом» линии — правый конец. Расстояние до произвольной точки линии от начала обозначим через x , а от конца — через x' . Таким образом, вся длина линии $l = x + x'$.

Выделим элементарный участок линии длиной Δx , находящийся на расстоянии x от начала. Пользуясь первичными параметрами r, g, L и C , отнесенными к единице длины линии, приближенно представим рассматриваемую

мый элементарный участок линии в виде последовательно включенных сопротивления $r\Delta x$ и индуктивности $L\Delta x$ и параллельно включенных активной проводимости $g\Delta x$ и емкости $C\Delta x$.

Обозначим:

u — напряжение между верхним и нижним проводами в точке x ;

Δu — приращение напряжения на участке Δx ;

i — ток в точке x ;

Δi — приращение тока на участке Δx .

Уравнения для приращений напряжений и тока на элементе длины Δx запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \left(ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \right) \Delta x; \\ -\Delta i &= \left[g(u + \Delta u) + C \frac{\partial (u + \Delta u)}{\partial t} \right] \Delta x. \end{aligned} \right\} \quad (11-1)$$

Ввиду наличия двух независимых переменных (x и t) уравнения записываются в частных производных.

По мере стремления Δx к нулю степень точности этих уравнений повышается, причем величина второго порядка малости $\left[g\Delta u + C \frac{\partial (\Delta u)}{\partial t} \right] \Delta x$ в правой части нижнего уравнения (11-1) может быть опущена.

Итак, линия рассматривается как цепная схема с бесконечно большим числом звеньев, электрические параметры которых бесконечно малы.

Разделив обе части уравнений (11-1) на Δx и перейдя к пределу $\Delta x = 0$, получаем дифференциальные уравнения линии:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

Эти уравнения известны в литературе под названием телеграфных уравнений.

Если за начало отсчета принять конец линии, т. е. ввести координату x' , то уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x'} &= ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x'} &= gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (11-3)$$

Уравнения (11-2) или (11-3) могут быть решены однозначно при использовании начальных и граничных условий. Начальными условиями будут значения напряжения и тока в начале или конце линии в момент времени, принятый за нуль. Граничные условия определяются связями между напряжением и током в начале или конце линии, зависящими от заданного режима работы линии.

Решение указанных выше уравнений дает функциональные зависимости напряжения и тока в линии от переменных x (или x') и t .

11-3. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ РЕЖИМ В ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

При периодическом режиме под воздействием приложенного к линии синусоидального напряжения в любой точке линии напряжение и ток изменяются синусоидально с частотой источника¹. Обозначим комплексные действующие значения напряжения и тока на расстоянии x от начала линии через $\dot{U} = \dot{U}(x)$ и $\dot{I} = \dot{I}(x)$.

Применяя комплексную форму записи, перепишем уравнения в комплексном виде:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= (r + j\omega L)\dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= (g + j\omega C)\dot{U}. \end{aligned} \right\} \quad (11-4)$$

Ввиду того что комплексные значения $\dot{U}$ и $\dot{I}$ не зависят от t и являются только функциями x , при переходе от уравнений (11-2) к (11-4) частные производные по x заменены обыкновенными.

Исключая из системы (11-4) ток $\dot{I}$, получаем уравнение относительно $\dot{U}$:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U}. \quad (11-5)$$

Аналогично, исключая из (11-4) напряжение $\dot{U}$, получаем уравнение относительно $\dot{I}$:

$$\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{I}. \quad (11-6)$$

¹ Обоснованием высказанного положения является линейность уравнений (11-2) и (11-3), так как только в таких уравнениях сохраняется синусоидальность всех функций.

Обозначим квадратный корень из комплексного множителя при $\dot{U}$ или $\dot{I}$ через

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (11-7)$$

и назовем эту величину коэффициентом распространения¹. Смысл такого названия выяснится позже.

Итак, уравнения (11-5) и (11-6) записываются в виде:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U}; \quad \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I}. \quad (11-8)$$

Получились одинаковые однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Решение первого из них имеет вид:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}. \quad (11-9)$$

Ток $\dot{I}$ после этого получается подстановкой (11-9) в первое уравнение (11-4):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{1}{r + j\omega L} (A_1 \gamma e^{-\gamma x} - A_2 \gamma e^{\gamma x}) = \\ &= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \end{aligned}$$

или

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_B} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \quad (11-10)$$

где

$$Z_B = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} \quad (11-11)$$

называется волновым сопротивлением линии.

Смысл такого названия объяснен дальше.

Подставив (11-7) в (11-9), получим:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}.$$

Мгновенное значение напряжения в точке x равно мнимой части выражения $\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \text{Im} [\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t} + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\omega t}] = \\ &= \sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \\ &\quad + \sqrt{2} |A_2| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x); \end{aligned} \quad (11-12)$$

здесь ψ_1 и ψ_2 — аргументы комплексных величин A_1 и A_2 .

¹ В литературе ранее применялось обозначение $\gamma = \beta + j\alpha$.

Таким образом, мгновенное значение напряжения в любой точке линии складывается из двух функций.

Рассмотрим вначале первую из этих слагающих функций.

Если считать точку x фиксированной и рассматривать изменение напряжения в данной точке в зависимости от времени, то первая слагающая выражения (11-12) представит собой синусоидальную функцию с постоянной амплитудой.

Если же считать момент времени t фиксированным и рассматривать изменение мгновенного напряжения вдоль линии (т. е. в зависимости от x), то получим затухающую синусоидальную волну напряжения, амплитуда которой $\sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x}$ убывает с ростом x , т. е. по мере удаления от начала линии к концу.

Величина α , характеризующая изменение амплитуды волны на единицу длины линии, называется коэффициентом затухания, а величина β , равная изменению фазы на единицу длины линии, называется коэффициентом фазы.

Убывание амплитуды волны вдоль линии обусловливается потерями в линии, а изменение фазы — конечной скоростью распространения электромагнитных колебаний.

Оба эти коэффициента α и β входят в комплексный параметр $\gamma = \alpha + j\beta$, который, следовательно, характеризует распространение волны напряжения и тока по линии.

На рис. 11-3, a буквой λ обозначена длина волны напряжения, равная расстоянию между двумя точками линии, в которых фазы рассматриваемой слагающей напряжения различаются на 2π . Следовательно,

$$[\omega t + \psi_1 - \beta x] - [\omega t + \psi_1 - \beta(x + \lambda)] = 2\pi,$$

откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (11-13)$$

Полученная формула выражает зависимость, существующую между длиной волны и коэффициентом фазы линии.

На рис. 11-3, a изображены волны напряжения, соответствующие двум следующим друг за другом моментам времени: t_1 и t_2 .

С течением времени волна перемещается от начала линии к ее концу; она носит название прямой, или падающей, волны.

Скорость перемещения падающей волны вдоль линии, называемая фазовой скоростью волны¹, определяется как скорость перемещения точки, фаза коле-

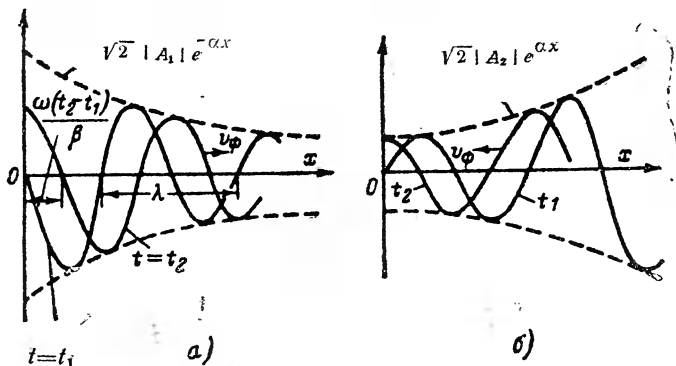


Рис. 11-3. Прямая (падающая) (а) и обратная (отраженная) (б) волны.

бания в которой остается постоянной. Это условие записывается для прямой волны в виде:

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \text{const},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} (\omega t + \psi_1 - \beta x) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = v_\phi = \frac{\omega}{\beta}. \quad (11-14)$$

Аналогичное исследование второго слагаемого выражения (11-12) показывает, что для произвольного момента времени оно представляет синусоидальную волну, амплитуда которой $\sqrt{2} |A_2| e^{\alpha x}$ возрастает с увеличением x , т. е. по мере удаления от начала линии к ее концу. С течением времени волна перемещается от конца линии к

¹ Скорость распространения группы смежных по частоте волн характеризуется понятием групповой скорости [Л. 1].

ее началу (рис. 11-3, б); она называется обратной, или отраженной, волной.

Фазовая скорость обратной волны получается равной $v_{\phi} = -\frac{\omega}{\beta}$; знак минус указывает, что обратная волна движется в направлении, противоположном направлению прямой волны.

Итак, мгновенное напряжение можно рассматривать как сумму двух волн, движущихся в противоположных направлениях, причем каждая из этих волн затухает в направлении движения.

На основании (11-13) и (11-14)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{v_{\phi}} = \frac{2\pi f}{v_{\phi}}; \\ \lambda &= \frac{v_{\phi}}{f} = v_{\phi} T, \end{aligned} \right\} \quad (11-15)$$

т. е. за время, равное одному периоду, как падающая, так и отраженная волны перемещаются на расстояние, равное длине волны.

Линии, физическая длина которых соизмерима с длиной волны, считаются длинными линиями. При достаточно высоких частотах практически любая протяженная электрическая цепь становится «длинной» по отношению к длине волны.

Как будет показано ниже, фазовая скорость в воздушной линии близка к скорости света ($\sim 3 \times 10^8$ м/сек), и поэтому частоте 50 гц будет соответствовать длина волны 6000 км, а частоте $3 \cdot 10^9$ гц — длина волны 10 см. Следовательно, в первом случае длинной линией будет линия, измеряемая многими сотнями или тысячами километров, а во втором случае — цепь протяженностью в несколько сантиметров.

Возвращаясь к уравнениям (11-9) и (11-10) и записывая прямую и обратную волны в комплексной форме, имеем:

$$\dot{U} = \dot{U}_n + \dot{U}_0; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_n}{Z_B} - \frac{\dot{U}_0}{Z_B} = \dot{I}_n - \dot{I}_0,$$

где

$$\dot{U}_n = A_1 e^{-\gamma x}; \quad \dot{U}_0 = A_2 e^{\gamma x}.$$

Напряжение и ток прямой и соответственно обратной волн связаны законом Ома:

$$\frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = Z_B.$$

Это соотношение объясняет смысл названия Z_B — волновое сопротивление.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 , входящие в (11-9) и (11-10), находятся в зависимости от напряжения и тока в начале линии (граничные условия), если они заданы.

При $x=0$

$$\dot{U}(0) = \dot{U}_1 = A_1 + A_2; \quad Z_B \dot{I}(0) = Z_B \dot{I}_1 = A_1 - A_2,$$

откуда

$$A_1 = \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2}; \quad A_2 = \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2}.$$

Введем понятие коэффициента отражения волны в начале линии:

$$n_1 = \frac{\dot{U}_0(0)}{\dot{U}_n(0)} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1} = \frac{Z_1 - Z_B}{Z_1 + Z_B}, \quad (11-16)$$

где $Z_1 = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ — входное сопротивление линии.

Подстановка выражений для A_1 и A_2 в (11-9) и (11-10) с учетом (11-16) дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2} (e^{-\gamma x} + n_1 e^{\gamma x}); \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2Z_B} (e^{-\gamma x} - n_1 e^{\gamma x}). \end{aligned} \right\} \quad (11-17)$$

Если заданы граничные условия на конце линии, то удобнее отсчитывать расстояние от конца, приняв координату x' .

Заменяя в уравнениях (11-9) и (11-10) x на $(l-x')$ и используя заданные граничные условия $\dot{U}(l) = \dot{U}_2$; $\dot{I}(l) = \dot{I}_2$, получаем для A_1 и A_2 следующие выражения:

$$A_1 = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} e^{\gamma l}, \quad A_2 = \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma l}.$$

Подставив их в (11-9) и (11-10), получим окончательные выражения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} (e^{\gamma x'} + n_2 e^{-\gamma x'}); \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} (e^{\gamma x'} - n_2 e^{-\gamma x'}), \end{aligned} \right\} \quad (11-18)$$

где аналогично предыдущему n_2 — коэффициент отражения в конце линии:

$$n_2 = \frac{\dot{U}_0(l)}{\dot{U}_n(l)} = \frac{A_2 e^{\gamma l}}{A_1 e^{-\gamma l}} = \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2} = \frac{Z_2 - Z_B}{Z_2 + Z_B}; \quad (11-16a)$$

$Z_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ — выходное сопротивление на конце линии или в случае приемника входное сопротивление его.

Если сопротивление приемника равно волновому сопротивлению линии ($Z_2 = Z_B$), то коэффициент отражения равен нулю ($n_2 = 0$). При этом в линии имеется только одна прямая волна; обратная волна отсутствует.

Это важное свойство реализуется в линиях связи, отражения в которых нежелательны по ряду причин.

Во-первых, если затухание в линии невелико, то отраженная волна создает эффект эха в начале линии.

Во-вторых, отражения связаны с потерей энергии. Часть энергии, достигшая приемного конца, не поступает в приемник, а возвращается по линии в виде энергии отраженной волны. При этом возникают дополнительные потери энергии в сопротивлении r и проводимости g линии. Если сопротивление источника, питающего линию, не равно волновому сопротивлению линии, то отраженная волна, достигнув начала линии, претерпевает повторное отражение и т. д. Происходящая вследствие этого потеря энергии в линии понижает общий к. п. д. передачи.

В-третьих, в случае отражений может иметь место нежелательное увеличение напряжения или тока в линии (см. § 11-6).

Вследствие указанных причин на практике стремятся согласовать сопротивление приемника с волновым сопротивлением линии. При согласовании нагрузки с линией выражения (11-18) упрощаются: с учетом того, что $Z_B \dot{I}_2 = \dot{U}_2$, находим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x'}; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x'}. \quad (11-19)$$

Эти выражения показывают, что при перемещении точки наблюдения вдоль линии, нагруженной согласованно на конце, в направлении от конца к началу линии, модуль напряжения возрастает в $e^{\alpha x'}$ раз, а фаза — на $\beta x'$ рад.

Уравнения (11-19) аналогичны уравнениям симметричного четырехполюсника при согласованной нагрузке. Поэтому показатель распространения на всю длину линии γl эквивалентен мере передачи четырехполюсника g , а волновое сопротивление линии Z_B аналогично характеристическому сопротивлению четырехполюсника Z_c .

Выражения (11-19) показывают, что при согласованной нагрузке ($Z_2 = Z_B$) геометрическим местом конца вектора напряжения $\dot{U}$ является логарифмическая спираль. На рис. 11-4, иллюстрирующем сказанное, принято $\dot{U}_2 = U_2 \angle 0^\circ$ (вектор $\dot{U}_2$ направлен по действительной оси).

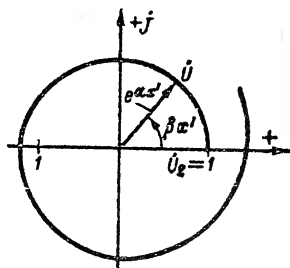


Рис. 11-4. Геометрическое место конца вектора напряжения при согласованной нагрузке.

Большой интерес представляет также рассмотрение двух частных случаев нагрузки линии, а именно случаев, когда линия на конце разомкнута (режим холостого хода) или замкнута (режим короткого замыкания). В первом случае $Z_2 = \infty$ и соответственно коэффициент отражения $n_2 = 1$; во втором случае $Z_2 = 0$ и $n_2 = -1$.

К рассмотрению этих двух случаев мы вернемся несколько позже.

Система уравнений (11-18) может быть переписана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \frac{e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}}{2} + Z_B \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}}{2}; \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \frac{e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}}{2} + \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11-20)$$

Уравнения (11-18) и (11-20) представляют собой уравнения линии в показательной (или волновой)

форме при отсчете расстояния от конца линии. Они преобразуются с помощью гиперболических функций:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_B \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x'; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{1}{Z_B} \dot{U}_2 \operatorname{sh} \gamma x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-21)$$

Положив в этих уравнениях $x' = l$, получим уравнения линии в гиперболической форме, выражающие напряжение и ток в начале через напряжение и ток в конце линии:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_B \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{1}{Z_B} \dot{U}_2 \operatorname{sh} \gamma l. \end{aligned} \right\} \quad (11-22)$$

Обращает на себя внимание сходство полученных уравнений с уравнениями симметричного четырехполюсника (см. § 9-7). Эти уравнения показывают, что однородная линия представляет собой симметричный четырехполюсник с характеристическими параметрами $g = \gamma l$ и $Z_C = Z_B$.

Применяя параметры $\|A\|$ четырехполюсника, получим связь между коэффициентами его и параметрами линии:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = \operatorname{ch} \gamma l; \\ A_{12} &= Z_B \operatorname{sh} \gamma l; \\ A_{21} &= \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l. \end{aligned} \right\} \quad (11-23)$$

Показательная и гиперболическая формы записи уравнений линии (11-18) и (11-21) дополняют друг друга и применяются в зависимости от условий задачи.

Преимущество показательной формы записи уравнений заключается в большей наглядности рассмотрения физических процессов в линии с помощью прямых и обратных волн и удобстве построения геометрических мест на комплексной плоскости. Поэтому уравнения (11-18) широко использованы в последующих параграфах данной главы.

Гиперболическая форма записи уравнений также представляет в ряде случаев известные удобства с точки зрения исследования и расчета электрических величин в линии и их фазовых соотношений.

Рассмотрение линии как четырехполюсника базируется обычно на гиперболической форме записи уравнений.

11-4. ВТОРИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

Вторичными, или характеристическими, параметрами линии являются коэффициент затухания α , коэффициент фазы β и волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$, которые в свою очередь выражаются через первичные параметры линии и частоту.

Из выражения

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \\ &= \sqrt{rg - \omega^2 LC + j\omega(Lg + Cr)} = \alpha + j\beta\end{aligned}$$

следует, что

$$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = rg - \omega^2 LC + j\omega(Lg + Cr),$$

откуда

$$\alpha^2 - \beta^2 = rg - \omega^2 LC; \quad 2\alpha\beta = \omega Lg + \omega Cr.$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [rg - \omega^2 LC + \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2)}]}; \quad (11-24)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 LC - rg + \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2)}]}. \quad (11-25)$$

Из полученных выражений следует, что α и β в общем случае зависят от частоты. Однако, как показывает исследование, в отличие от коэффициента затухания, который изменяется в сравнительно ограниченных пределах, коэффициент фазы неограниченно растет с частотой.

Формула (11-25) позволяет выразить фазовую скорость распространения электромагнитной волны через первичные параметры линии и частоту по формуле (11-14).

Выражения (11-24) и (11-25) неудобны для практического использования ввиду их громоздкости. Существует ряд приближенных расчетных формул для вычисления вторичных параметров линии, учитывающих, что в области высоких частот (порядка 1 Мгц и выше) сопротивление r весьма мало по сравнению с ωL , а проводимость g ничтожно мала по сравнению с ωC . Первое допущение ($\omega L \gg r$) обусловлено тем, что индуктивное со-

противление прямо пропорционально частоте, между тем как сопротивление проводов r пропорционально квадратному корню из частоты вследствие поверхностного эффекта (см. § 11-1). Второе допущение справедливо для высокочастотных фидеров, которые, будучи «длинными» по сравнению с длиной волны, имеют весьма малую физическую длину и поэтому могут иметь надежную изоляцию между проводами. Особенно ничтожно мала проводимость g кабельных линий.

Используя для выражения

$$\gamma = j\omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{r}{\omega L}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - j \frac{g}{\omega C}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (11-26)$$

бином Ньютона, ограничиваясь первыми двумя членами разложения

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{r}{2\omega L}\right) \left(1 - j \frac{g}{2\omega C}\right) \quad (11-27)$$

и пренебрегая ввиду малости слагаемым $-j \frac{rg}{4\omega \sqrt{LC}}$,

получим окончательно:

$$\alpha \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (11-28)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{LC}. \quad (11-29)$$

Эти формулы представляют собой пределы, к которым стремятся коэффициент затухания и коэффициент фазы с ростом частоты.

Выражение (11-28) не следует понимать в том смысле, что α не зависит от частоты; входящие в него параметры r и g сами являются функциями частоты (см. § 11-1).

Первое слагаемое в правой части выражения (11-28) определяет ту долю затухания, которая обуславливается продольным активным сопротивлением линии. Второе слагаемое определяет долю затухания, которая вносится в передачу вследствие наличия поперечной активной проводимости линии.

Для уменьшения потерь при передаче электромагнитной энергии по линии стремятся к тому, чтобы сопротивление линии r и проводимость изоляции g были по возможности малы.

Фазовая скорость согласно (11-14) и (11-29) равна

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (11-30)$$

Это предельная фазовая скорость распространения волны вдоль линии при бесконечно большой частоте. При постоянном токе ($\omega=0$) понятия коэффициент фазы и фазовая скорость теряют физический смысл; на основании выведенной ранее формулы для γ (11-7) при $\omega=0$

$$\alpha = \sqrt{rg}; \quad \beta = 0.$$

На рис. 11-5 показан характер изменений α и β в зависимости от частоты; коэффициент β с ростом частоты асимптотически приближается к прямой, образующей с осью ω угол

$$\arctg(\sqrt{LC}m),$$

где m — масштабный коэффициент.

Для кабельных линий характерна резко выраженная емкостная проводимость ωC , по сравнению с которой проводимость изоляции g ничтожно мала. Кроме того, если частота не очень велика, то индуктивное сопротивление ωL мало по сравнению с активным сопротивлением r из-за малого расстояния между жилами. Поэтому в случае кабельной линии, пренебрегая параметрами g и L по сравнению с r и C , получаем упрощенные расчетные формулы

$$\gamma \approx \sqrt{j r \omega C} = \sqrt{r \omega C} \angle 45^\circ$$

или

$$\gamma \approx \sqrt{r \omega C} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{r \omega C}{2}}. \quad (11-31)$$

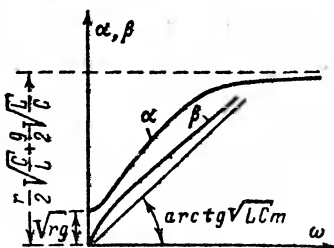


Рис. 11-5. Частотные характеристики α и β .

Соответственно фазовая скорость распространения волны в кабельной линии равна

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{rC}}, \quad (11-32)$$

т. е. прямо пропорциональна корню квадратному из частоты.

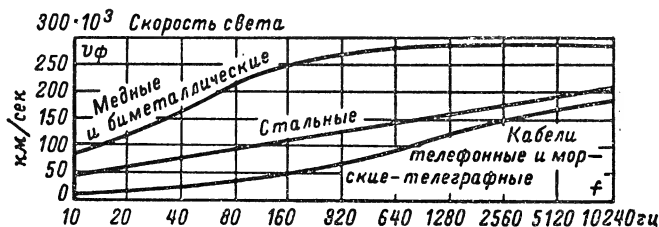


Рис. 11-6. Зависимость фазовой скорости распространения волны от частоты и типа линии.

В теории электромагнитного поля доказывается, что произведение удельных значений индуктивности и емкости в линии

$$LC = \frac{\epsilon\mu}{c^2}, \quad (11-33)$$

где c — скорость света в пустоте ($\sim 3 \cdot 10^8$ м/сек); ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей токоведущие проводники.

Предел, к которому с ростом частоты стремится фазовая скорость волны, равен на основании (11-30) и (11-33):

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

В случае воздушной линии $\epsilon \approx 1$ и $\mu \approx 1$, и потому фазовая скорость в пределе стремится к скорости света в пустоте.

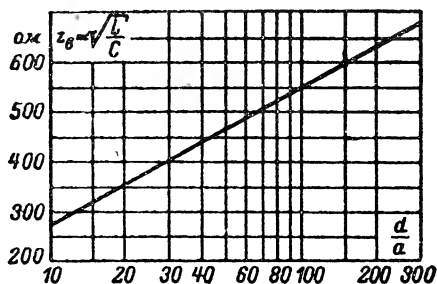
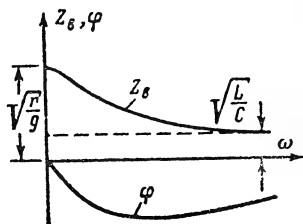
В случае кабельной линии $\epsilon = 4 \div 5$ и поэтому предельная фазовая скорость примерно вдвое меньше скорости света в пустоте.

Рисунок 11-6 иллюстрирует зависимость фазовой скорости волны от частоты и типа линии.

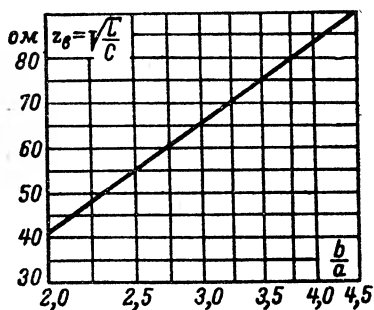
Волновое сопротивление линии

$$Z_B = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{r}{g} \frac{1 + j\omega \frac{L}{r}}{1 + j\omega \frac{C}{g}}} \quad (11-34)$$

Рис. 11-7. Зависимости модуля и угла волнового сопротивления линии от частоты.



а)



б)

Рис. 11-8. Волновое сопротивление линии.

а — воздушной; б — кабельной.

при постоянном токе ($\omega=0$) и бесконечной частоте ($\omega=\infty$) имеет действительные значения

$$z_B = \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (\omega = 0)$$

и

$$z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\omega = \infty).$$

В остальной части диапазона частот волновое сопротивление линии имеет емкостный характер, так как обычно $\frac{C}{g} > \frac{L}{r}$ [аргумент знаменателя в правой части (11-34) больше аргумента числителя].

На рис. 11-7 показаны кривые изменения модуля Z_B и угла φ волнового сопротивления линии в зависимости от частоты.

Подставив выражения для L и C из § 11-1 в формулу $z_B = \sqrt{L/C}$, получим приближенные расчетные формулы для высоких частот в зависимости от размеров:

$$z_B = 276 \lg \frac{d}{a}, \text{ ом (воздушная линия);}$$

$$z_B = \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \lg \frac{b}{a}, \text{ ом (коаксиальный кабель).} \quad (11-35)$$

Средние значения z_B для воздушных линий 400—500 ом, для кабелей 50—70 ом.

Рисунок 11-8 иллюстрирует графические зависимости z_B от d/a и b/a для воздушных и кабельных линий, построенные по формулам (11-35).

11-5. ЛИНИЯ БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ

Сигналы, передаваемые по линии связи, представляют собой совокупность множества различных частот: дискретных — в случае периодических несинусоидальных сигналов (см. гл. 13) и образующих непрерывный спектр — в случае непериодических сигналов (см. гл. 16).

Не искаженной передачей сигнала называется такая передача, при которой форма сигнала в начале и конце линии одинакова, т. е. все ординаты кривой напряжения или тока в конце линии прямо пропорциональны соответствующим ординатам кривой в начале линии.

Такое явление имеет место в том случае, когда коэффициент затухания линии, а также фазовая скорость на всех частотах одинаковы.

Неодинаковое затухание на разных частотах создает так называемые амплитудные искажения, а неодинаковая скорость волн на разных частотах — фазовые искажения.

Согласно (11-31) и (11-32) коэффициент затухания и фазовая скорость в случае кабельных линий пропорциональны квадратному корню частоты. В случае воздушных линий также существует зависимость α и v_ϕ от частоты. В результате этого получаются амплитудные и фазовые искажения.

Итак, для неискаженной передачи требуется, чтобы коэффициент затухания α не зависел от частоты, а коэффициент фазы β был прямо пропорционален частоте; в последнем случае фазовая скорость $v_\phi = \omega/\beta$ получается не зависящей от частоты.

Такое положение имеет место при условии, что

$$\frac{L}{r} = \frac{C}{g}. \quad (11-36)$$

В этом случае коэффициент распространения равен:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \\ &= \sqrt{rg \left(1 + j\omega \frac{L}{r}\right) \left(1 + j\omega \frac{C}{g}\right)}; \end{aligned}$$

с учетом (11-36)

$$\gamma = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{rg} \frac{L}{r}$$

или

$$\gamma = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{LC}.$$

Если считать, что первичные параметры линии не зависят от частоты, то коэффициент затухания в данном случае будет постоянен:

$$\alpha = \sqrt{rg}, \quad (11-37)$$

а коэффициент фазы — прямо пропорционален частоте:

$$\beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (11-38)$$

Линия, параметры которой удовлетворяют условию (11-36), называется линией без искажений, по-

сколько любые сигналы распространяются по ней с сохранением их формы. Линия без искажений является одновременно и линией с минимальным затуханием, которое только и возможно при заданных параметрах r и g .

Волновое сопротивление линии без искажений — действительное число, что равносильно активному сопротивлению, не зависящему от частоты; в соответствии с (11-34) оно выражается простой формулой

$$z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11-39)$$

Фазовая скорость в линии без искажений постоянна и совпадает с полученным ранее выражением (11-30) для предельной скорости распространения волны вдоль линии при бесконечно большой частоте:

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для устранения искажений, вызываемых несогласованностью сопротивления приемника с сопротивлением линии, т. е. во избежание возникновения отражений на приемном конце, сопротивление приемника должно быть равно $z_{\text{в}}$. Коэффициент полезного действия линии имеет в этом случае наибольшее возможное значение, равное $e^{-2\alpha l}$, как в линии при согласованной нагрузке.

Ввиду того что волновое сопротивление линии без искажений является активным, при согласованной нагрузке напряжение и ток в любой точке линии совпадают по фазе. Отношение мгновенных значений напряжения и тока в любой точке такой линии равно:

$$\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

откуда

$$\frac{Li^2}{2} = \frac{Cu^2}{2}. \quad (11-40)$$

Следовательно, на любом отрезке линии без искажений, нагруженной согласованно, энергия магнитного поля в каждый момент времени равна энергии электрического поля.

Следует заметить, что на практике условие (Ф1-36), как правило, не выполняется; отношение L/r обычно зна-

чительно меньше отношения C/g . Вследствие этого затухание линии всегда превышает минимальное. Наименее соответствуют условию (11-36) кабельные линии.

Чтобы линия наиболее соответствовала условию (11-36), следовало бы изменить какой-либо первичный параметр, например уменьшить r или C либо увеличить g или L .

Уменьшение активного сопротивления r возможно за счет применения проводов большего диаметра, что, однако, значительно удорожало бы линию. Увеличение проводимости изоляции g невыгодно, так как при этом возросло бы затухание линии.

Наилучшим средством для приближения первичных электрических параметров к оптимальному соотношению (11-36) является искусственное увеличение индуктивности включением в линию через определенное расстояние индуктивных катушек или применением кабеля, проводящие жилы которого обмотаны тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью [Л. 1].

11-6. ЛИНИЯ БЕЗ ПОТЕРЬ

Независимо от того, соблюдается ли оптимальное соотношение первичных параметров (11-36) или не соблюдается, во всех случаях желательно, чтобы активное сопротивление r и проводимость изоляции g были по возможности малы (для уменьшения потерь энергии).

В воздушных линиях обычно индуктивное сопротивление линии ωL превышает активное сопротивление r , а емкостная проводимость ωC превышает активную проводимость g . С ростом частоты разница между указанными величинами становится еще более значительной.

В ряде случаев оказывается полезным в первом приближении рассматривать линию, не имеющую потерь, т. е. пренебрегать активным сопротивлением и проводимостью по сравнению с соответствующими реактивными составляющими. Такая идеализация допускается для приближенной качественной и количественной оценки исследуемых явлений. При этом весьма упрощаются расчетные выражения и гиперболические уравнения линии переходят в тригонометрические.

Итак, основным исходным предположением, которое делают при рассмотрении линии без потерь, является приближенное условие, что $r \approx 0$ и $g \approx 0$. В этом случае

вторичные параметры линии принимают весьма простой вид, а именно:

$$\gamma = j\omega \sqrt{LC}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{LC}; \quad Z_B = z_B = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Следовательно, в линии без потерь затухание отсутствует. Ввиду постоянства фазовой скорости

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

отсутствуют также фазовые искажения.

Выражения для коэффициента фазы, фазовой скорости и волнового сопротивления линии без потерь совпадают с выражениями, полученными для линии без искажений. Следовательно, все сказанное о линии без искажений полностью относится и к линии без потерь.

Ввиду того, что гиперболические функции с мнимым аргументом преобразуются в тригонометрические функции, гиперболические уравнения линии (11-21) принимают тригонометрическую форму:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x' + jz_B \dot{I}_2 \sin \beta x'; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x' + j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin \beta x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-41)$$

Эти уравнения используются ниже при рассмотрении стоячих волн в линии без потерь (см. § 11-7).

Энергия, передаваемая по линии, складывается из энергии электрического и магнитного полей.

В том случае, когда к концу линии без потерь присоединено сопротивление, равное волновому, на любом отрезке линии соблюдается условие (11-40), полученное для линии без искажений. При этом вся энергия, доставляемая падающей волной, поглощается в сопротивлении нагрузки.

Если сопротивление нагрузки отлично от волнового, то в месте присоединения нагрузки энергия перераспределяется между полями, в результате чего возникают отражения.

В предельном случае, когда линия на конце разомкнута, падающая волна встречает бесконечно большое сопротивление; ток в конце линии обращается в нуль, и соответственно энергия магнитного поля переходит в энергию электрического поля. Напряжение на разомкну-

том конце линии удваивается, и возникает отраженная волна того же знака, что и падающая [$n_2=1$; см. (11-16a)].

В другом предельном случае, когда линия на конце замкнута накоротко, падающая волна встречает сопротивление, равное нулю, напряжение в конце линии обращается в нуль и соответственно энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля. Ток на короткозамкнутом конце линии удваивается, и возникает отраженная волна, знак которой противоположен знаку падающей волны ($n_2=-1$).

При активной нагрузке и $r_2 > z_B$ коэффициент отражения $n_2 > 0$; $n_2 < 0$ при $r_2 < z_B$. Поэтому в первом случае возрастает напряжение и убывает ток, а во втором случае, наоборот, убывает напряжение и возрастает ток по сравнению с режимом согласованной нагрузки ($n_2=0$).

11-7. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Исследуем закон распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии без потерь. С этой целью воспользуемся уравнениями линии (11-18) и (11-41) в комплексной и гиперболической формах.

Приняв в (11-18) мнимый коэффициент распространения $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$, получим для любой точки линии на расстоянии x' от конца:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} U_2 \left(1 + \frac{z_B}{Z_2} \right) \left(e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} + n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right) ; \\ I &= \frac{1}{2z_B} U_2 \left(1 + \frac{z_B}{Z_2} \right) \left(e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} - n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11-42)$$

Входящий в эти уравнения коэффициент отражения

$$n_2 = \frac{Z_2 - z_B}{Z_2 + z_B}$$

представляет собой в общем случае комплексную величину.

Выражения (11-42) наглядно свидетельствуют о том, что комплексное напряжение в любой точке x' складывается из падающей и отраженной волн напряжения, амплитуды которых находятся в соотношении $1 : |n_2|$; в свою очередь комплексный ток равен разности падающей и отраженной волн тока с тем же соотношением амплитуд.

Точкам $x' = k \frac{\lambda}{2}$ (k — целое число), удовлетворяющим условию

$$\left| e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} + n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right| = 1 + |n_2|, \quad (11-43)$$

соответствует максимальное действующее значение U , так как при этом фазы падающей и отраженной волн напряжения совпадают. На расстоянии $\lambda/4$ от этих точек падающая и отраженная волны оказываются в противофазе и действующее значение напряжения имеет минимум. При этом удовлетворяется условие

$$\left| e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} - n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right| = 1 - |n_2|. \quad (11-44)$$

Координаты максимумов и минимумов U , являющиеся многозначными функциями n_2 и λ , не зависят от времени, т. е. с течением времени они остаются на одном и том же месте; минимум U располагается посередине между двумя соседними максимумами U , причем расстояние между ближайшими максимумами (или минимумами) составляет $\lambda/2$.

Таким образом, кривая действующих значений напряжения вдоль линии без потерь представляет собой волнообразную кривую, максимумы и минимумы которой чередуются (см. дальше рис. 11-10, б и г).

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что и кривая действующих значений тока вдоль линии без потерь представляет собой волнообразную кривую, смещенную относительно кривой действующих значений напряжения на четверть длины волны. Места максимумов напряжения совпадают с местами минимумов тока и, наоборот, минимумы U совпадают с максимумами I .

При отсутствии отраженной волны ($n_2=0$) действующие значения U и I вдоль линии без потерь не изменяются.

Чем больше приближается коэффициент отражения $|n_2|$ к единице, тем больше разнятся максимумы и минимумы U (или I).

При $|n_2|=1$, т. е. при равенстве амплитуд прямой и обратной волн, в линии устанавливаются стоячие волны напряжения и тока. Кривые действующих значений U и I вдоль линии представляют собой в этом случае «выпрямленные» синусоиды; на линии образуются

узлы, т. е. точки, в которых U или I равны нулю, и пучности, т. е. точки, в которых U или I максимальны.

Из сказанного выше следует, что узлы напряжения совпадают с пучностями тока и, наоборот, узлы тока совпадают с пучностями напряжения. Соответственно узлы (или пучности) напряжения и тока сдвинуты на четверть длины волны друг относительно друга.

На рис. 11-9 в виде примера показано сложение прямой и обратной волн напряжения, имеющих одинаковые амплитуды, для трех моментов времени: t_1 , t_2 и t_3 . Сумма бегущих в противоположные стороны волн образует стоячую волну, показанную на рис. 11-9 в виде мгновенных значений для моментов времени t_1 , t_2 и t_3 .

Из этого рисунка видно, что на протяжении всего участка между двумя соседними узлами стоячей волны синусоидальное изменение напряжения во времени происходит с одинаковой начальной фазой: при прохождении узла начальная фаза синусоидальных колебаний изменяется скачкообразно на величину π . Сказанное в равной мере относится и к стоячей волне тока.

На основании приведенного выше выражения для коэффициента отражения n_2 можно заключить, что условие $|n_2|=1$ выполнимо в трех случаях: при $Z_2=\infty$ (холостой ход), $Z_2=0$ (короткое замыкание) и $Z_2=jx$ (реактивная нагрузка). Этим условиям соответствуют стоячие волны, возникающие в линии без потерь.

Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии для холостого хода и короткого замыкания иллюстрируется на рис. 11-10, а и д.

Для сравнения на рис. 11-10 показано распределение напряжения и тока для других режимов работы линии.

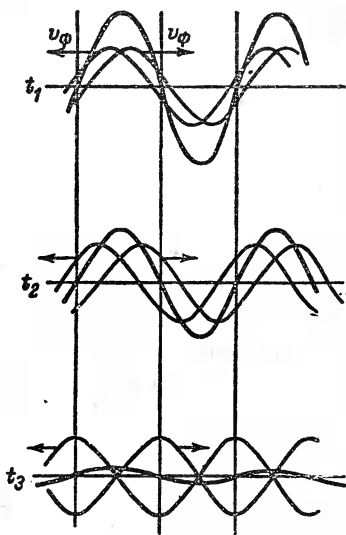


Рис. 11-9. Сложение прямой и обратной волн.

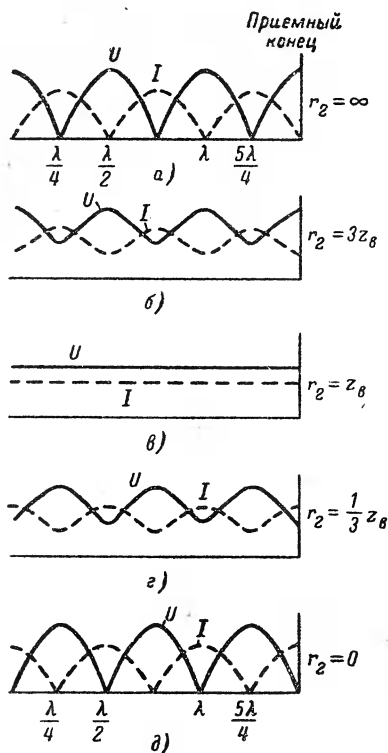


Рис. 11-10. Действующие значения напряжения и тока вдоль линии без потерь.

При активной нагрузке $Z_2 = r_2 = 3z_{\text{в}}$, $n_2 = 0,5$ (случай б) максимумы и минимумы U и I совпадают по своему местоположению с аналогичными значениями для режима холостого хода; при активной нагрузке $Z_2 = r_2 = 1/3 z_{\text{в}}$, $n_2 = -0,5$ (случай в) максимумы и минимумы расположены так же, как при коротком замыкании; при согласованной нагрузке $Z_2 = r_2 = z_{\text{в}}$, $n_2 = 0$ (случай г) кривые U и I изображаются прямыми, параллельными оси абсцисс.

Стоячие волны легко исследуются с помощью уравнений (11-41) линии без потерь.

При холостом ходе ($I_2 = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} &= j \frac{\dot{U}_2}{z_{\text{в}}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-45)$$

Узлы напряжения находятся в точках, для которых

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = 0$$

или

$$\frac{2\pi}{\lambda} x' = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

откуда

$$x'_{уз} = \frac{2k+1}{4} \lambda.$$

Пучности напряжения находятся в точках, для которых

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \pm 1$$

или

$$\frac{2\pi}{\lambda} x' = k\pi,$$

откуда

$$x'_{пуч} = \frac{k}{2} \lambda.$$

Разомкнутый конец линии совпадает с узлом тока и пучностью напряжения (рис. 11-10, а).

Как видно из (11-45), ток опережает по фазе напряжение на 90° , когда $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$ и $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$ имеют одинаковый знак ($0 \leq x' \leq \frac{\lambda}{4}$; $\frac{\lambda}{2} \leq x' \leq \frac{3}{4}\lambda$ и т. д.), и отстает на 90° от напряжения, когда знаки $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$ и $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$ различны ($\frac{\lambda}{4} \leq x' \leq \frac{\lambda}{2}$; $\frac{3}{4}\lambda \leq x' \leq \lambda$ и т. д.).

При коротком замыкании, положив в (11-41) $U_2 = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= jz_B \dot{I}_2, \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-46)$$

На замкнутом конце линии $x' = 0$ и в точках, удаленных от него на целое число полуволн $x' = k\lambda/2$, находятся узлы напряжения и пучности тока, а в точках, удаленных от конца на нечетное число четвертей волн $[x' = (2k+1)\frac{\lambda}{4}]$, находятся пучности напряжения и узлы тока (рис. 11-10, б).

Как видно из (11-46), ток отстает по фазе от напряжения на 90° , когда $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$ и $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$ имеют одинаковые знаки ($0 \leq x' \leq \frac{\lambda}{4}$; $\frac{\lambda}{2} \leq x' \leq \frac{3}{4}\lambda$ и т. д.), и опережает на 90° напряжение, когда знаки $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$ и $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$ различны ($\frac{\lambda}{4} \leq x' \leq \frac{\lambda}{2}$; $\frac{3}{4}\lambda \leq x' \leq \lambda$ и т. д.).

Следует заметить, что наличие хотя бы самых малых потерь в реальных линиях приводит к тому, что действующие значения U и I не снижаются до нуля, а достигают некоторых минимальных значений в точках, соответствующих узлам.

В случае стоячих волн мощность в узлах напряжения и тока равна нулю. В остальных точках линии имеет место только реактивная мощность, так как напряжение и ток сдвинуты по фазе на 90° . В этом случае энергия не передается вдоль линии, а происходит лишь обмен энергией между электрическим и магнитным полями на участках линии, ограниченных узлами напряжения и тока.

Если в линии имеются потери или приемник потребляет активную мощность, то узлы исчезают; амплитуда падающей волны превышает амплитуду отраженной волны, и за счет разности амплитуд происходит процесс передачи энергии вдоль линии.

Для количественной оценки степени согласования линии с нагрузкой в радиотехнике используется коэффициент бегущей волны, под которым понимается отношение минимума кривой распределения U или I к максимуму той же величины:

$$K_6 = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}. \quad (11-47)$$

С учетом (11-43) и (11-44) имеем:

$$K_6 = \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|}, \quad (11-48)$$

откуда

$$|n_2| = \frac{1 - K_6}{1 + K_6} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}. \quad (11-49)$$

В случае активной нагрузки выражение (11-48) упрощается. При $r_2 > z_B$ $|n_2| = \frac{r_2 - z_B}{r_1 + z_B}$ и согласно (11-48)

$$K_0 = \frac{z_B}{r_2}; \quad (11-50)$$

при $r_2 < z_B$ $|n_2| = \frac{z_B - r_2}{z_B + r_2}$ и, следовательно,

$$K_0 = \frac{r_2}{z_B}. \quad (11-51)$$

В реальных условиях коэффициент бегущей волны обычно не ниже 0,5—0,6.

Кривую распределения действующих значений напряжения вдоль линии используют на практике для измерения длины волны или частоты. Длина волны определяется удвоенным расстоянием между соседними максимумами или минимумами кривой распределения, а частота вычисляется по длине волны на основании (11-15).

11-8. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ

Входное сопротивление линии, измеренное в произвольной точке на расстоянии x' от конца, определяется отношением $Z = \dot{U}/\dot{I}$ и может быть представлено в комплексной или гиперболической форме. Ради общности рассмотрения вопроса будем считать, что линия нагружена на конце некоторым сопротивлением Z_2 , которое в зависимости от условий может быть любым.

Комплексная форма выражения для входного сопротивления линии получается на основании (11-18):

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_B \frac{e^{\gamma x'} + n_2 e^{-\gamma x'}}{e^{\gamma x'} - n_2 e^{-\gamma x'}}$$

или

$$Z = Z_B \frac{1 + n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}{1 - n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}. \quad (11-52)$$

Данное выражение показывает, что с изменением координаты x' модуль входного сопротивления линии колеблется между некоторыми максимумами и минимумами (которые в общем случае отличаются друг от друга).

Допустим, что модуль Z достигает некоторого максимума в точке x'_{ext} . Тогда максимумы будут также в точках, соответствующих изменению аргумента $2\beta x'$ на величину $2k\pi$, что даст:

$$2\beta'_{\text{ext}} + 2k\pi = 2\beta \left(x'_{\text{ext}} + k \frac{\pi}{\beta} \right) = 2\beta \left(x'_{\text{ext}} + k \frac{\lambda}{2} \right).$$

Следовательно, максимумы чередуются через каждые полволны. Посредине между максимумами будут минимумы, которые также чередуются через каждые полволны.

Если вместо координаты x' варьировать коэффициентом фазы $\beta = 2\pi/\lambda$, меняя частоту источника, то получится аналогичная волнообразная кривая, причем максимумы и соответственно минимумы будут отстоять друг от друга на π/x' (здесь $x' = \text{const}$). Исследуя изменение входного сопротивления линии при плавном изменении частоты источника, можно зафиксировать два следующих друг за другом максимума (или минимума) z , соответствующих частотам f и f_2 .

В этом случае:

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{2\pi f_1}{v_1}, \quad \beta_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{2\pi f_2}{v_2}$$

и, следовательно,

$$\beta_2 - \beta_1 = 2\pi \left(\frac{f_2}{v_2} - \frac{f_1}{v_1} \right) = \frac{\pi}{x'},$$

откуда

$$x' = \frac{v_1 v_2}{2(v_1 f_2 - v_2 f_1)}.$$

При малом расхождении частот f_1 и f_2 фазовые скорости v_1 и v_2 почти одинаковы: $v_1 \approx v_2 \approx v_\Phi$.

При этом

$$x' \approx \frac{v_\Phi}{2(f_2 - f_1)}.$$

Данная формула позволяет определить расстояние от точки наблюдения до ближайшей точки линии, в которой имеет место отражение (например, при коротком замыкании на линии), производя измерение только в одной точке.

Волнообразный характер кривой z подчиняется в общем случае закону изменения модуля гиперболического тангенса с комплексным аргументом, что видно из следующего вывода.

Непосредственно из (11-21) следует:

$$Z = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_B \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x'}{\dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma x'} = \frac{Z_2 + Z_B \operatorname{th} \gamma x'}{1 + \frac{Z_2}{Z_B} \operatorname{th} \gamma x'}. \quad (11-53)$$

Обозначив $Z_2/Z_B = \text{th } M$, имеем:

$$Z = Z_B \frac{\text{th } M + \text{th } \gamma x'}{1 + \text{th } M \text{th } \gamma x'} = Z_B \text{th } (\gamma x' + M). \quad (11-54)$$

При холостом ходе ($Z_2 = \infty$) входное сопротивление линии согласно (11-53) равно:

$$Z_x = Z_B \text{cth } \gamma x', \quad (11-55)$$

а при коротком замыкании ($Z_2 = 0$)

$$Z_K = Z_B \text{th } \gamma x'. \quad (11-56)$$

С учетом (11-55) и (11-56) входное сопротивление Z легко выразить через Z_x и Z_K :

$$Z = Z_x \frac{Z_2 + Z_K}{Z_2 + Z_x}.$$

Этой формулой пользуются в том случае, когда из опытов холостого хода и короткого замыкания известны Z_x и Z_K .

Данные опытов холостого хода и короткого замыкания используются также для вычисления характеристических параметров линии.

На основании (11-55) и (11-56)

$$Z_B = \sqrt{Z_x Z_K}; \quad \text{th } \gamma x' = \sqrt{\frac{Z_K}{Z_x}}. \quad (11-57)$$

Эти формулы совпадают с (9-35). Ввиду того что коэффициент фазы β определяется по (11-57) неоднозначно, при вычислении производится проверка на основании (11-14), причем первоначально фазовая скорость v_ϕ выбирается ориентировочно. Вычисление характеристических параметров по формулам (11-57) иллюстрировано ниже примером 11-1.

На рис. 11-11 показаны кривые изменения модулей Z_x и Z_K в зависимости от координаты x' . В пределе, т. е. при $x' \rightarrow \infty$, максимумы и минимумы кривой стремятся к значению Z_B .

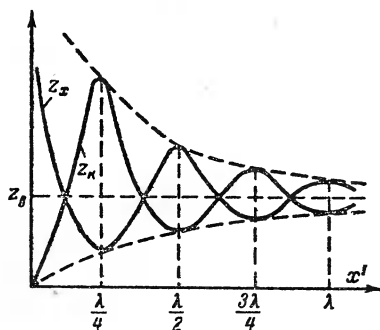


Рис. 11-11. Входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании.

Входные сопротивления линии без потерь при холостом ходе и коротком замыкании могут быть получены из (11-55) и (11-56) заменой $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$:

$$Z_x = -jz_b \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} x'; \quad Z_k = jz_b \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x'.$$

Эти реактивные входные сопротивления с учетом их знака изображаются котангенсоидами и тангенсоидами (рис. 11-12). Аргументом может служить также величина β , если изменять частоту при постоянной длине x' .

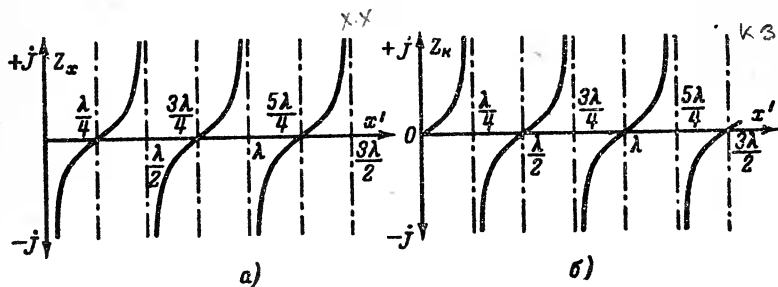


Рис. 11-12. Входные сопротивления линии без потерь.

а — холостой ход; б — короткое замыкание.

Сопоставляя эти графики с частотными характеристиками сопротивлений реактивных двухполюсников (см. гл. 5), легко убедиться в их сходстве: резонансы напряжений и токов чередуются, однако в отличие от двухполюсников, имеющих ограниченное число резонансов, линия без потерь имеет бесконечное число резонансных точек, что соответствует представлению линии как цепочки из бесконечного числа индуктивностей и емкостей.

Входное сопротивление линии без потерь при $x' \leq \frac{\lambda}{4}$ индуктивно в случае короткого замыкания и емкостно в случае холостого хода. При $x' = \lambda/4$ в первом случае наступает резонанс токов ($z = \infty$), во втором случае — резонанс напряжений ($z = 0$).

Следует отметить, что в реальных условиях вследствие наличия потерь входное сопротивление линии никогда не снижается до нуля и никогда не достигает бесконечного значения.

При этом короткозамкнутая линия при $x' = \lambda/4$ имеет большее входное сопротивление, чем разомкнутая линия при $x' = \lambda/2$, а разомкнутая линия при $x' = \lambda/4$ имеет меньшее входное сопротивление, чем короткозамкнутая при $x' = \lambda/2$.

Пример 11-1. Даны результаты измерения входных сопротивлений линии длиной 160 км на частоте 1 000 гц при холостом ходе и коротком замыкании: $Z_x = 887 \angle -35^\circ$; $Z_k = 540 \angle 21^\circ$ ом. Требуется вычислить первичные и вторичные параметры линии.

Расчет начинается с вычисления волнового сопротивления и коэффициента распространения:

$$Z_B = \sqrt{Z_x Z_k} = \sqrt{(887 \angle -35^\circ) (540 \angle 21^\circ)} = 692 \angle -7^\circ;$$

$$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_x}} = \sqrt{\frac{540 \angle 21^\circ}{887 \angle -35^\circ}} =$$

$$= 0,78 \angle 28^\circ = 0,688 + j 0,366;$$

$$e^{2\gamma l} = \frac{1 + \operatorname{tg} \gamma l}{1 - \operatorname{th} \gamma l} = \frac{1,688 + j 0,366}{0,312 - j 0,366} =$$

$$= \frac{1,726 \angle 12^\circ 15'}{0,480 \angle -49^\circ 35'} = 3,6 \angle 61^\circ 15' = 3,6 \angle 61,83^\circ = 3,6 \angle (1,08 + 2\pi k).$$

Целое число k находится на основании ориентировочного расчета величины $2\beta l$; если исходить из приближенного значения фазовой скорости $v_\phi \approx 300\,000$ км/сек (если линия воздушная), то

$$2\beta l = 2l \frac{\omega}{v_\phi} \approx 320 \frac{6\,280}{300\,000} \approx 6,7 \text{ рад} = 384^\circ.$$

Следовательно, надо принять

$$k = 1 \text{ и } 2\beta l = 1,08 + 6,28 = 7,36 \text{ рад}.$$

Итак,

$$e^{2\gamma l} = e^{1,28} e^{j 7,36},$$

откуда

$$2\alpha l = 1,28 \text{ неп.}$$

Коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{1,28}{1 \cdot 160} = 0,004 \text{ неп/км};$$

коэффициент фазы

$$\beta = \frac{7,36}{2 \cdot 160} = 0,023 \text{ рад/км};$$

коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,004 + j 0,023 = 0,0233 \angle 80^\circ 8';$$

фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{6280}{0,023} = 273\,040 \text{ км/сек};$$

длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{0,023} = 273,04 \text{ км.}$$

Первичные параметры линии находятся на основании выражений:

$$\begin{aligned} \gamma Z_B &= r + j\omega L \text{ и } \frac{\gamma}{Z_B} = g + j\omega C; \\ r + j\omega L &= (0,0233 \angle 80^\circ 8') (692 \angle -7^\circ) = \\ &= 16,12 \angle 73^\circ 8' = 4,887 + j15,426; \\ g + j\omega C &= \frac{0,0233 \angle 80^\circ 8'}{692 \angle 7^\circ} = \\ &= 10^{-6} \cdot 33,6 \angle 87^\circ 8' = (1,68 + j33,6) \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} r &= 4,887 \text{ ом/км}; \\ L &= \frac{15,426}{6280} = 0,00245 \text{ гн/км}; \quad g = 1,68 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км}; \\ C &= \frac{33,6 \cdot 10^{-6}}{6280} = 0,00535 \text{ мкф/км}. \end{aligned}$$

11-9. ЛИНИЯ КАК ЭЛЕМЕНТ РЕЗОНАНСНОЙ ЦЕПИ

Четвертьволновая линия с малыми потерями, разомкнутая на конце, обладает свойствами резонансной цепи, состоящей из последовательно соединенных r , L и C . При частоте, при которой на линии укладывается четверть волны (такую частоту условимся называть резонансной), входное сопротивление линии будет активным и притом минимальным.

При малом отклонении частоты от резонансной модуль входного сопротивления линии резко возрастает: входное сопротивление приобретает емкостный характер при понижении частоты и индуктивный характер — при повышении.

Входное сопротивление линии с малыми потерями, разомкнутой на конце, можно получить из (11-21), разлагая $\text{sh } \gamma x'$ и $\text{ch } \gamma x'$ по формулам тригонометрии и приняв ввиду малости $\alpha \text{ ch } \alpha x' \approx 1$, а $\text{sh } \alpha x' \approx \alpha x'$.

Выражение примет вид:

$$Z_x \approx z_B \frac{\cos \beta x' + j\alpha x' \sin \beta x'}{\alpha x' \cos \beta x' + j \sin \beta x'}.$$

Вблизи резонансной частоты $\beta x' \approx \pi/2$ и $\sin \beta x' \approx 1$, а $\cos \beta x' \ll 1$. Поэтому

$$Z_x \approx z_B (\alpha x' - j \cos \beta x') = z_B \alpha x' \left(1 - j \frac{\cos \beta x'}{\alpha x'} \right).$$

Если через β_0 обозначить коэффициент фазы при резонансной частоте, т. е. принять $\beta_0 x' = \pi/2$, и учесть соотношение $v_\phi = \omega/\beta \approx \omega_0/\beta_0$, то $\cos \beta x'$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \beta x' &\approx \cos \beta_0 \frac{\omega}{\omega_0} x' = \cos (\beta_0 x' + \beta_0 x' \delta) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta_0 x' \delta \right) = \\ &= -\sin \beta_0 x' \delta \approx -\beta x' \delta. \end{aligned}$$

Здесь, так же как и в гл. 5, $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ — расстройка частоты по отношению к резонансной. Следовательно,

$$Z_x \approx z_B \alpha x' \left(1 + j \frac{\beta \delta}{\alpha} \right). \quad (11-58)$$

В гл. 5 было показано, что при частоте, близкой к резонансной, когда величина δ значительно меньше единицы, комплексное сопротивление резонансной цепи равно:

$$Z \approx r (1 + j2Q\delta). \quad (11-59)$$

Рассматривая четвертьволновую линию как резонансную цепь, можно в силу одинаковой структуры выражений (11-58) и (11-59) считать, что добротность линии равна:

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

При этом резонансные характеристики, приведенные в гл. 5, применимы и к рассматриваемой линии.

Соответственно полоса пропускания, представляющая собой величину, обратную добротности (см. § 5-2), равна:

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\beta}.$$

Здесь под полосой пропускания, так же как и в § 5-2, подразумевается отнесенная к резонансной частоте ширина резонансной кривой между точками, соответствующими половине максимальной мощности (когда $r = |x|$).

При малых значениях коэффициента α добротность получается высокой, достигая примерно 1 000—4 000, что намного превышает добротность контуров r , L и C . В связи с этим возрастает и острота настройки.

11-10. ИСКУССТВЕННЫЕ ЛИНИИ

Искусственной линией называется цепь с сосредоточенными параметрами, приближающаяся по своим частотным характеристикам (в заданном диапазоне частот) к цепи с распределенными параметрами.

Искусственные линии находят широкое применение в лабораторных условиях и в особенности в современной импульсной радиотехнике для получения требуемого запаздывания сигналов.

В § 11-3 отмечалось, что всякая однородная линия представляет собой симметричный четырехполюсник с мерой передачи, равной величине

$$\gamma l = l \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)},$$

и характеристическим сопротивлением, равным волновому:

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}.$$

Заменяя линию эквивалентным Т-образным четырехполюсником, согласно рис. 9-17, *a* получаем на основании формул (11-23) расчетные выражения:

$$\frac{Z_1}{2} = Z_{\text{в}} \operatorname{th} \frac{\gamma l}{2}; \quad Z_2 = \frac{Z_{\text{в}}}{\operatorname{sh} \gamma l}. \quad (11-60)$$

Для какой-либо фиксированной частоты такой Т-образный четырехполюсник может быть осуществлен. Однако при передаче сигналов в некоторой заданной полосе частот величины Z_1 и Z_2 представляют сложные функции от частоты, не реализуемые в виде простейших элементов. В этом случае искусственная линия создается в виде цепной схемы, каждое звено которой с достаточной степенью точности заменяет весьма малый участок однородной линии.

11-11. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

11-1. Вычислить при частоте 1 000 гц волновое сопротивление однородной линии, коэффициент распространения и фазовую скорость по заданным первичным параметрам:

$$r = 6,5 \text{ ом/км}; \quad L = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ гн/км}; \\ C = 5,22 \cdot 10^{-3} \text{ мкф/км}; \quad g = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км}.$$

О т в е т: $Z_{\text{в}} = 692 \angle -12^\circ \text{ ом}; \quad \gamma = (49,2 + j222) 10^{-4} \text{ 1/км}; \quad v_{\text{ф}} = 283 \text{ 000 км/сек}.$

11-2. К линии, указанной в предыдущей задаче, присоединена активная нагрузка 200 ом. Вычислить коэффициент отражения.

О т в е т: $0,558 \angle 173^\circ.$

11-3. Входное сопротивление линии длиной 200 км при частоте 800 гц равно: при холостом ходе $747 \angle -26,5^\circ$ ом, при коротком замыкании $516 \angle 0,5^\circ$ ом. Вычислить вторичные и первичные параметры.

Ответ: $Z_{\text{в}} = 620 \angle 13^\circ$ ом; $\gamma = (47,5 + j180) \cdot 10^{-4}$ 1/км; $r = 5,4$ ом/км; $L = 2,04 \cdot 10^{-3}$ гн/км; $C = 6 \cdot 10^{-9}$ ф/км; $g = 8,7 \cdot 10^{-7}$ сим/км.

11-4. Входное сопротивление линии длиной 50 км при частоте 800 гц равно: при холостом ходе $328 \angle -29^\circ 12'$ ом, при коротком замыкании $1548 \angle 6^\circ 48'$ ом. Вычислить вторичные и первичные параметры.

Ответ: $Z_{\text{в}} = 712 \angle -11^\circ 12'$ ом; $\gamma = (91,6 + j280) \cdot 10^{-4}$ 1/км; $r = 10,25$ ом/км; $L = 3,66 \cdot 10^{-3}$ гн/км; $C = 8,22 \cdot 10^{-9}$ ф/км; $g = 5 \cdot 10^{-6}$ сим/км.

11-5. Однородная линия имеет параметры: $r = 5$ ом/км; $C = 5 \cdot 10^{-3}$ мкф/км; $g = 10^{-6}$ сим/км.

При какой индуктивности в линии отсутствовали бы искажения?

Ответ: 25 мгн/км.

11-6. Вычислить входное сопротивление линии без потерь при коротком замыкании. Длина линии 35 м; длина волны 50 м; волновое сопротивление линии 505 ом.

Ответ: $1554 \angle 90^\circ$ ом.

11-7. Условия и требование предыдущей задачи, но принять длину линии равной 23 м.

Ответ: $129 \angle -90^\circ$ ом.

11-8. Волновое сопротивление линии без потерь $z_{\text{в}} = 500$ ом. Определить амплитуду тока на расстоянии 1 м от разомкнутого конца линии при частоте $f = 10^8$ гц, если действующее значение напряжения на разомкнутом конце равно 10 в.

Ответ: 0,0245 а.

11-9. Однородная линия с первичными параметрами $r = 10,4$ ом/км, $L = 3,67$ мгн/км, $C = 0,00835$ мкф/км и $g = 0,8 \cdot 10^{-6}$ сим/км длиной 100 км подключена к источнику э. д. с. 100 в; частота равна 1 000 гц; линия нагружена активным сопротивлением 200 ом. Вычислить: токи в начале и конце линии; напряжение в конце линии; активную мощность в начале и конце линии.

Ответ: $0,167 \angle 0^\circ 30'$ а; $0,113 \angle -200^\circ 30'$ а; $22,6 \angle -200^\circ 30'$ в; 16,7 вт; 2,55 вт.

11-10. Чем отличаются цепи с распределенными параметрами от цепей с сосредоточенными параметрами?

11-11. В каких линиях и при каких условиях возникают стоячие волны?

11-12. Будет ли передаваться энергия по линии без потерь, замкнутой на реактивное сопротивление?

11-13. Каковы первичные и вторичные параметры линии без потерь?

11-14. Как определяются параметры A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} однородной линии?

11-15. Как определяются напряжение и ток в начале (или конце) линии в зависимости от напряжения и тока в конце (или начале) линии?

11-16. При каких условиях отношение U_1/U_2 равно $e^{\alpha l}$?

ЦЕПИ ТРЕХФАЗНОГО ТОКА

12-1. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Трехфазная электрическая цепь может быть представлена как совокупность трех однофазных цепей, в которых действуют э. д. с. одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга на одну треть периода, или, что то же, на угол $2\pi/3$. Эти три составные части трехфазной цепи называются фазами¹ и им ниже будут приписываться буквенные обозначения A , B и C .

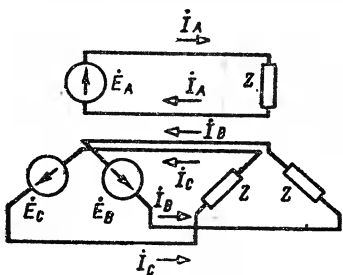


Рис. 12-1. Несвязанная трехфазная цепь.

На рис. 12-1 схематично показана трехфазная цепь, фазы которой электрически не связаны друг с другом. Такая трехфазная цепь называется не связанной (в настоящее время не применяется).

На рис. 12-1 для простоты обмотки трехфазного генератора не показаны. Сопротивления обмоток и шести соединительных проводов ввиду их малости по сравнению с сопротивлениями нагрузки можно для начала пренебречь.

На рис. 12-1 для простоты обмотки трехфазного генератора не показаны. Сопротивления обмоток и шести соединительных проводов ввиду их малости по сравнению с сопротивлениями нагрузки можно для начала пренебречь.

Фазы A , B и C изображены на рис. 12-1 под углом 120° , для того чтобы подчеркнуть, что э. д. с. $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$ сдвинуты друг относительно друга на одну треть периода. При равенстве амплитуд э. д. с. и одинаковых сопротивлений в фазах токи $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ также равны по величине и сдвинуты друг относительно друга на одну треть периода, образуя так называемый трехфазный ток.

Сумма этих токов в любой момент времени равна нулю; поэтому если три провода, по которым токи возвращаются к источникам, объединить в один провод, то ток в этом проводе будет равен нулю. При отсутствии в проводе тока излишним в данном случае является и

¹ Таким образом, термином «фаза» в электротехнике обозначаются два понятия: угол, определяющий стадию периодического процесса, и составная часть многофазной цепи.

сам провод; от него можно отказаться, перейдя, таким образом, к схеме рис. 12-2. В результате этого достигается экономия материала проводов; кроме того, по сравнению с не связанной трехфазной цепью исключаются потери мощности от токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ в обратных проводах.

Трехфазная цепь на рис. 12-2, фазы которой соедине-

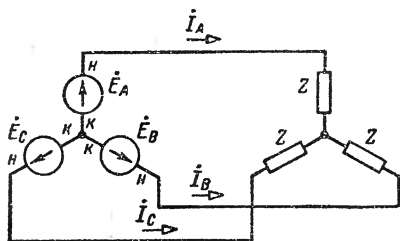


Рис. 12-2. Связанная трехфазная цепь.

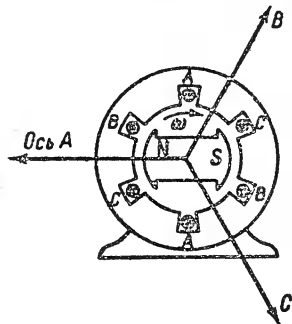


Рис. 12-3. Принцип выполнения трехфазного синхронного генератора.

ны электрически, представляет собой одну из разновидностей связанных трехфазных цепей.

Благодаря технико-экономическим преимуществам связанных трехфазных цепей они получили широкое распространение.

Для получения связанной трехфазной цепи не требуются отдельные однофазные генераторы, а используется трехфазный генератор, схематически показанный на рис. 12-3. Обмотки, в которых наводятся э. д. с., помещаются в пазах статора¹. Обмотки фаз сдвинуты друг относительно друга на угол $120^\circ/p$, где p — число пар полюсов. В случае двухполюсного генератора (рис. 12-3) $p = 1$ и угол равен 120° (подробнее см. § 12-6).

При вращении ротора в силу идентичности трех обмоток генератора в них наводятся э. д. с., имеющие одинаковые амплитуду и частоту, причем эти э. д. с. сдвинуты по фазе друг по отношению к другу на одну треть периода. Векторы, изображающие эти э. д. с., равны по величине и расположены под углом 120° (рис. 12-4, б).

¹ Следует отметить, что на практике применяются также трехфазные генераторы, в которых полюсы неподвижны, а обмотки вращаются.

Мгновенные значения э. д. с. трехфазного генератора, показанные на рис. 12-4, а, выражаются аналитически следующим образом:

$$e_A = E_m \sin \omega t;$$

$$e_B = E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad e_C = E_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Мгновенные значения э. д. с. равны соответствующим проекциям трех векторов: $\dot{E}_{mA}$, $\dot{E}_{mB}$ и $\dot{E}_{mC}$ (рис. 12-4, б),

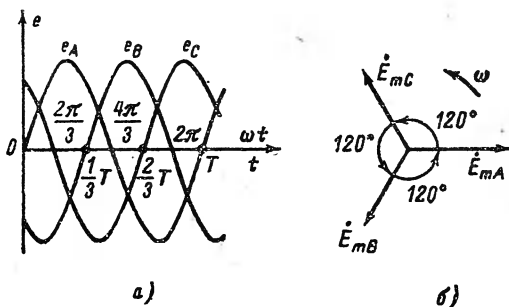


Рис. 12-4. Мгновенные значения (а) и векторная диаграмма э. д. с. (б) трехфазного генератора.

образующих симметричную звезду и вращающихся в положительном направлении с угловой скоростью ω (на рис. 12-3 положение ротора соответствует моменту $t=0$).

Положительные направления э. д. с. в обмотках указаны на рис. 12-3 точками и крестиками; точка означает острое, а крестик — конец стрелки, совпадающей с положительным направлением э. д. с. (положительное направление э. д. с. не следует смешивать с действительным направлением э. д. с. в произвольный момент времени).

Создание в 1889 г. связанной трехфазной цепи переменного тока явилось важным событием в истории электротехники.

Впервые такую цепь осуществил выдающийся русский инженер и ученый Михаил Осипович Доливо-Добровольский (1862—1919 гг.). Им были разработаны основные звенья генерирования, передачи, распределения и преобразования электроэнергии трехфазного тока, именно: трехфазный генератор, трансформатор и асин-

хронный двигатель. Изобретение М. О. Доливо-Добровольским асинхронного двигателя, являющегося простейшим и самым дешевым двигателем переменного тока, существенно способствовало широкому промышленному внедрению трехфазного тока.

Технические и экономические преимущества трехфазного тока обеспечили ему ведущую роль в современной электротехнике.

Неуклонно возрастает также роль трехфазного переменного тока в авиации.

12-2. СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕЗДОЙ И ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Каждая фазная обмотка имеет две крайние точки или два вывода, которые условно называются началом и концом обмотки. За начало обмотки генератора

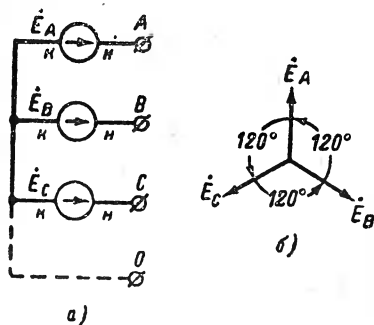


Рис. 12-5. Соединение трехфазного генератора звездой.

а — схема; б — векторная диаграмма э. д. с.

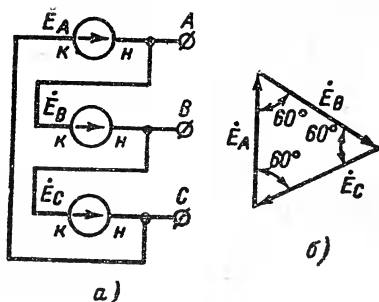


Рис. 12-6. Соединение трехфазного генератора треугольником.

а — схема; б — векторная диаграмма э. д. с.

обычно принимается тот вывод, к которому направлена положительная э. д. с. На рис. 12-2 одноименные выводы фазных обмоток генератора обозначены буквами *н* (начало) и *к* (конец).

Показанное на схеме рис. 12-2 соединение обмоток трехфазного генератора называется звездой: все концы фазных обмоток генератора соединены в одной общей точке. В дальнейшем для простоты мы не будем располагать фазы генератора под углом 120° , а будем изображать их параллельно (рис. 12-5, а).

Общая точка фазных обмоток генератора называется нейтральной, или нулевой, точкой. В зависимости от требований нейтральная точка может быть выведена к отдельному зажиму, обозначенному на рис. 12-5, *а* цифрой 0.

При соединении обмоток трехфазного генератора треугольником (рис. 12-6, *а*) начало одной фазной об-

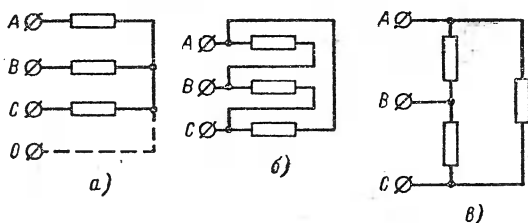


Рис. 12-7. Соединение нагрузки звездой (*а*) и треугольником (*б* и *в*).

мотки соединяется с концом следующей по порядку фазной обмотки так, что все три обмотки образуют замкнутый треугольник, причем направления э. д. с. в контуре треугольника совпадают и сумма э. д. с. равна нулю. Общие точки соединенных обмоток генератора выводятся на зажимы, к которым присоединяются линейные провода или нагрузка.

При отсутствии нагрузки, т. е. при режиме холостого хода в обмотках генератора, соединенных треугольником, ток не циркулирует, так как сумма трех фазных э. д. с. равна нулю (рис. 12-6, *б*).

Ради упрощения в схемах рис. 12-5, *а* и 12-6, *а* показаны только э. д. с. генератора; обмотки и их сопротивления на схеме не показаны.

Нагрузка в трехфазной цепи также может быть соединена звездой (см. рис. 12-7, *а*) или треугольником (рис. 12-7, *б* и *в*).

На практике применяются различные комбинации соединений, например: 1) генератор может быть соединен звездой, а нагрузка — звездой или треугольником; 2) генератор может быть соединен треугольником, а нагрузка — звездой или треугольником.

Соединение нагрузки звездой по схеме рис. 12-2 применяется только при одинаковой нагрузке всех трех фаз.

Между тем условие равномерной загрузки фаз на практике не всегда выполняется (например, в случае осветительной нагрузки). При неравномерной нагрузке напряжения на фазах, т. е. на сопротивлениях лучей звезды нагрузки, получаются неодинаковыми (см. § 12-4). Кроме того, в схеме рис. 12-2 недопустимым является включение или отключение одной фазы нагрузки.

В этом отношении соединение нагрузки треугольником имеет преимущество: сопротивления фаз, т. е. сторон

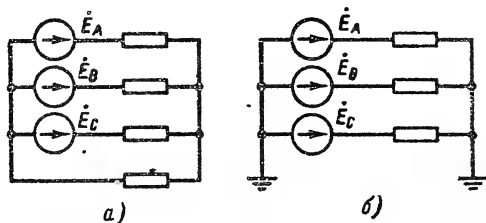


Рис. 12-8. Соединение звезда — звезда с нейтральным проводом (а) и заземленными нейтральными точками (б).

треугольника, могут быть неодинаковы и даже в крайнем случае могут включаться и отключаться независимо друг от друга.

Такая же возможность имеется при соединении генератора и нагрузки звездой, если их нейтральные точки соединены нейтральным проводом или через землю (рис. 12-8, а и б). На самолетах и кораблях нейтральным проводом может служить металлическая обшивка (корпус), к которой присоединяются нейтральные точки генераторов и нагрузок.

Электродвижущие силы, наводимые в фазных обмотках генератора, напряжения на их зажимах, напряжения на фазах нагрузки и токи в них называются соответственно фазными э. д. с.; напряжениями и токами и обозначаются E_{ϕ} , U_{ϕ} и I_{ϕ} .

Напряжения между линейными проводами и токи в них называются линейными напряжениями и токами и обозначаются $U_{\text{л}}$ и $I_{\text{л}}$.

При соединении фаз звездой фазные токи равны линейным токам: $I_{\phi} = I_{\text{л}}$. При соединении фаз треугольни-

ком фазное напряжение равно соответствующему линейному напряжению: $U_{\phi} = U_{\text{л}}^*$.

Различают симметричный и несимметричный режимы работы трехфазной цепи. При симметричном режиме сопротивления всех трех фаз одинаковы и э. д. с. образуют симметричную систему; в противном случае имеет место несимметричный режим.

12-3. СИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Расчет трехфазной цепи, так же как и расчет всякой сложной цепи, ведется обычно в комплексной форме. Ввиду того что фазные э. д. с. генератора сдвинуты друг относительно друга на 120° , для краткости математической записи применяется фазовый оператор — комплексная величина

$$a = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Умножение вектора на оператор a означает поворот вектора на 120° в положительном направлении (против хода часовой стрелки).

Соответственно умножение вектора на множитель a^2 означает поворот вектора на 240° в положительном направлении или, что то же, поворот его на 120° в отрицательном направлении.

Очевидно,

$$a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если э. д. с. фазы A равна $\dot{E}_A$, то э. д. с. фаз B и C равны соответственно:

$$\dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A; \quad \dot{E}_C = a \dot{E}_A.$$

В простейшем случае симметричного режима работы трехфазной цепи, когда генератор и нагрузка соединены звездой (рис. 12-9, а), векторная диаграмма э. д. с. и токов имеет вид, показанный на рис. 12-9, б.

* Кроме того, применяется понятие «фазное напряжение в данном сечении» трехфазной цепи по отношению к какой-либо точке, принимаемой за нуль, например земле, нулевой точке генератора или искусственной нулевой точке.

Ток в каждой фазе отстает от э. д. с. той же фазы на угол $\varphi = \arctg \frac{x}{r}$, где r и x — активное и реактивное сопротивления фаз.

Ток в фазе A находят так же, как в однофазной цепи, потому что нейтральные точки генератора и нагрузки

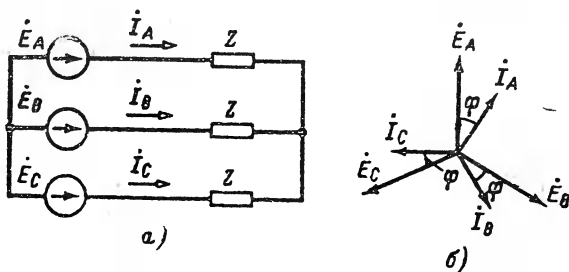


Рис. 12-9. Симметричный режим работы трехфазной цепи.

a — трехфазная цепь; b — векторная диаграмма.

в симметричном режиме могут быть соединены как имеющие одинаковые потенциалы:

$$I_A = \frac{\dot{E}_A}{Z}.$$

Соответственно токи в фазах B и C выражаются через ток I_A :

$$I_B = a^2 I_A, \quad I_C = a I_A.$$

Наличие нейтрального провода не вносит при симметричном режиме никаких изменений, так как сумма токов трех фаз равна нулю и ток в нем отсутствует:

$$I_N = I_A + I_B + I_C = (1 + a^2 + a)I_A = 0.$$

Таким образом, при симметричном режиме работы трехфазной цепи задача сводится к расчету одной из фаз аналогично расчету однофазной цепи. При этом сопротивление обратного (нейтрального) провода не учитывается, так как ток в нем и соответственно падение напряжения на нем отсутствуют.

По мере удаления от генератора фазные напряжения, определяемые падениями напряжения до нейтральной точки нагрузки, изменяются по величине (обычно убывают) и по фазе. Линейные напряжения определяются как разности соответствующих фазных напряжений, например: $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B$. В любом месте трехфазной линии при симметричном режиме соблюдается следующее соотношение между модулями линейных и фазных напряжений:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}}.$$

Действительно,

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A (1 - a^2) = \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30^\circ,$$

т. е. $\dot{U}_{AB}$ опережает по фазе $\dot{U}_A$ на 30° , причем модуль U_{AB} в $\sqrt{3}$ раз превышает U_A .

В случае соединения треугольником линейные токи определяются в соответствии с первым законом Кирхгофа как разности фазных токов и при симметричном режиме соблюдается соотношение $I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}}$.

Соединение фаз генератора или нагрузки треугольником должно быть для расчета заменено эквивалентным соединением фаз звездой; вследствие этого расчет трехфазной цепи с соединением фаз треугольником приводится в конечном итоге к расчету эквивалентной трехфазной цепи с соединением фаз звездой.

Между сопротивлениями сторон треугольника (Z_{Δ}) и лучей звезды ($Z_{\text{л}}$) имеет место соотношение $Z_{\text{л}} = \frac{1}{3} Z_{\Delta}$ вытекающее из формул преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду (см. § 4-4). Это соотношение справедливо как для сопротивлений симметричной трехфазной нагрузки, так и для сопротивлений симметричного трехфазного генератора. При этом фазные э. д. с. эквивалентного генератора, соединенного звездой, берутся в $\sqrt{3}$ раз меньшими фазных э. д. с. заданного генератора, соединенного треугольником (кроме того, они должны быть сдвинуты на угол 30°). Это легко усмотреть из векторной потенциальной диаграммы напряжений генератора.

Активная мощность симметричной трехфазной нагрузки равна:

$$P = 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \cos \varphi.$$

Ввиду того что при соединении нагрузки звездой $\sqrt{3}U_{\phi} = U_{\text{л}}$ и $I_{\phi} = I_{\text{л}}$, а при соединении нагрузки треугольником $U_{\phi} = U_{\text{л}}$ и $\sqrt{3}I_{\phi} = I_{\text{л}}$, активная мощность трехфазной цепи независимо от вида соединения выражается через линейные напряжения и ток следующим образом:

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi;$$

здесь φ — угол сдвига фазового тока относительно одноименного фазного напряжения.

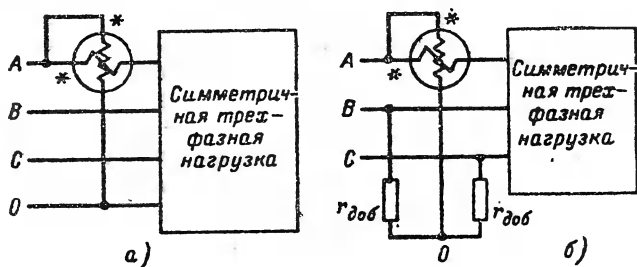


Рис. 12-10. Измерение активной мощности при симметричном режиме.

Аналогичным образом для реактивной и полной мощностей симметричной трехфазной нагрузки имеем:

$$Q = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \quad S = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}.$$

Приведенные выражения не означают, что при пересоединении нагрузки со звезды на треугольник (или наоборот) активная и реактивная мощности не изменяются. При пересоединении нагрузки со звезды на треугольник при заданном линейном напряжении фазные токи возрастут в $\sqrt{3}$ раз, а линейный ток — в 3 раза и поэтому мощность возрастет в 3 раза.

Если нейтральная точка симметричной трехфазной нагрузки выведена, то измерение активной мощности может быть осуществлено одним ваттметром, включенным по схеме рис. 12-10, а (одноименные или так называемые генераторные зажимы последовательной и параллельной цепей ваттметра отмечены на рис. 12-10, а звездочками). Утроенное показание ваттметра равно суммарной активной мощности трех фаз.

Если нейтральная точка не выведена или нагрузка соединена треугольником, то можно воспользоваться схемой рис. 12-10, б, где параллельная цепь ваттметра и два добавочных активных сопротивления $r_{доб}$, равные по величине сопротивлению параллельной цепи ваттметра, образуют искусственную нейтральную точку 0*.

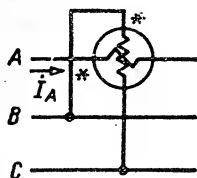


Рис. 12-11. Измерение реактивной мощности при симметричном режиме.

Для получения суммарной мощности, как и в предыдущем случае, показание ваттметра утраивается.

На рис. 12-11 показан способ измерения реактивной мощности в симметричной трехфазной цепи при помощи одного ваттметра: последовательная цепь ваттметра включена в фазу A , а параллельная — между фазами B и C , причем генераторные зажимы ваттметра присоединены к фазам A и B .

Показание ваттметра в этом случае равно:

$$U_{BC} I_A \cos(\varphi - 90^\circ) = U_{BC} I_A \sin \varphi.$$

Для получения суммарной реактивной мощности показание умножается на $\sqrt{3}$.

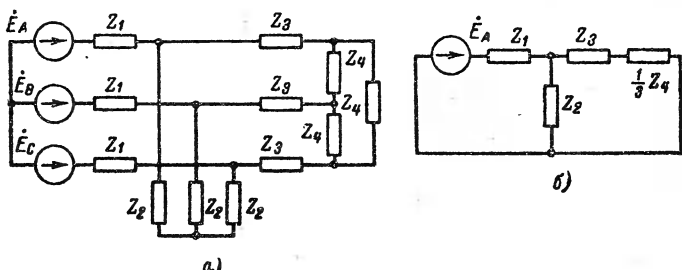


Рис. 12-12. Пример 12-1.

* Следует заметить, что здесь применим только электродинамический или ферродинамический ваттметр, сопротивление параллельной цепи которого является чисто активным. Индукционный ваттметр неприменим по той причине, что сопротивление параллельной цепи такого ваттметра имеет реактивное сопротивление; для создания искусственной нейтральной точки в этом случае потребовались бы реактивные добавочные сопротивления.

Разделив активную мощность на полную мощность, получим:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

Пример 12-1. Определить ток в генераторе при симметричном режиме работы трехфазной цепи, представленной на рис. 12-12, а.

Сопровитления Z_4 , соединенные треугольником, заменяются эквивалентной звездой из сопротивлений $\frac{1}{3} Z_4$.

При симметричном режиме нейтральные точки генератора и нагрузки, как было указано выше, могут быть объединены. Тогда режим работы каждой фазы, например фазы A , может быть рассмотрен в однофазной расчетной схеме (рис. 12-12, б).

Результирующее сопротивление цепи одной фазы равно:

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 \left(Z_3 + \frac{1}{3} Z_4 \right)}{Z_2 + Z_3 + \frac{1}{3} Z_4}.$$

Искомый ток в фазе A

$$i_A = \frac{\dot{E}_A}{Z}.$$

12-4. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Несимметрия в трехфазной цепи может быть вызвана различными причинами: 1) неодинаковым сопротивлением фаз (несимметричная нагрузка); 2) несимметричным коротким замыканием (например, между двумя фазами или фазой и нейтралью); 3) размыканием фазы; 4) неравенством величин э. д. с. и т. п.

Расчет токов и напряжений в трехфазной цепи при несимметричном режиме может производиться теми же методами, которые применяются для расчета однофазных цепей.

Рассмотрим несколько простейших вариантов (без взаимной индукции между фазами).

1. *Несимметричная трехфазная цепь, соединенная звездой, с нейтральным проводом* (рис. 12-13).

Несимметричная трехфазная цепь, показанная на рис. 12-13, может рассматриваться как трехконтурная цепь с тремя э. д. с. Такая цепь может быть рассчитана методами контурных токов, узловых напряжений и дру-

гими. Поскольку в схеме имеются только два узла, наиболее целесообразно в данном случае определить узловое напряжение (напряжение смещения) между нейтральными точками O' и O по формуле, аналогичной (4-4):

$$\dot{U}_{O'O} = \dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{E}_A + Y_B \dot{E}_B + Y_C \dot{E}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}, \quad (12-1)$$

где Y_A, Y_B, Y_C и Y_N — проводимости соответствующих ветвей.

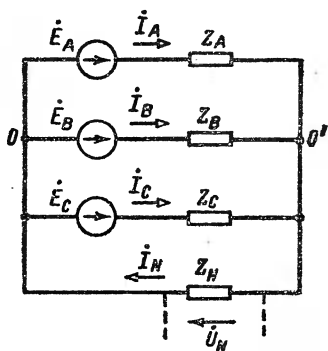


Рис. 12-13. Несимметричная трехфазная цепь, соединенная звездой (с нейтральным проводом).

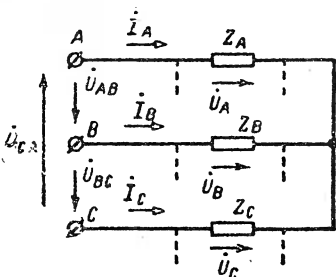


Рис. 12-14. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная звездой (без нейтрального провода).

После этого найдем токи:

$$I_A = Y_A (\dot{E}_A - \dot{U}_N);$$

$$I_B = Y_B (\dot{E}_B - \dot{U}_N);$$

$$I_C = Y_C (\dot{E}_C - \dot{U}_N).$$

В симметричной трехфазной цепи $Y_A = Y_B = Y_C$, и поэтому при $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$ узловое напряжение $\dot{U}_N$ равно нулю.

Случаю размыкания какой-либо фазы или нейтрального провода соответствует равенство нулю проводимости данной фазы или нейтрального провода.

При отсутствии нейтрального провода, полагая в (12-1) $Y_N = 0$, имеем:

$$\dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{E}_A + Y_B \dot{E}_B + Y_C \dot{E}_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

2. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная звездой (без нейтрального провода), с заданными линейными напряжениями на зажимах (рис. 12-14).

Если заданы линейные напряжения $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ на зажимах нагрузки, соединенной звездой, то токи в фазах звезды определяются следующим образом.

Обозначив фазные напряжения на зажимах нагрузки через $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ (рис. 12-14), получим

$$\dot{I}_A = Y_A \dot{U}_A; \quad \dot{I}_B = Y_B \dot{U}_B; \quad \dot{I}_C = Y_C \dot{U}_C,$$

где Y_A , Y_B и Y_C — проводимости фаз нагрузки.

Равенство нулю суммы токов трех фаз записывается в виде:

$$Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C = 0. \quad (12-2)$$

Фазные напряжения $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ могут быть выражены через $\dot{U}_A$ и заданные линейные напряжения:

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A - \dot{U}_{AB}; \quad \dot{U}_C = \dot{U}_{CA} + \dot{U}_A. \quad (12-3)$$

Подстановка (12-3) в (12-2) дает:

$$\dot{U}_A = \frac{Y_B \dot{U}_{AB} - Y_C \dot{U}_{CA}}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Круговой заменой индексов (с порядком следования $ABCA$ и т. д.) находятся:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_B &= \frac{Y_C \dot{U}_{BC} - Y_A \dot{U}_{AB}}{Y_A + Y_B + Y_C}; \\ \dot{U}_C &= \frac{Y_A \dot{U}_{CA} - Y_B \dot{U}_{BC}}{Y_A + Y_B + Y_C}. \end{aligned} \right\} \quad (12-4)$$

По фазным напряжениям нагрузки находятся фазные токи.

В случае симметричной нагрузки $Y_A = Y_B = Y_C$ вектор фазного напряжения равен одной трети диагонали параллелограмма, построенного на соответствующих линейных напряжениях. Фазные напряжения в этом случае определяются векторами, соединяющими центр тяжести треугольника напряжений (точка пересечения медиан) с вершинами треугольника,

На рис. 12-15 построение сделано для фазы A по формуле (12-4):

$$\dot{U}_A = \frac{1}{3} (\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{CA}) = -\frac{1}{3} (\dot{U}_{BA} + \dot{U}_{CA}).$$

В качестве примера рассмотрим схему фазоуказателя, используемую для определения чередования фаз по времени, состоящую из конденсатора и двух одинаковых электрических ламп, соединенных звездой¹.

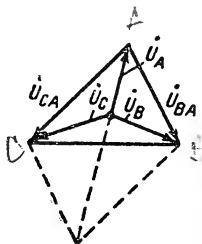


Рис. 12-15. Нахождение фазных напряжений.

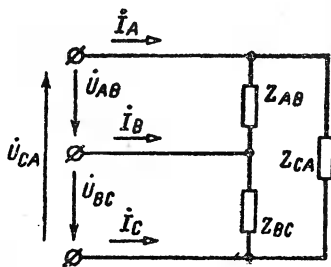


Рис. 12-16. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная треугольником.

Положим, что конденсатор присоединен к фазе A , лампы — к фазам B и C ; емкостное сопротивление конденсатора берется равным по величине сопротивлению лампы, т. е. $Z_A = -jx_C$, $Z_B = Z_C = r$, причем $x_C = r$.

Неравенство напряжений на лампах проявится в том, что накал ламп будет разным. Отношение напряжений согласно выведенным выше выражениям (12-4) равно при симметрии линейных напряжений:

$$\frac{U_B}{U_C} = \left| \frac{a^2 - a - j(1 - a^2)}{j(a - 1) - (a^2 - a)} \right| = \left| \frac{3,23 + j0,866}{0,23 + j0,866} \right| \approx 3,73.$$

Следовательно, лампа, присоединенная к фазе B (т. е. к фазе, опережающей ту, к которой присоединена вторая лампа), будет светить ярко, а лампа, присоединенная к отстающей фазе, — тускло.

¹ Для определения чередования фаз на практике обычно пользуются специальным прибором, в котором создается вращающееся магнитное поле (см. § 12-6), увлекающее за собой диск в ту или другую сторону.

Вместо конденсатора можно применить индуктивную катушку, подобрав ее индуктивное сопротивление приблизительно равным по величине сопротивлению лампы. В этом случае ярче будет светить лампа, присоединенная к отстающей фазе. Эти соотношения также могут быть получены непосредственно из векторной диаграммы.

3. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная треугольником, с заданными напряжениями на зажимах (рис. 12-16).

Если на зажимах несимметричной трехфазной нагрузки, соединенной треугольником, заданы линейные напряжения $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ (рис. 12-16), то токи в сопротивлениях нагрузки равны:

$$\frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}}, \quad \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} \text{ и } \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}.$$

Токи в линии определяются как разности соответствующих токов нагрузки, например: $\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} - \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}$ и т. д.

Если на зажимах несимметричной трехфазной нагрузки, соединенной треугольником, заданы фазные напряжения $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ источника, соединенного в звезду, то линейные напряжения на зажимах нагрузки находятся как разности соответствующих фазных напряжений, в результате чего задача сводится к только что рассмотренному случаю (рис. 12-16).

Пример 12-2. Сопротивления фаз нагрузки, соединенной звездой: $Z_A = 40 + j30 = 50 \angle 36^\circ 54'$; $Z_B = 30 + j40 = 50 \angle 53^\circ 6'$; $Z_C = 20 \angle 0^\circ$ ом.
Сопротивление нейтрального провода

$$Z_N = 3 + j4 = 5 \angle 53^\circ 6' \text{ ом.}$$

Напряжение на зажимах цепи представляет собой симметричную звезду:

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= 100 \angle 0^\circ; \quad \dot{U}_B = 100 \angle -120^\circ = -50 - j86,6; \quad \dot{U}_C = 100 \angle 120^\circ = \\ &= -50 + j86,6 \text{ в.} \end{aligned}$$

Требуется определить фазные напряжения нагрузки. Проводимости фаз нагрузки и нейтрального провода

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = 0,02 \angle -36^\circ 54' = 0,016 - j0,012 \text{ сим;}$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = 0,02 \angle -53^\circ 6' = 0,012 - j0,016 \text{ сим;}$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = 0,05 \angle 0^\circ \text{ см};$$

$$Y_N = \frac{1}{Z_N} = 0,2 \angle -53^\circ 6' = 0,12 - j 0,16 \text{ см}.$$

На основании формулы (12-1)

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= 100 \frac{0,02 \angle -36^\circ 54' + 0,02 \angle -173^\circ 6' + 0,05 \angle 120^\circ}{0,016 - j 0,012 + 0,012 - j 0,016 + 0,05 + 0,12 - j 0,16} = \\ &= -14,9 + j 0,39 \text{ в.} \end{aligned}$$

Искомые фазные напряжения нагрузки:

$$\dot{U}_A - \dot{U}_N = 100 + 14,9 - j 0,39 = 114,9 - j 0,39 = 114,9 \angle -0^\circ 12' \text{ в};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_B - \dot{U}_N &= -50 - j 86,6 + 14,9 - j 0,39 = -35,1 - \\ &- j 87,0 = 93,5 \angle -112^\circ \text{ в}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_C - \dot{U}_N &= -50 + j 86,6 + 14,9 - j 0,39 = -35,1 + \\ &+ j 86,2 = 93,0 \angle 112^\circ 50' \text{ в.} \end{aligned}$$

12-5. МОЩНОСТЬ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Пользуясь комплексной формой записи мощности, можно написать общее выражение для мощности трехфазной цепи:

$$\tilde{S} = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^*. \quad (12-5)$$

Действительная часть этого выражения представляет собой активную мощность

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Суммарная активная мощность, потребляемая несимметричной трехфазной цепью, может быть в соответствии с этим измерена при помощи трех ваттметров, включенных на подведенные к данной цепи фазные напряжения относительно нейтрали и одноименные с ними токи. Активная мощность равна сумме показаний трех ваттметров. Такой метод измерения применяется при наличии нейтрального провода (рис. 12-17) или искусственно созданной нейтральной точки.

В случае отсутствия нейтрального провода измерение может быть произведено с помощью двух ваттметров (рис. 12-18). В этом случае выражение (12-5) преобра-

зуется следующим образом: исключая ток $\dot{I}_C^*$ из условия

$$\dot{I}_C^* = -\dot{I}_A^* - \dot{I}_B^*,$$

получаем:

$$\tilde{S} = (\dot{U}_A - \dot{U}_C) \dot{I}_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) \dot{I}_B^*$$

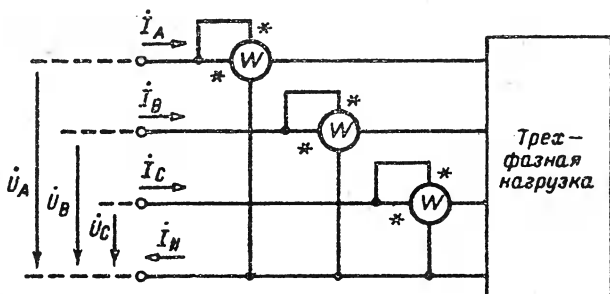


Рис. 12-17. Измерение мощности при наличии нейтрального провода.

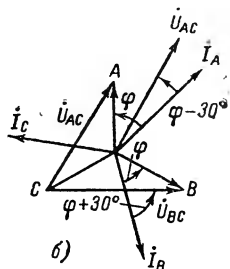
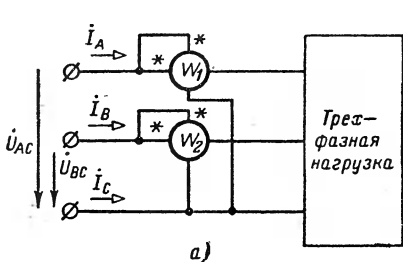


Рис. 12-18. Измерение мощности двумя ваттметрами (при отсутствии нейтрального провода).

или

$$\tilde{S} = \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^*. \quad (12-6)$$

В соответствии с (12-6) при измерении активной мощности двумя ваттметрами к одному из них подводится напряжения $\dot{U}_{AC}$ и ток $\dot{I}_A$, а ко второму — напряжение $\dot{U}_{BC}$ и ток $\dot{I}_B$ (рис. 12-18, а). Показания ваттметров складываются алгебраически.

— Круговой заменой A , B и C в выражении (12-6) можно получить выражения для других равноценных вариантов включения двух ваттметров.

Следует иметь в виду, что если стрелка одного ваттметра отклоняется по шкале в обратную сторону, то, изменив направление напряжения или тока, подводимого к данному ваттметру, записывают полученное показание со знаком минус. При симметричном режиме работы трехфазной цепи такое положение имеет место при

$$|\varphi| > 60^\circ,$$

что видно непосредственно из векторной диаграммы (рис. 12-18, б).

При симметричном режиме показания двух ваттметров в схеме рис. 12-18, б будут следующие:

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\varphi - 30^\circ) = UI \cos(\varphi - 30^\circ);$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi + 30^\circ) = UI \cos(\varphi + 30^\circ).$$

Сумма и разность показаний ваттметров соответственно равны:

$$P_1 + P_2 = UI 2 \cos \varphi \cos 30^\circ = \sqrt{3} UI \cos \varphi;$$

$$P_1 - P_2 = UI 2 \sin \varphi \sin 30^\circ = UI \sin \varphi.$$

Следовательно, при симметричном режиме работы трехфазной цепи тангенс угла сдвига фаз может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

12-6. ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Пусть через катушку проходит ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$. На рис. 12-19, а катушка условно изображена в виде витка, причем точка и крестик указывают положительное направление тока. Принятому положительному направлению тока соответствует по правилу буравчика положительное направление вектора магнитной индукции¹ $\vec{B} = B_m \sin(\omega t + \psi)$, указанное стрелкой вдоль оси катушки (B_m — максимальное значение магнитной индукции в центре катушки); когда ток отрицателен, вектор маг-

¹ Предполагается линейная зависимость индукции от тока.

нитной индукции имеет противоположное направление, показанное на рис. 12-19, *а* пунктиром.

Таким образом, магнитное поле изменяется (пульсирует) вдоль оси катушки; такое магнитное поле называется пульсирующим.

Условимся круговым вращающимся магнитным полем называть магнитное поле, ось которого равномерно вращается, причем значение магнитной ин-

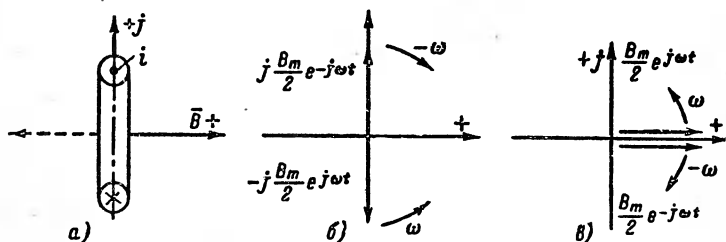


Рис. 12-19. Разложение пульсирующего магнитного поля катушки (*а*) на два вращающихся: при синусоидальном и косинусоидальном токах (в момент $t=0$).

дукции на этой оси неизменно. Легко убедиться в том, что магнитное поле, пульсирующее по закону синуса или косинуса, может рассматриваться как результат наложения двух круговых полей, вращающихся в противоположные стороны с угловой скоростью, равной угловой частоте переменного тока, и имеющих максимальную индукцию на вращающейся оси, вдвое меньшую амплитуды индукции пульсирующего поля (рис. 12-19, *б* и *в*). Это следует из формул

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

и

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Положения векторов на рис. 12-19, *б* и *в* соответствуют моменту $t = 0$.

Допустим теперь, что через две катушки, расположенные взаимно перпендикулярно, проходят токи одной и той же амплитуды и частоты, сдвинутые по фазе друг относительно друга на четверть периода. На рис. 12-20, *а*

катушки обозначены цифрами 1 и 2. Принятым положительным направлениям токов $i_1 = I \sin \omega t$ и $i_2 = I_m \sin (\omega t + \pi/2) = I_m \cos \omega t$ соответствуют взаимно перпендикулярные пульсирующие магнитные потоки с индукциями в точке пересечения осей катушек $B_1 = B_m \sin \omega t$ и $B_2 = B_m \cos \omega t$, направленными по действительной и мнимой осям.

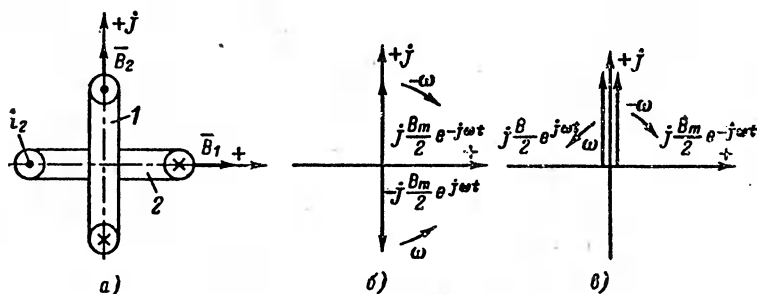


Рис. 12-20. Образование кругового вращающегося магнитного поля из двух пульсирующих.

Заменяв каждое из пульсирующих полей двумя вращающимися (рис. 12-20, б и в), убеждаемся в том, что векторы магнитной индукции $-j \frac{B_m}{2} e^{j\omega t}$ (рис. 12-20, б) и $j \frac{B_m}{2} e^{j\omega t}$ (рис. 12-20, в), вращающиеся в положительном направлении, взаимно компенсируются (их сумма равна нулю). Два других вектора образуют в сумме вектор магнитной индукции $jB_m e^{-j\omega t}$, вращающийся в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

К тому же выводу приходим и на основании выражения, получаемого для результирующего вектора магнитной индукции,

$$\bar{B} = B_1 + jB_2 = B_m (\sin \omega t + j \cos \omega t) = jB_m e^{-j\omega t}.$$

Это выражение показывает, что ось результирующего магнитного поля равномерно вращается с угловой скоростью ω , причем значение индукции на оси неизменно равно B_m , т. е. получается круговое вращающееся магнитное поле.

Направление вращения магнитного поля зависит от положительных направлений магнитных индукций и от того, какая из индукций является отстающей. В рассматриваемом здесь случае индукция B_1 отстает по фазе на $\pi/2$ от индукции B_2 и магнитное поле вращается в отрицательном направлении. Если изменить направление тока в одной из катушек, например в катушке 1, что равносильно изменению фазы тока i_1 на π , магнитное поле будет вращаться в положительном направлении. В этом можно убедиться, повернув векторную диаграмму рис. 12-20, б на 180° или воспользовавшись выражением

$$\bar{B} = B_m(-\sin \omega t + j \cos \omega t) = jB_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом, от сложения двух взаимно перпендикулярных пульсирующих магнитных полей, сдвинутых по фазе на четверть периода, получается круговое магнитное поле, вращающееся с угловой скоростью в сторону отстающего по фазе вектора индукции.

Описанный способ получения кругового вращающегося магнитного поля с помощью двухфазной системы токов широко используется в приборо- и электромашиностроении.

Большое удобство с точки зрения возможности получения кругового вращающегося поля представляет трехфазный ток.

Расположим три одинаковые катушки таким образом, чтобы их оси были сдвинуты друг относительно друга в пространстве на угол 120° (рис. 12-21), и подключим эти катушки к симметричной трехфазной цепи. Тогда через катушки будут протекать токи:

$$i_A = I_m \sin \omega t;$$

$$i_B = I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_C = I_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Положительным направлениям токов, обозначенным на рис. 12-21 с помощью точек и крестиков, соответству-

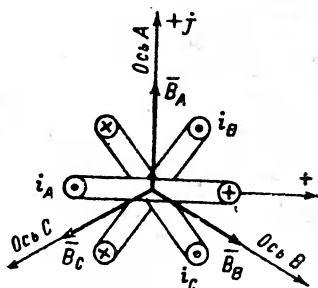


Рис. 12-21. Получение вращающегося магнитного поля при помощи трехфазной системы токов.

ют по правилу буравчика указанные стрелками положительные направления магнитных потоков (векторов индукций), создаваемых токами i_A , i_B и i_C .

При пропорциональной зависимости индукций от токов мгновенные значения индукций фаз выразятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} B_A &= B_m \sin \omega t; \\ B_B &= B_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \\ B_C &= B_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (12-7)$$

где B_m — амплитуда индукции на оси каждой из катушек.

При выбранном на рис. 12-21 направлении осей $+i$ и $+j$ результирующий вектор индукции находится сложением векторов $\bar{B}_A$, $\bar{B}_B$ и $\bar{B}_C$:

$$\bar{B} = j(B_A + a^2 B_B + a B_C). \quad (12-8)$$

Подстановка (12-7) в (12-8) дает:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= j B_m (\sin \omega t + a^2 \sin \omega t \cos 120^\circ - a^2 \cos \omega t \sin 120^\circ + \\ &\quad + a \sin \omega t \cos 120^\circ + a \cos \omega t \sin 120^\circ) = \\ &= j 1,5 B_m \sin (\omega t + j \cos \omega t), \end{aligned}$$

или

$$\bar{B} = -1,5 B_m e^{-j\omega t}.$$

Полученное выражение показывает, что результирующий вектор магнитного поля имеет постоянный модуль, равный $1,5 B_m$, и равномерно вращается с угловой скоростью ω от оси фазы A по направлению к оси фазы B и т. д. (на рис. 12-21 — по ходу часовой стрелки), т. е. получается круговое вращающееся поле.

Для изменения направления вращения поля достаточно поменять местами токи в каких-нибудь двух катушках, например i_B и i_C .

При несимметрии токов в катушках, например если концы одной катушки поменять местами, или при несимметрии питающих напряжений вместо кругового вращающегося поля получится эллиптическое вращающееся поле, результирующий вектор индукции которого описывает эллипс и имеет переменную угловую скорость.

В электрических машинах вращающееся магнитное поле осуществляется с помощью обмоток, размещаемых в пазах неподвижной части машины — статора (см. гл. 2).

Линии магнитной индукции замыкаются по телу статора, воздушному зазору и телу ротора. Место выхода линий индукции из статора можно рассматривать как северный полюс, а место входа их в статор — как южный полюс магнитного поля обмотки статора.

Кривая распределения индукции B вдоль воздушного зазора имеет ступенчатую форму, которая при большом числе пазов статора близка к трапеции с углом наклона боковой стороны 60° , и может быть приближенно заменена синусоидой.

Синусоидальный ток частоты f , проходя через фазную обмотку статора, создает поле, пульсирующее с той же частотой. Таким образом, магнитное поле одной фазы изменяется синусоидально как во времени, так и в пространстве (по окружности зазора).

Обмотки трех фаз расположены на статоре так, что их оси, а следовательно, и оси трех пульсирующих магнитных полей сдвинуты в пространстве на 120° . Поэтому при прохождении через обмотку трехфазного тока пульсирующие поля образуют в сумме двухполюсное вращающееся в зазоре синусоидальное поле, амплитуда индукции которого постоянна и равна $\frac{3}{2}$ амплитуды слагающих фазных полей.

За один период переменного тока такое магнитное поле совершит один оборот, а за 1 мин $60f$ оборотов.

Если обмотку статора выполнить многополюсной, т. е. с полюсным шагом $180^\circ/p$, то три пульсирующих поля будут сдвинуты в пространстве на $120^\circ/p$ и в результате получится $2p$ -полюсное вращающееся поле, имеющее скорость вращения, равную $60f/p$ об/мин.

12-7. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ АСИНХРОННОГО И СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЕЙ

Простейшим по устройству и наиболее распространенным в промышленности типом двигателя переменного тока является трехфазный асинхронный двигатель, изобретенный в 1888 г. М. О. Доливо-Добровольским. Его ротор выполняется в виде стального цилиндра, собранного из стальных листов, с обмоткой, размещенной

в пазах по его поверхности. Вращающее магнитное поле, созданное обмотками статора, наводит в замкнутой обмотке ротора токи. Механическое взаимодействие этих токов с вращающимся полем приводит ротор во вращение в том же направлении, в котором вращается поле.

Ротор вращается асинхронно, т. е. скорость вращения его (n об/мин) меньше скорости вращения магнитного поля (n_1 об/мин).

Разность скоростей вращения поля и ротора, отнесенная к скорости поля, называется скольжением:

$$S = \frac{n_1 - n}{n_1}.$$

Скольжение не может быть равно нулю, так как при одинаковых скоростях поля и ротора прекратилось бы наведение токов в роторе и, следовательно, отсутствовал бы вращающий момент.

В рабочем режиме асинхронный двигатель находится в динамическом равновесии, когда создаваемый благодаря скольжению вращающий момент уравнивает тормозящий момент нагрузки на его валу. С увеличением механической нагрузки тормозящий момент становится больше вращающего и скольжение увеличивается. Вследствие этого возрастают индуктированные в обмотке ротора э. д. с. и токи, что вызывает увеличение вращающего момента до нового состояния динамического равновесия (при большем скольжении).

Однако вращающий момент может расти с увеличением скольжения только до определенного предела, так называемого критического значения при критическом скольжении, после чего он падает, а двигатель затормаживается.

При нормальной нагрузке скольжение асинхронных двигателей в среднем составляет 2—4%.

Трехфазный генератор (см. рис. 12-3), как и многие другие типы электрических машин, обладает свойством обратимости: он может работать как синхронный двигатель. Поэтому конструктивно синхронный двигатель мало отличается от генератора.

Если присоединить обмотку статора к источнику (сети) трехфазного тока, а обмотку ротора (обмотку возбуждения) — к источнику постоянного тока, то вращающееся магнитное поле статора будет периодически создавать на валу моменты разных знаков. Поэтому ротор

не сможет прийти во вращение — он будет вибрировать.

Для пуска двигателя необходимо сначала (при разомкнутой обмотке возбуждения) привести ротор во вращение до скорости, близкой к синхронной. Если после этого включить обмотку возбуждения, то двигатель «втянется в синхронизм». Ротор будет вращаться синхронно с полем статора.

Для пуска синхронного двигателя может быть использована специальная пусковая обмотка ротора, действующая так же, как в асинхронном двигателе.

При строго синхронном вращении ротора имеется угловой сдвиг между осями полей статора и ротора, зависящий от нагрузки (от момента сопротивления на валу). С увеличением нагрузки этот угол увеличивается, благодаря чему момент вращения также увеличивается. Максимальный вращающий момент получается при угле между э. д. с. двигателя и напряжением сети $\sim 90^\circ$, после чего дальнейшее увеличение нагрузки приводит к остановке двигателя и «выпадению» его из синхронизма.

Если изменять постоянный ток в цепи возбуждения ротора, то можно в широких пределах регулировать $\cos \varphi$ двигателя. Так, при «недовозбуждении» двигателя угол φ положителен, т. е. ток отстает от напряжения, а при «перевозбуждении» угол φ отрицателен — ток опережает напряжение. Это свойство синхронных двигателей весьма ценно и широко используется в промышленности для повышения $\cos \varphi$ электроустановок.

Синхронные двигатели выполняются обычно для номинальных режимов работы при $\cos \varphi = 1$ и $\cos \varphi = 0,8$ (опережающем).

Более подробное изучение конструкций, электрических процессов и режимов работы асинхронных и синхронных двигателей относится к курсу электрических машин.

12-8. МЕТОД СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Метод расчета несимметричных режимов трехфазных цепей, описанный в § 12-4, относился к частным случаям таких режимов, когда не было взаимной индукции между фазами или она могла быть учтена в эквивалентном сопротивлении на фазу (при отсутствии нейтрального провода (см., например, [Л. 14]), не было вращающихся машин с несимметричным ротором, отсутствовали токи

в земле с неизбежным индуктивным влиянием на фазные обмотки или провода.

Для расчета несимметричных режимов трехфазных электрических цепей в общем случае применяется метод симметричных составляющих, основанный на представлении любой трехфазной несимметричной системы электрических или магнитных величин (токов, напряжений, магнитных потоков) в виде суммы трех симметричных систем. Эти симметричные системы вели-

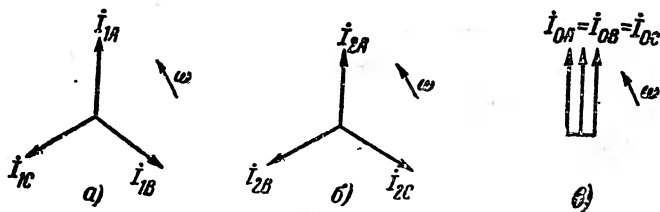


Рис. 12-22. Симметричные составляющие токов прямой (а), обратной (б) и нулевой (в) последовательностей.

чин, образующих в совокупности несимметричную систему, носят название симметричных составляющих прямой, обратной и нулевой последовательностей. При этом под последовательностью подразумевается порядок следования во времени максимумов фазных величин.

На рис. 12-22 в виде примера показаны симметричные составляющие токов всех трех последовательностей. Как видно из рисунка, симметричные составляющие обозначаются цифрами 1, 2, 0.

Система прямой последовательности образует симметричную трехлучевую звезду $\dot{I}_{1A}$, $\dot{I}_{1B}$, $\dot{I}_{1C}$ с порядком следования фаз A, B, C.

Система обратной последовательности образует трехлучевую звезду $\dot{I}_{2A}$, $\dot{I}_{2B}$, $\dot{I}_{2C}$ с порядком следования фаз A, C, B.

Система нулевой последовательности состоит из трех равных векторов: $\dot{I}_{0A} = \dot{I}_{0B} = \dot{I}_{0C}$.

Векторами, показанными на рис. 12-22, могут изображаться как комплексные амплитуды, так и комплексные действующие значения токов трех последовательностей.

Мгновенные (синусоидальные) значения симметричных составляющих мыслятся в виде проекций на мнимую ось комплексных амплитуд, вращающихся с угловой скоростью ω в положительную сторону. Следует обратить внимание на то, что направление вращения у всех трех систем векторов одно и то же.

Взаимное расположение и величины векторов прямой, обратной и нулевой последовательностей зависят от характера несимметрии и электрических параметров трехфазной цепи.

На основании рис. 12-22:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{1B} &= a^2 \dot{I}_{1A}; \dot{I}_{1C} = a \dot{I}_{1A}; \\ \dot{I}_{2B} &= a \dot{I}_{2A}; \dot{I}_{2C} = a^2 \dot{I}_{2A}. \end{aligned} \right\} \quad (12-9)$$

Токи в фазах A , B и C определяются как суммы соответствующих симметричных составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{1A} + \dot{I}_{2A} + \dot{I}_{0A}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{1B} + \dot{I}_{2B} + \dot{I}_{0B}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{1C} + \dot{I}_{2C} + \dot{I}_{0C}. \end{aligned} \right\} \quad (12-10)$$

В дальнейшем ради упрощения записи индекс A при симметричных составляющих фазы A опущен, т. е.

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1A}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2A}; \quad \dot{I}_0 = \dot{I}_{0A}. \quad (12-11)$$

С учетом (12-9) и (12-11) выражения (12-10) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_C &= a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0. \end{aligned} \right\} \quad (12-12)$$

Эти формулы служат для нахождения фазных токов по их симметричным составляющим.

Если известны фазные токи, то симметричные составляющие служат решением системы уравнений (12-12). Умножив вторую строку на a и третью строку на a^2 и сложив уравнения (12-12), получим (с учетом того, что $1 + a + a^2 = 0$):

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3} (\dot{I}_A + a \dot{I}_B + a^2 \dot{I}_C). \quad (12-13)$$

Аналогичным образом, умножив вторую строку на a^2 и третью строку на a и сложив уравнения (12-12), найдем:

$$I_2 = \frac{1}{3} (I_A + a^2 I_B + a I_C). \quad (12-14)$$

Наконец, сложив уравнения (12-12), получим:

$$I_0 = \frac{1}{3} (I_A + I_B + I_C). \quad (12-15)$$

Выражения (12-12) — (12-15) являются общими; они применимы также для напряжений, магнитных потоков и других величин.

12-9. ПОПЕРЕЧНАЯ НЕСИММЕТРИЯ

Поперечная несимметрия в одной точке трехфазной цепи возникает в том случае, когда к фазам присоединяются неравные сопротивления, как это, например, показано на рис. 12-23, *а*. Такое включение мо-

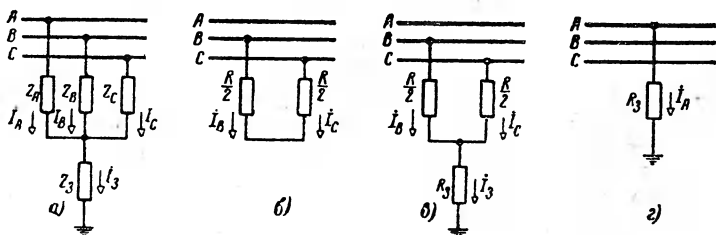


Рис. 12-23. Случаи поперечной несимметрии.

а — общий случай; *б* — двухфазное замыкание; *в* — двухфазное замыкание на землю (или на корпус); *г* — однофазное замыкание.

жет иметь место при несимметричном коротком замыкании или несимметричной нагрузке.

Любые два сопротивления из числа включенных в звезду, а также сопротивление Z_3 могут быть равны нулю или бесконечности. Таким образом, различные виды несимметрии или короткого замыкания, изображенные, например, на рис. 12-23, *б*, *в* и *г*, получаются как частные случаи из общего случая, представленного на рис. 12-23, *а*.

В случае короткого замыкания сопротивления в месте замыкания складываются из сопротивлений электриче-

ских дуг и заземлений. Эти сопротивления, как показали экспериментальные исследования, являются активными. Поэтому сопротивления для упомянутых выше частных случаев приняты активными, а именно:

1) при двухфазном замыкании между фазами B и C (рис. 12-23, б)

$$Z_B \cong Z_C = \frac{R}{2}; \quad Z_A = Z_3 = \infty;$$

2) при двухфазном замыкании на землю (или корпус самолета) (рис. 12-23, в)

$$Z_B = Z_C = \frac{R}{2}; \quad Z_3 = R_3; \quad Z_A = \infty;$$

3) при однофазном замыкании на землю (корпус) (рис. 12-23, г)

$$Z_A = 0; \quad Z_3 = R_3; \quad Z_B = Z_C = \infty.$$

Поперечная несимметрия в общем случае (рис. 12-23, а) характеризуется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= Z_A \dot{I}_A + 3Z_3 \dot{I}_0; \\ \dot{U}_B &= Z_B \dot{I}_B + 3Z_3 \dot{I}_0; \\ \dot{U}_C &= Z_C \dot{I}_C + 3Z_3 \dot{I}_0; \end{aligned} \right\} \quad (12-16)$$

здесь $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ — фазные напряжения в месте несимметрии относительно земли.

Входящие в (12-16) фазные напряжения и токи могут быть с учетом формул (12-12) заменены симметричными составляющими. При этом получаются три уравнения, связывающие симметричные составляющие в месте поперечной несимметрии (так называемые граничные условия).

Дополнительные три уравнения, необходимые для вычисления шести неизвестных (симметричных составляющих напряжений и токов в месте несимметрии), даются соотношениями между напряжениями и токами одноименных последовательностей для фазы A :

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_1 &= \dot{E}_A; \\ Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2 &= 0; \\ Z_0 \dot{I}_0 + \dot{U}_0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12-17)$$

здесь Z_1 , Z_2 и Z_0 — результирующие фазные сопротивления всей цепи (без сопротивлений в месте несимметрии) для токов прямой, обратной и нулевой последовательностей; E_A — э. д. с. фазы A эквивалентного генератора.

Формулы (12-17) выражают второй закон Кирхгофа для каждой последовательности в отдельности. Поскольку э. д. с. генератора трехфазного тока образует симметричную звезду с прямым чередованием фаз, в уравнениях (12-17) э. д. с. генератора входит только в уравнение для составляющих прямой последовательности; в остальных двух уравнениях, связывающих составляющие напряжений и токов обратной и нулевой последовательностей, э. д. с. генератора отсутствует.

Сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей для электрических машин (генераторов, электрических двигателей, трансформаторов) берутся по заводским данным.

Равенство $Z_1 = Z_2$ имеет место только для статических не вращающихся устройств — трансформаторов, линий и т. п.

Для вращающихся электрических машин обычно $z_2 < z_1$. Разница в сопротивлениях прямой и обратной последовательностей электрических машин обусловлена различными направлениями вращения магнитных полей, образуемых токами прямой и обратной последовательностей: направление вращения магнитного поля, созданного токами прямой последовательности, совпадает с направлением вращения ротора, магнитное же поле, образованное токами обратной последовательности, вращается в противоположную сторону. Более подробно этот вопрос рассматривается в литературе по электрическим машинам и токам короткого замыкания в трехфазных системах.

Сопротивления прямой и нулевой последовательностей трехфазной линии (кабельной или воздушной) находятся расчетным или опытным путем, причем сопротивления прямой и обратной последовательностей для линий одинаковы, а сопротивление нулевой последовательности может в 2—3 раза превышать сопротивление прямой последовательности. Объясняется это различием величин э. д. с. взаимной индукции, наводимых в фазе токами прямой и нулевой последовательностей, протекающими по двум другим фазам, а также сопротивлением

земли или обшивки транспортного средства, по которому проложена сеть.

Методика определения симметричных составляющих токов и напряжений и построения соответствующих векторных диаграмм иллюстрирована ниже на примере частных случаев поперечной несимметрии.

1. *Двухфазное короткое замыкание* (рис. 12-23, б). Граничные условия удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{I}_A = 0; \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_C; \quad (12-18)$$

$$\dot{U}_B - \dot{U}_C = \frac{R}{2} (\dot{I}_B - \dot{I}_C). \quad (12-19)$$

Подстановка (12-18) в (12-13) и (12-14) дает:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3} (a - a^2) \dot{I}_B; \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{3} (a^2 - a) \dot{I}_B,$$

откуда

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2. \quad (12-20)$$

Подстановка (12-18) в (12-15) дает:

$$\dot{I}_0 = 0.$$

Кроме того, на основании (12-19)

$$\begin{aligned} (a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2) - (a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2) &= (a^2 - a) (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \\ &= (a^2 - a) \frac{R}{2} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \end{aligned}$$

или

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \frac{R}{2} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2). \quad (12-21)$$

Уравнения (12-20) и (12-21) вместе с дополнительными первыми двумя уравнениями (12-17) достаточны для нахождения четырех неизвестных: $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$. В результате совместного решения этих уравнений получается:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_A}{Z_1 + Z_2 + R}. \quad (12-22)$$

На рис. 12-24 представлены векторные диаграммы токов и напряжений в месте двухфазного короткого замыкания при $R = 0$ (металлическое короткое замыкание). В этом случае в соответствии с (12-21) $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$.

Векторные диаграммы построены в предположении, что вектор э. д. с. $\vec{E}_A$ направлен вертикально вверх, причем углы комплексных сопротивлений прямой и обратной последовательностей одинаковы (например, 60°). Поэтому $\vec{U}_{1A}$ совпадает по фазе с $\vec{E}_A$ и ток $\vec{I}_{1A}$ отстает от $\vec{U}_{1A}$ на заданный угол.

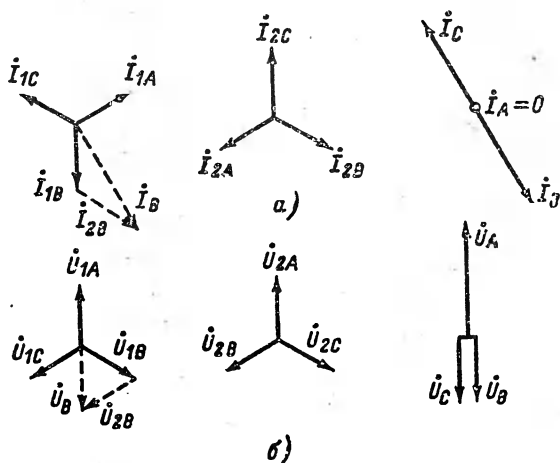


Рис. 12-24. Векторные диаграммы в месте двухфазного короткого замыкания.
а — токи; б — напряжения.

Сумма токов $\vec{I}_{1A}$ и $\vec{I}_{2A}$ в месте двухфазного короткого замыкания равна нулю, поэтому $\vec{I}_A = 0$. Токи $\vec{I}_{1B}$ и $\vec{I}_{2B}$ дают в сумме фазный ток $\vec{I}_B$ в месте короткого замыкания, а токи $\vec{I}_{1C}$ и $\vec{I}_{2C}$ дают в сумме фазный ток $\vec{I}_C$.

Токи $\vec{I}_B$ и $\vec{I}_C$ находятся в противофазе.

Поскольку при построении векторных диаграмм сопротивление R в месте короткого замыкания принято равным нулю, фазные напряжения $\vec{U}_B$ и $\vec{U}_C$ в месте повреждения равны друг другу и соответственно линейное напряжение $\vec{U}_{BC}$ равно нулю. По мере удаления от места короткого замыкания в сторону генератора линейное напряжение между фазами B и C возрастает.

2. Однофазное короткое замыкание (см. рис. 12-23, г).

Граничные условия удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0; \dot{U}_A = R_3 \dot{I}_A.$$

Замена фазных величин их симметричными составляющими дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0; \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 3R_3 \dot{I}_0. \end{aligned} \right\} \quad (12-23)$$

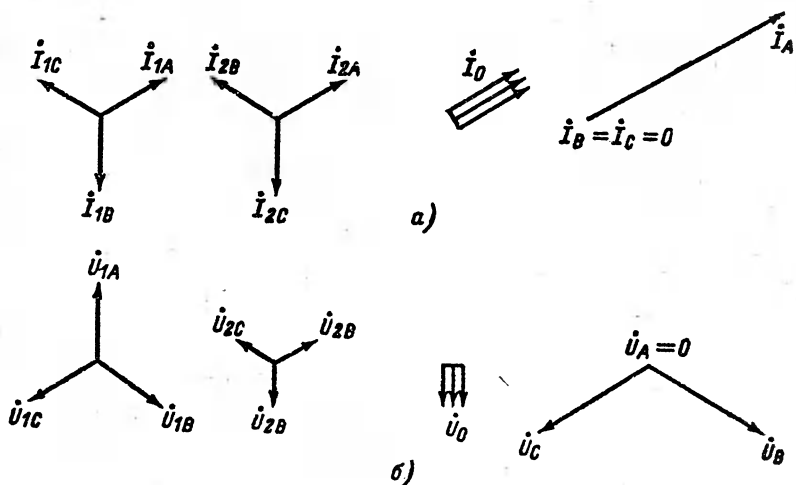


Рис. 12-25. Векторные диаграммы в месте однофазного короткого замыкания.

a — токи; *б* — напряжения.

В результате совместного решения уравнений (12-17) и (12-23) получается:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_A}{Z_1 + Z_2 + Z_0 + 3R_3}. \quad (12-24)$$

Векторные диаграммы токов и напряжений при $R_3 = 0$ представлены на рис. 12-25.

12-10. ПРОДОЛЬНАЯ НЕСИММЕТРИЯ

Продольная несимметрия в одной точке трехфазной цепи возникает в том случае, когда в рассечку фаз включаются неравные сопротивления, как это, например, показано на рис. 12-26, *a*.

Любые два сопротивления могут быть при этом равны нулю или бесконечности.

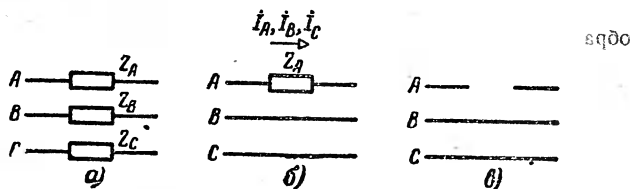
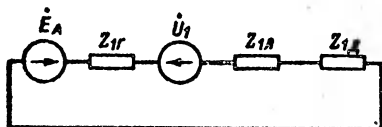


Рис. 12-26. Случаи продольной несимметрии.

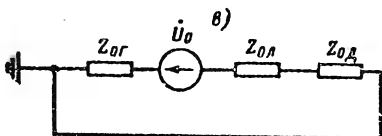
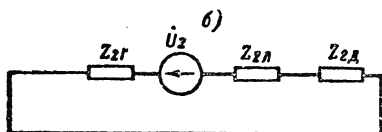
a — общий случай; *б* — сопротивление в одной фазе; *в* — замыкание одной фазы.

Продольная несимметрия характеризуется в данном случае уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= Z_A \dot{i}_A; \\ \dot{U}_B &= Z_B \dot{i}_B; \\ \dot{U}_C &= Z_C \dot{i}_C; \end{aligned} \right\} \quad (12-25)$$



здесь $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ — напряжения на зажимах сопротивлений Z_A , Z_B и Z_C (продольные напряжения).



В результате замены напряжений и токов, входящих в (12-25), симметричными составляющими получаются три уравнения (граничные условия), связывающие симметричные составляющие в месте продольной несимметрии.

В частном случае, изображенном на рис. 12,26, б, $Z_B = Z_C = 0$ и соответственно $\dot{U}_B = \dot{U}_C = 0$.

Симметричные составляющие продольных напряжений

Рис. 12-27. Пример 12-3.

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0 &= \frac{1}{3} \dot{U}_A = \frac{1}{3} Z_A \dot{i}_A = \\ &= \frac{1}{3} Z_A (\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_0). \end{aligned} \quad (12-26)$$

Пример 12-3. К трехфазному генератору присоединена линия с асинхронным двигателем на конце (рис. 12-27, а). Нейтральные точки

генератора и двигателя заземлены. Произошел обрыв фазы A вблизи зажимов генератора. Требуется определить токи в фазах B и C и напряжения в месте обрыва.

Обозначим: $Z_{1г}, Z_{2г}, Z_{0г}$ — комплексные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей генератора; $Z_{1л}, Z_{2л}, Z_{0л}$ — то же для линии; $Z_{1д}, Z_{2д}, Z_{0д}$ — то же для асинхронного двигателя; E_A — э. д. с. фазы A генератора.

Для сокращения записи обозначим:

$$Z_1 = Z_{1г} + Z_{1л} + Z_{1д};$$

$$Z_2 = Z_{2г} + Z_{2л} + Z_{2д};$$

$$Z_0 = Z_{0г} + Z_{0л} + Z_{0д}.$$

На основании схем замещения для отдельных последовательностей (рис. 12-27, б, в и г) можно написать основные уравнения (12-17):

$$\dot{E}_A - \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1; \quad -\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2; \quad -\dot{U}_0 = Z_0 \dot{I}_0.$$

Для данного случая добавочные уравнения согласно (12-26) при $Z_A = \infty$ будут:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0 \text{ и } \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0.$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0 = \frac{\dot{E}_A Z_2 Z_0}{N};$$

$$\dot{I}_0 = -\frac{\dot{E}_A Z_2}{N}; \quad \dot{I}_2 = -\frac{\dot{E}_A Z_0}{N}; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_A (Z_2 + Z_0)}{N},$$

где

$$N = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_0 + Z_2 Z_0.$$

Полные токи и напряжения могут быть легко найдены суммированием отдельных составляющих.

12-11. ФИЛЬТРЫ СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Фильтрами симметричных составляющих называются устройства, служащие для выделения соответствующих составляющих напряжений или токов трехфазной цепи. Фильтры имеют входные и выходные зажимы. К входным зажимам фильтра подводятся напряжения или токи трехфазной электрической цепи; на выходных зажимах фильтра получается напряжение или ток, пропорциональные соответствующим симметричным составляющим электрических величин, подводимых к входным зажимам.

Напряжения и токи, выделяемые фильтрами симметричных составляющих, используются на практике для цепей автоматики, защиты от несимметричных режимов или сигнализации. С этой целью к выходным зажимам фильтров симметричных составляющих присоединяются соответствующие аппараты, приборы, реле и т. п.

Наиболее простой тип фильтра симметричных составляющих представляет собой фильтр токов нулевой последова-

тельности, в котором суммируются токи трех фаз (рис. 12-28, а) или создаваемые ими магнитные потоки (рис. 12-28, б). В первом случае реагирующий прибор включается в нейтральный провод трех трансформаторов тока¹, а во втором случае — между зажимами обмотки, насаженной на магнитный сердечник, охватывающий три фазы.

Фильтр напряжений нулевой последовательности выполняется с помощью трех однофазных трансформаторов напряжения, первичная

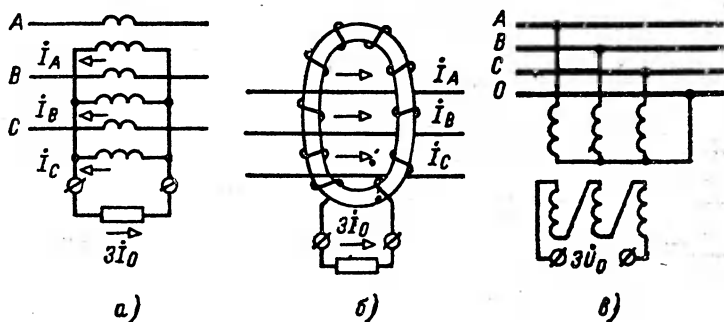


Рис. 12-28. Фильтры составляющих нулевой последовательности.

а и б — фильтры токов; в — фильтр напряжений.

обмотка которых соединяется звездой с выведенной нейтральной точкой, а вторичная обмотка соединяется разомкнутым треугольником (рис. 12-28, в).

Благодаря такому соединению составляющие напряжений прямой последовательности взаимно компенсируются: $\dot{U}_{1A} + \dot{U}_{1B} + \dot{U}_{1C} = 0$. То же имеет место и в отношении напряжений обратной последовательности: $\dot{U}_{2A} + \dot{U}_{2B} + \dot{U}_{2C} = 0$.

Составляющие же напряжений нулевой последовательности образуют на зажимах разомкнутого треугольника напряжения $3\dot{U}_0$.

Фильтр напряжений нулевой последовательности может быть получен и с помощью трех равных сопротивлений, соединенных звездой и приключенных к трехфазной цепи. При симметричном режиме работы трехфазной цепи напряжение между нейтральной точкой этих сопротивлений и нейтральной точкой цепи равно нулю; при появлении же в трехфазной цепи составляющих напряжений нулевой последовательности между упомянутыми точками возникает напряжение, пропорциональное составляющей нулевой последовательности.

Системы симметричных составляющих прямой и обратной последовательностей различаются порядком следования во времени амплитуд фазных величин, поэтому всякая схема для выделения составляющих обратной последовательности может быть путем перестановки

¹ Вторичные токи трансформаторов тока приблизительно равны первичным, деленным на отношение чисел витков ω_2/ω_1 . На рис. 12-28 вторичные токи и напряжения приведены к первичной обмотке.

любых двух фаз превращена в схему для выделения составляющих прямой последовательности. С этой точки зрения является достаточным рассмотреть фильтры только какой-либо одной из указанных последовательностей, например обратной, распространив затем полученные результаты на фильтры симметричных составляющих другой (прямой) последовательности.

Принцип выполнения фильтров токов и напряжений обратной последовательности иллюстрирован ниже на примере двух схем: схе-

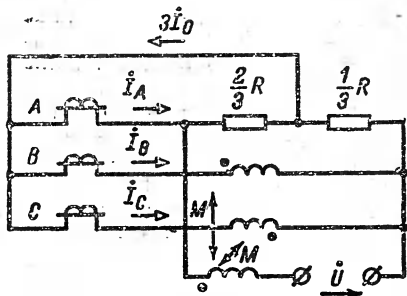


Рис. 12-29. Фильтр токов обратной последовательности.

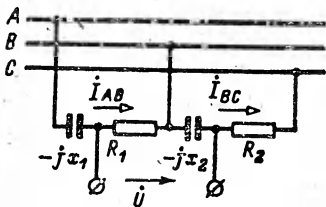


Рис. 12-30. Фильтр напряжений обратной последовательности.

мы фильтра токов трансформаторного типа (рис. 12-29) и схемы четырехэлементного активно-емкостного фильтра напряжений (рис. 12-30).

В фильтрах обоих типов суммируются напряжения, находящиеся в определенных соотношениях с токами или напряжениями, подводимыми к входным зажимам фильтров.

Фильтр токов обратной последовательности, изображенный на рис. 12-29, состоит из активных сопротивлений $\frac{2}{3}R$ и $\frac{1}{3}R$, между которыми проложен нулевой провод трансформаторов тока, и промежуточного трансформатора, токовые обмотки которого в фазах B и C связаны индуктивно с третьей обмоткой в выходной цепи; параметры фильтра удовлетворяют условию $R = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega M$, где ω — угловая частота тока, на которую рассчитан фильтр; M — взаимная индуктивность первичной и вторичной обмоток промежуточного трансформатора.

Благодаря тому, что сердечник промежуточного трансформатора имеет воздушный зазор, обеспечивается линейная зависимость э. д. с. взаимной индукции от токов.

Напишем уравнение второго закона Кирхгофа по выходному контуру:

$$\dot{U} = \frac{2}{3} R \dot{I}_A - \frac{1}{3} R (\dot{I}_B + \dot{I}_C) - j\omega M (\dot{I}_B + \dot{I}_C).$$

С учетом первого закона Кирхгофа

$$-(\dot{I}_B + \dot{I}_C) = \dot{I}_A - 3\dot{I}_0$$

и соотношений между симметричными составляющими

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0$$

$$\dot{I}_B - \dot{I}_C = -j\sqrt{3}(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$$

получим окончательно:

$$\dot{U} = R(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) - \sqrt{3} \omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 2R\dot{I}_2, \quad (12-27)$$

т. е. выходное напряжение пропорционально току обратной последовательности.

Влияние токов нулевой последовательности отсутствует в рассматриваемом фильтре благодаря взаимной компенсации падений напряжения от токов $\dot{I}_0$ и $2\dot{I}_0$ в сопротивлениях $\frac{2}{3}R$ и $\frac{1}{3}R$. Другой возможный способ устранения влияния токов нулевой последовательности заключается в том, что к фильтру токов обратной последовательности вместо фазных токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ подводятся разности фазных токов $\dot{I}_A - \dot{I}_B$, $\dot{I}_B - \dot{I}_C$ и $\dot{I}_C - \dot{I}_A$, в которых составляющие нулевой последовательности отсутствуют.

Аналогичным образом для устранения влияния напряжений нулевой последовательности фильтры напряжений обратной последовательности включаются обычно на линейные напряжения $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$.

На рис. 12-30 показан четырехэлементный фильтр напряжений обратной последовательности, применяемый в релейной защите. Параметры элементов фильтра подбираются из условия

$$R_1 : x_1 = x_2 : R_2 = \sqrt{3}. \quad (12-28)$$

При холостом режиме работы фильтра, т. е. при разомкнутых вторичных зажимах, напряжение на этих зажимах равно сумме

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{U}_{AB} \leq 30^\circ \text{ и } \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{U}_{BC} \leq -30^\circ.$$

Если $\dot{U}_{AB}$ и $\dot{U}_{BC}$ выразить через симметричные составляющие линейных напряжений, то напряжение на выходных зажимах фильтра будет равно:

$$\dot{U} = 1,5 \dot{U}_{2AC}, \quad (12-29)$$

т. е. пропорционально составляющей обратной последовательности. Если на выходе фильтра присоединена нагрузка (реагирующий прибор), то ток или напряжение в выходной цепи могут быть получены на основании теоремы об эквивалентном источнике.

Пример 12-4. К выходным зажимам фильтра токов обратной последовательности, показанного на рис. 12-29, подключена нагрузка

$$Z_H = r_H + j\omega L_H.$$

Определить ток в нагрузке при подведении к входным зажимам фильтра системы несимметричных токов.

Будем исходить из предположения, что к выходным зажимам фильтра подключены источники токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$, так как эти токи не зависят от сопротивлений нагрузки.

Согласно (12-27) напряжение на разомкнутых выходных зажимах фильтра равно $\dot{U} = 2R\dot{I}_2$.

По теореме об эквивалентном источнике ток в нагрузке равен:

$$\dot{I}_H = \frac{\dot{U}}{Z_\Phi + Z_H},$$

где Z_Φ — сопротивление фильтра, измеренное со стороны его выходных зажимов при разомкнутых входных зажимах, так как внутренние сопротивления источников тока равны бесконечности.

Обозначив через $Z = r + j\omega L$ сопротивление вторичной обмотки промежуточного трансформатора, включенной в выходную цепь, получим:

$$\dot{I}_H = \frac{2R\dot{I}_2}{r + r_H + R + j\omega(L + L_H)}.$$

Таким образом, при заданном значении Z_H пропорциональность тока I_H току I_2 сохраняется.

Пример 12-5. К выходным зажимам фильтра напряжений обратной последовательности, показанного на рис. 12-30, подключена нагрузка Z_H . Параметры элементов фильтра, удовлетворяющие соотношению (12-28), выбраны следующим образом:

$$x_1 = \frac{R_1}{\sqrt{3}}; \quad x_2 = R_1; \quad R_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}}.$$

Определить напряжение на нагрузке при подведении к входным зажимам фильтра несимметричных напряжений.

Будем исходить из предположения, что к входным зажимам фильтра подключены источники э. д. с. $\dot{U}_{AB}$ и $\dot{U}_{BC}$. Согласно (12-29) напряжение на разомкнутых выходных зажимах фильтра равно:

$$\dot{U} = 1,5 \dot{U}_{2AC} = 1,5 \sqrt{3} \dot{U}_{2A} < 30^\circ.$$

По теореме об эквивалентном источнике напряжение на нагрузке равно:

$$\dot{U}_H = \frac{Z_H}{Z_\Phi + Z_H} \dot{U},$$

где Z_Φ — сопротивление фильтра, измеренное со стороны его выходных зажимов при замкнутых входных зажимах, так как внутренние сопротивления источников э. д. с. равны нулю.

Следовательно, в соответствии с заданием

$$\begin{aligned} Z_\Phi &= -j \left(\frac{R_1 x_1}{R_1 - jx_1} + \frac{R_2 x_2}{R_2 - jx_2} \right) = \\ &= -j \left(\frac{R_1 \frac{R_1}{\sqrt{3}}}{R_1 - j \frac{R_1}{\sqrt{3}}} + \frac{\frac{R_1}{\sqrt{3}} R_1}{\frac{R_1}{\sqrt{3}} - jR_1} \right) = 0,965 R_1 < -45^\circ; \end{aligned}$$

отсюда

$$\dot{U}_H = \frac{1,5 \sqrt{3} \dot{U}_{2A} \angle 30^\circ Z_H}{0,965 R_1 \angle -45^\circ + Z_H}.$$

При любом заданном значении Z_H сохраняется пропорциональность между $\dot{U}_H$ и $\dot{U}_{2A}$.

12-12. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

12-1. В симметричной трехфазной цепи нагрузка $Z = 10 + j5$ ом (на фазу) соединена звездой; линейные напряжения на нагрузке равны 230 в. Вычислить ток.

Ответ: 11,9 а.

12-2. В симметричной трехфазной цепи нагрузка $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = 10 \angle 30^\circ$ ом соединена треугольником; линейные напряжения на нагрузке равны 100 в. Определить активную и реактивную мощности нагрузки.

Ответ: 2 600 вт; 1 500 вар.

12-3. В симметричной трехфазной цепи нагрузка $Z = 10 - j14$ ом (на фазу) соединена звездой; комплексное сопротивление линии от генератора до нагрузки равно $1 + j2$ (на фазу). Линейные напряжения на зажимах генератора равны 100 в. Вычислить фазное напряжение на нагрузке.

Ответ: 61,2 в.

12-4. Несимметричная трехфазная нагрузка соединена треугольником: $Z_{AB} = 100 \angle 0^\circ$; $Z_{BC} = 100 \angle -90^\circ$; $Z_{CA} = 141 \angle 45^\circ$ ом. Линейные напряжения на нагрузке симметричны и равны 200 в. Вычислить линейные токи и активную мощность нагрузки, приняв $\dot{U}_{AB} = 200 \angle 0^\circ$ в.

Ответ: 2,13 $\angle -40^\circ$; 1,04 $\angle -105^\circ$; 2,73 $\angle 120^\circ$ а; 600 вт.

12-5. Решить ту же задачу при тех же напряжениях, но при обратном чередовании фаз.

Ответ: 3,39 $\angle 6^\circ$; 3,86 $\angle -165^\circ$; 0,735 $\angle 60^\circ$ а; 600 вт.

12-6. Несимметричная трехфазная нагрузка соединена звездой: $Z_A = 100 \angle -90^\circ$; $Z_B = 100 \angle 0^\circ$; $Z_C = 141 \angle 45^\circ$ ом. Линейные напряжения на нагрузке симметричны и равны 200 в. Вычислить линейные токи и активную мощность нагрузки.

Ответ: 1,34 $\angle 32^\circ$; 1,72 $\angle -138^\circ$; 0,463 $\angle 72^\circ$ а; 317,4 вт.

12-7. Несимметричная трехфазная нагрузка соединена треугольником: $Z_{AB} = 8,66 + j5$; $Z_{BC} = 3 + j4$; $Z_{CA} = 5 - j5$ ом; линейные напряжения на нагрузке симметричны и равны 100 в каждое. Определить активную, реактивную и полную мощности нагрузки при прямом и обратном чередовании подведенных напряжений.

Ответ: 3 066 вт; 1 100 вар; 3 260 ва.

12-8. На зажимах несимметричной трехфазной нагрузки, соединенной треугольником, $Z_{AB} = j3$; $Z_{BC} = 3$; $Z_{CA} = -j3$ ом; активная мощность измеряется двумя ваттметрами, включенными по схеме

рис. 12-18. Напряжения на нагрузке симметричны и равны 100 в каждое. Определить показания ваттметров.

Ответ: 2 885; 448 вт.

12-9. Вычислить линейные токи, реактивную и полную мощности в симметричной трехфазной цепи по показаниям двух ваттметров, включенных по схеме рис. 12-18, а; 1 986 и 2 517 вт. Линейное напряжение равно 208 в.

Ответ: 12,8 а; —919 вар; 4 600 ва.

12-10. К трехфазному генератору, соединенному звездой и имеющему фазные э. д. с. 100 в, подключена с помощью четырехпроводной линии несимметричная нагрузка; между фазой А и нейтральным проводом 50 ом; между фазой В и нейтральным проводом —j50 ом; между фазами В и С $40+j20$ ом. Комплексные сопротивления линейных проводов и нейтрального провода одинаковы и равны $1+j2$ ом. Вычислить линейные токи и активную мощность на зажимах генератора, приняв сопротивление его равным нулю.

Ответ: $I_A = 1,92$ а; 388 вт.

12-11. Трехфазный генератор, соединенный звездой, имеет фазные э. д. с. 135, —67,5—j117 и —67,5+j117 в и внутреннее сопротивление $0,1+j1,5$ ом (на фазу). От генератора отходит линия, имеющая сопротивление $0,9+j0,5$ ом; в конце линии несимметричная нагрузка соединена в треугольник: $Z_{AB} = 40+j60$; $Z_{BC} = 100$; $Z_{CA} = 50-j20$ ом.

Вычислить линейные токи.

Ответ: $7,06 \angle -20^\circ 24'$; $2,85 \angle -161^\circ 42'$; $5,15 \angle 139^\circ 24'$ а.

12-12. Пользуясь решением предыдущей задачи, вычислить фазные токи, напряжения и активную мощность нагрузки.

Ответ: $2,97 \angle -28,7^\circ$; $2,33 \angle -92,4^\circ$; $4,15 \angle 165,4^\circ$ а; $214,5 \angle 27,6^\circ$; $232,8 \angle -92,4^\circ$; $224 \angle 143,6^\circ$ в; 1 760 вт.

12-13. В чем заключается преимущество трехфазного тока перед однофазным?

12-14. Как определяется чередование фаз опытным путем?

12-15. В какую сторону вращается магнитное поле, созданное двумя пульсирующими полями, оси которых сдвинуты на угол 90° , а токи в обмотке сдвинуты по фазе на четверть периода?

12-16. Пользуясь правилами правой и левой руки, показать, что короткозамкнутый ротор, выполненный в виде беличьей клетки, приходит во вращение в том же направлении, в котором вращается магнитное поле.

12-17. Как изменить направление вращения поля?

12-18. Определить симметричные составляющие для заданной системы токов:

$\dot{I}_A = 6,6 \angle 120^\circ$; $\dot{I}_B = 6 \angle 0^\circ$; $\dot{I}_C = 5,4 \angle 240^\circ$ а.

Ответ: $\dot{I}_1 = -3 + j5,2$; $\dot{I}_2 = -0,3 + j0,17$; $\dot{I}_0 = j0,35$ а.

12-19. Для чего несимметричная система векторов раскладывается на симметричные составляющие?

12-20. Почему сопротивление нулевой последовательности линии превышает сопротивление прямой последовательности линии (пояснить физическую сторону явления)?

12-21. Показать, что угол фазового сдвига напряжения и тока нулевой (или обратной) последовательности не зависит от сопротивления в месте повреждения.

12-22. Доказать, что мощность трехфазной цепи выражается через мощности прямой, обратной и нулевой последовательностей по формуле

$$\bar{S} = 3(\dot{U}_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_0 \dot{I}_0) = 3(\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_0).$$

12-23. В каких случаях и какой величины возникает напряжение нулевой последовательности в трехфазной цепи с изолированной нейтралью?

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

13-1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА РЯДА ФУРЬЕ

До сих пор изучались линейные электрические цепи однофазного и трехфазного токов, в которых все э. д. с., токи и напряжения изменялись синусоидально с одинаковой частотой.

При разборе принципа генерирования синусоидальной э. д. с. (см. § 2-2) отмечалось, что для получения синусоидальной э. д. с. в обмотке как явнополюсного, так и неявнополюсного генератора стремятся получить синусоидальную форму распределения магнитной индукции в воздушном зазоре между статором и ротором. В действительности, однако, распределение магнитной индукции может отступать от синусоиды, вследствие чего э. д. с., наводимая генератором, может быть не точно синусоидальной. Электронные генераторы, применяемые в технике высоких частот, генерируют токи, которые в зависимости от режима работы электровакуумных и полупроводниковых приборов также могут в большей или меньшей степени отличаться от синусоидальных. По этим причинам, а также если источники синусоидальных э. д. с., присоединенные к цепи, имеют разные частоты, напряжения и токи в цепи оказываются несинусоидальными.

Во многих электротехнических и радиотехнических устройствах несинусоидальный режим работы цепи яв-

ляется нормальным режимом. Особенно характерен такой режим для нелинейных цепей. Даже при синусоидальной э. д. с. форма кривой тока может резко отличаться от синусоиды при наличии в цепи нелинейного элемента¹ (электрической дуги, индуктивной катушки с насыщенным ферромагнитным сердечником, полупроводникового прибора и т. п.).

Настоящая глава посвящена исследованию периодических процессов в линейных электрических цепях, находящихся под воздействием несинусоидальных э. д. с. Электрические и магнитные величины в таких цепях представляют собой периодические несинусоидальные функции.

Явления, происходящие в линейной электрической цепи с периодической несинусоидальной э. д. с., проще всего поддаются исследованию, если эту э. д. с. разложить на сумму постоянной и синусоидальных слагающих (называемых гармониками), затем на основе уже изученных методов расчета линейных электрических цепей определить токи и напряжения, вызванные каждой слагающей э. д. с. в отдельности, и, наконец, просуммировать соответствующие величины. Полученные таким образом токи и напряжения будут представлять собой периодические несинусоидальные функции времени, причем их период будет равен периоду заданной несинусоидальной э. д. с.

Кроме вычисления токов и напряжений в электрической цепи по заданной несинусоидальной э. д. с. источника (или заданному току источника тока), на практике может возникнуть необходимость выявления гармонического состава или степени отклонения от синусоиды той или иной периодической функции времени, полученной, например, экспериментально в результате осциллографирования.

На рис. 13-1 в виде примера показана периодическая несинусоидальная функция времени с периодом T :

$$f(t) = f(t + T).$$

Вид разложения такой функции зависит от выбора начала отсчета (см. § 13-3).

В пределах интервала времени T функция $f(t)$ может быть либо непрерывной, либо иметь точки разрыва не-

¹ Несинусоидальные процессы в нелинейных цепях рассматриваются во второй части курса.

прерывности. Будем считать, что все эти точки разрыва непрерывности обладают следующим свойством: если функция $f(t)$ претерпевает разрыв непрерывности в точке $t = t_1$ (рис. 13-1), то существуют конечные пределы функции $f(t)$ при приближении к точке разрыва как справа (т. е. от значений $t > t_1$), так и слева (т. е. от значений $t < t_1$). Эти пределы условно обозначаются $f(t_1 + 0)$ и $f(t_1 - 0)$ или, что то же, $f(t_1 +)$ и $f(t_1 -)$. Как извест-

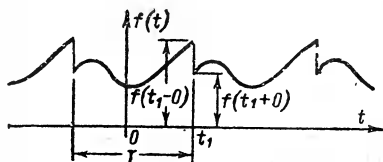


Рис. 13-1. Периодическая несинусоидальная функция времени.

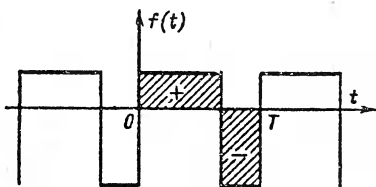


Рис. 13-2. Несинусоидальная функция, среднее значение которой за период равно нулю.

но, такие точки разрыва непрерывности называются точками разрыва первого рода.

Будем также считать, что в пределах интервала времени T число разрывов первого рода, а также число максимумов и минимумов функции $f(t)$ конечны.

Таким образом, будем рассматривать функции, удовлетворяющие условиям Дирихле; следует заметить, что э. д. с., токи и напряжения в реальных электрических цепях удовлетворяют этим условиям.

Известно, что периодическая несинусоидальная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде бесконечно гармонического ряда — ряда Фурье. Сумма этого ряда совпадает со значениями $f(t)$ для всех точек непрерывности этой функции, а в точках разрыва дает среднее арифметическое левого и правого предельных значений $f(t)$, т. е.

$$\frac{1}{2} [f(t -) + f(t +)].$$

Обозначим $\omega = 2\pi/T$ и будем называть ω основной угловой частотой. Синусоидальная и косинусоидальная слагающие с угловой частотой ω образуют основную гармонику. Слагающие с более высокими угловыми частотами представляют собой высшие гармоники.

Гармонический ряд в тригонометрической форме имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (13-1)$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt; \quad (13-2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t dt; \quad (13-3)$$

здесь $a_0/2$ — постоянная слагающая; a_n и b_n — амплитуды косинусоидальных и синусоидальных членов ряда.

Постоянная слагающая $a_0/2$, определяемая на основании (13-2) при $n=0$, представляет собой среднее значение функции $f(t)$ за период. Она равна нулю, когда площади положительных и отрицательных значений $f(t)$ одинаковы (рис. 13-2).

Коэффициенты ряда Фурье a_n и b_n не зависят от t_0 ; поэтому значение t_0 может быть выбрано произвольно. В этом легко убедиться, если учесть, что подынтегральные функции в (13-2) и (13-3) имеют период T . Обозначив подынтегральную функцию через $g(t)$, получим:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = \int_{t_0}^0 g(t) dt + \int_0^T g(t) dt + \int_T^{t_0+T} g(t) dt.$$

Так как $g(t) = g(t-T)$, то

$$\int_T^{t_0+T} g(t) dt = \int_T^{t_0+T} g(t-T) dt.$$

Заменой переменной $x=t-T$ находим:

$$\int_T^{t_0+T} g(t) dt = \int_0^{t_0} g(x) dx = \int_0^{t_0} g(t) dt.$$

Следовательно,

$$\int_T^{t_0+T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt.$$

Полученный результат можно еще объяснить так: площади, выражаемые интегралами $\int_{t_0}^{t_0+T}$ и $\int_0^T$, равны, так как в силу периодичности подынтегральной функции любое изменение t_0 не меняет величины площади, ограниченной данной функцией и осью абсцисс за период.

Положив $t_0=0$ и введя новую переменную $\alpha=\omega t$, найдем (с учетом того, что $\omega T=2\pi$ и $d\alpha=\omega dt$):

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \quad (13-4)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha; \quad (13-5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha. \quad (13-6)$$

Если принять $t_0 = -\frac{T}{2}$, то пределы интегрирования будут равны соответственно $-\pi$ и $+\pi$.

Сумма косинусов и синусов, выражаемая формулой (13-1) или (13-4), может быть представлена в виде суммы только одних синусов с соответствующими начальными фазами.

Так, если принять

$$a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha = F_n \sin(n\alpha + \theta_n), \quad (13-7)$$

где

$$F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \theta_n = \arctg \frac{a_n}{b_n},$$

то ряд получит вид ¹:

¹ Иногда периодическую функцию представляют в виде следующего ряда:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\alpha - \psi_n), \quad \text{где } \psi_n = \frac{\pi}{2} - \theta_n,$$

что следует из равенства

$$\cos(n\alpha - \psi_n) = \sin\left(n\alpha - \psi_n + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\alpha + \theta_n). \quad (13-8)$$

и т. д.

Напомним, что угол θ_n находится с учетом знаков a_n и b_n , определяющих знаки синуса и косинуса.

Форма (13-8) удобна в том случае, когда требуется знать процентное содержание каждой гармоники; она обычно применяется для расчета несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях (см. § 13-5).

Хотя теоретически ряд Фурье содержит бесконечное число слагаемых, однако он обычно быстро сходится. Сходящийся ряд может выражать заданную функцию с любой требуемой степенью точности; если он сходится быстро, то практически достаточно взять небольшое число гармоник для получения требуемой степени точности.

Встречающиеся на практике периодические несинусоидальные функции могут быть разбиты на две группы. Первая группа включает в себя кривые геометрически правильной формы. Вторая группа включает в себя кривые более сложной формы; разложение их в ряд Фурье производится графо-аналитически.

Графо-аналитический метод разложения в ряд Фурье представляет приближенный метод численного интегрирования, при котором вычисление определенного интеграла заменяется нахождением суммы конечного числа слагаемых. С этой целью период функции $f(\alpha)$, равный 2π , разбивается на m равных интервалов $\Delta\alpha$ так, что $m\Delta\alpha = 2\pi$.

Расстояние от начала координат до середины k -го интервала составляет угол $\alpha = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{m}$, рад.

Пусть $f_k(\alpha)$ есть значение периодической несинусоидальной функции в середине k -го интервала.

Интегралы, входящие в (13-5) и (13-6), заменяются суммами:

$$\begin{aligned} a_n &\approx \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha}^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \Delta\alpha \approx \\ &\approx \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f_k(\alpha) \cos n \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{m}; \end{aligned}$$

$$b_n \approx \frac{1}{\pi} \sum_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \Delta\alpha \approx \\ \approx \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f_k(\alpha) \sin n \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{m}.$$

Если в пределах периода имеются точки разрыва, то при указанном графическом методе разложения целесообразно делать разбику на интервалы так, чтобы точки разрыва не были в серединах интервалов.

В описанной выше технике выполнения графо-аналитического разложения в ряд Фурье брались значения функции в середине интервалов; если вместо этого брать значения в конце или начале интервалов, то в случае четной функции наряду с косинусоидами в разложении появятся и синусоиды, которых четная функция не содержит.

13-2. СЛУЧАИ СИММЕТРИИ

Периодические несинусоидальные функции, изображающие электрические и магнитные величины, обладают обычно каким-либо видом симметрии и это облегчает разложение их в ряд Фурье.

Рассмотрим следующие случаи симметрии:

1. *Функция $f(\alpha)$ симметрична относительно оси ординат* (рис. 13-3), т. е. $f(\alpha) = f(-\alpha)$. Такие функции называются *четными*. Поскольку синусоиды любых частот являются нечетными функциями, они не входят в состав ряда.

Поэтому при данном виде симметрии

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha,$$

т. е. *четная функция может содержать только косинусоиды и постоянную составляющую.*

Важным свойством четных функций является также то, что для определения коэффициентов a_n достаточно пользоваться кривой $f(\alpha)$ за половину периода, т. е.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha. \quad (13-9)$$

Это следует из равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha = \int_{-\pi}^0 f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha.$$

Замена в первом интеграле α на $-\alpha$ приводит к (13-9).

2. Функция $f(\alpha)$ симметрична относительно начала координат (рис. 13-4), т. е. $f(\alpha) = -f(-\alpha)$. Такие функции

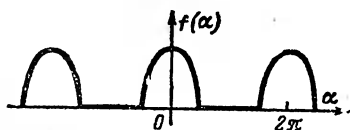


Рис. 13-3. Функция, симметричная относительно оси ординат.

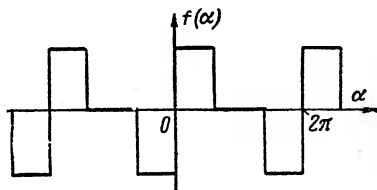


Рис. 13-4. Функция, симметричная относительно начала координат.

называются *нечетными*. Поскольку постоянная, синусоида и косинусоиды этому условию не удовлетворяют, при данном виде симметрии ряд примет вид:

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\alpha,$$

т. е. *нечетная функция может содержать только синусоиды*.

В этом случае, так же как и в предыдущем, для определения коэффициентов b_n достаточно пользоваться кривой $f(\alpha)$ за половину периода, т. е.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha. \quad (13-10)$$

3. Функция $f(\alpha)$ симметрична относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени (рис. 13-5), т. е. $f(\alpha) = -f(\alpha + \pi)$.

Заменяя $f(\alpha)$ в соответствии с (13-4), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha] = \\ & = -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(\alpha + \pi) + b_n \sin n(\alpha + \pi)], \end{aligned}$$

откуда для четных n

$$a_0 + 2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha] = 0.$$

Это условие удовлетворяется при произвольных значениях α только в том случае, если $a_0=0$ и $a_n=b_n=0$ при четных n .

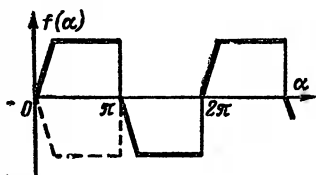


Рис. 13-5. Функция, симметричная относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени.

Поэтому при данном виде симметрии

$$f(\alpha) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

т. е. функция, симметричная относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени, содержит только нечетные гармоники.

Коэффициенты a_n и b_n могут вычисляться в этом случае по формулам (13-9) и (13-10).

Раскладывая периодическую несинусоидальную функцию в ряд Фурье, следует предварительно выяснить, не обладает ли заданная функция каким-либо видом симметрии. Наличие симметрии позволяет заранее предсказать, каких гармоник следует ожидать в разложении.

Если одновременно выполняются условия симметрии по пп. 1 и 3, то в разложении содержатся только нечетные косинусоиды, если по пп. 2 и 3, то содержатся только нечетные синусоиды.

Допустим, что функция, содержащая только нечетные косинусоиды, удовлетворяет, кроме того, условию $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$. Так как при нечетных n $\cos n\alpha = -\cos n(\pi - \alpha)$, то в этом случае для определения коэффициентов a_n достаточно пользоваться кривой $f(\alpha)$ за четверть периода:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha. \quad (13-9a)$$

В свою очередь если функция, содержащая только нечетные синусоиды, удовлетворяет условию $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$, то ввиду того что при нечетных n $\sin n\alpha = \sin n(\pi - \alpha)$ и в этом случае для определения коэффициентов b_n достаточно пользоваться кривой $f(\alpha)$ за четверть периода:

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha. \quad (13-10a)$$

Виды симметрии зависят от выбора начала отсчета. Если начало отсчета может быть выбрано произвольно, то целесообразно выбрать его так, чтобы получить наибольшую симметрию.

Данные о коэффициентах ряда Фурье, относящиеся к разобранным выше случаям симметрии, сведены в табл. 13-1.

Таблица 13-1

Условия симметрии и коэффициенты ряда Фурье

№ п/п.	Симметрия относительно	Математическое условие	Коэффициенты		
			a_0	a_n	b_n
1	Оси ординат (четная функция)	$f(\alpha) = f(-\alpha)$	Есть ¹	Есть	Нули
2	Начала координат (нечетная функция)	$f(\alpha) = -f(-\alpha)$	Нуль	Нули	Есть
3	Оси абсцисс при совмещении двух полу-периодов	$f(\alpha) = -f(\alpha + \pi)$	Нуль	Есть только нечетные	Есть только нечетные
4	Случаи 1 и 3 одновременно	$f(\alpha) = f(-\alpha) = -f(\alpha + \pi)$	Нуль	Есть только нечетные	Нули
5	Случаи 2 и 3 одновременно	$f(\alpha) = -f(-\alpha) = -f(\alpha + \pi)$	Нуль	Нули	Есть только нечетные

¹ В частном случае, когда среднее значение функции $f(\alpha)$ за период равно нулю, $a_0 = 0$.

Пример 13-1. Требуется разложить в ряд Фурье пилообразную функцию, показанную на рис. 13-6. Эта функция удовлетворяет условию

$$f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{\pi} \text{ при } 0 < \alpha < 2\pi.$$

Заданная функция является нечетной, поэтому в разложении в ряд отсутствуют постоянная составляющая и косинусоиды; на основании (13-10)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \sin n\alpha \, d\alpha = \frac{2}{n\pi}.$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \dots \right).$$

В точках $\alpha=0, 2\pi, 4\pi \dots$ сумма ряда равна нулю, т. е. среднему арифметическому левого и правого предельных значений функции $f(\pi)$.

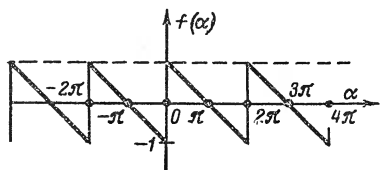


Рис. 13-6. Пример 13-1.

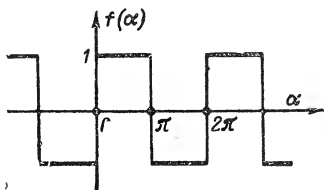


Рис. 13-7. Пример 13-2.

Пример 13-2. Требуется разложить в ряд Фурье знакопеременную прямоугольную функцию, показанную на рис 13-7. Эта функция удовлетворяет условиям

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \alpha < \pi; \\ -1 & \text{при } \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases}$$

Заданная функция нечетна и, кроме того, симметрична относительно оси абсцисс при совмещении полупериодов. Поэтому в разложении в ряд отсутствуют постоянная составляющая, все косинусоиды и четные синусоиды. Кроме того, выполняется условие $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$. Поэтому для определения коэффициентов b_n воспользуемся формулой (13-10а):

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha = \frac{4}{n\pi},$$

где n — нечетно. Отсюда

$$f(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \dots \right).$$

13.3. ПЕРЕНОС НАЧАЛА ОТСЧЕТА

Положим, что для некоторой периодической несинусоидальной функции $f(\alpha)$ коэффициенты a_n и b_n являются заданными, т. е. известно разложение данной функции в ряд Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha).$$

Если сместить начало отсчета на некоторую величину β вправо или влево относительно исходного начала координат, то разложение в ряд Фурье относительно новой координатной системы будет получено заменой α на $\alpha_1 + \beta$, где α_1 — абсцисса в новой системе координат; положительное значение β соответствует смещению нового начала отсчета вправо, а отрицательное — влево. Итак,

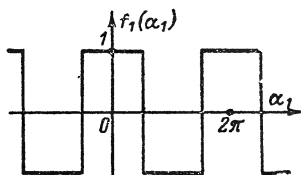


Рис. 13-8. Пример 13-3.

$$f(\alpha_1 + \beta) = f_1(\alpha_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(\alpha_1 + \beta) + b_n \sin n(\alpha_1 + \beta)]. \quad (13-11)$$

Эта формула позволяет быстро находить разложение в ряд Фурье функции, если известны коэффициенты ряда Фурье для другой функции, получаемой в результате смещения первой по оси абсцисс на постоянную величину.

Пример 13-3. Требуется найти разложение в ряд Фурье функции, изображенной на рис. 13-8, используя результаты примера 13-2.

Функция на рис. 13-8 получается при переносе начала координат на рис. 13-7 (точка O) вправо на отрезок $\beta = \pi/2$. Следовательно, в соответствии с (13-11)

$$f_2(\alpha_1) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{1} + \frac{\sin 3\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\sin 5\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{5} + \dots \right] = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos \alpha_1}{1} - \frac{\cos 3\alpha_1}{3} + \frac{\cos 5\alpha_1}{5} - \dots \right).$$

13-4. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА РЯДА ФУРЬЕ

Тригонометрическая форма ряда Фурье может быть преобразована в комплексную следующим образом. Исходя из того, что

$$\cos n\alpha = \frac{e^{jn\alpha} + e^{-jn\alpha}}{2};$$

$$\sin n\alpha = \frac{e^{jn\alpha} - e^{-jn\alpha}}{2j},$$

выражение, заключенное в скобки в формуле (13-4), приводится к виду:

$$a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\alpha} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\alpha}.$$

и ряд (13-4) записывается следующим образом:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\alpha} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\alpha} \right).$$

На основании (13-5) и (13-6) a_n четная, а b_n нечетная функция относительно n , т. е. a_n сохраняет свой знак при отрицательных значениях n , а b_n меняет его:

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}.$$

Поэтому с учетом того, что

$$\frac{a_0}{2} = \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\alpha} \right)_{n=0},$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\alpha} + \\ &+ \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\alpha} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\alpha}, \quad (13-12)$$

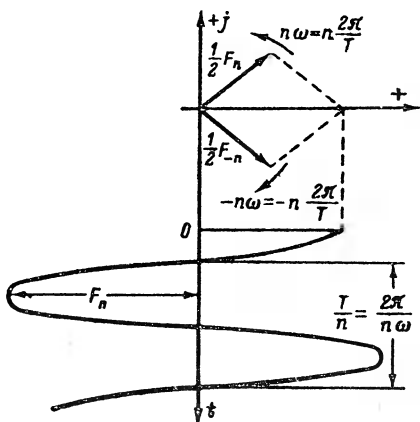
где комплексный коэффициент (комплексная амплитуда) ¹ согласно (13-5) и (13-6)

$$\dot{F}_n = a_n - jb_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) e^{-jn\alpha} d\alpha$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots). \quad (13-13)$$

Как указывалось выше, $\alpha = \omega t$; следовательно, ряд (13-12) содержит два бесконечных ряда сопряженных относительно оси действительных величин векторов, вра-

Рис. 13-9. Синусоидальная функция как сумма двух сопряженных векторов, вращающихся в противоположных направлениях.



щающихся в противоположные стороны с угловыми скоростями $n\omega$. Геометрическая сумма каждой пары сопряженных векторов дает только действительное значение (рис. 13-9). В результате суммирования двух бесконечных рядов сопряженных векторов получается действительная функция $f(\omega t)$.

¹ Применявшаяся ранее для представления синусоидальной функции комплексная амплитуда, например $\dot{U}_m$, связана с введенным здесь одноименным понятием соотношением

$$\text{Im} [\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [\dot{F}_1 e^{j\omega t} + \dot{F}_1^* e^{-j\omega t}],$$

откуда следует:

$$\text{Re} [-j\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \text{Re} [\dot{F}_1 e^{j\omega t}] \text{ и } \dot{U}_m = j\dot{F}_1.$$

13-5. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ К РАСЧЕТУ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Пусть требуется найти ток в электрической цепи под воздействием периодической несинусоидальной э. д. с.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{nm} (\sin n\omega t + \psi_n).$$

Здесь индексом m обозначены амплитуды гармоник.

Если цепь линейна, т. е. параметры r , L , M и C неизменны, то ток в цепи находится методом наложения, путем суммирования токов, создаваемых каждой из слагающих э. д. с. в отдельности:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n), \quad (13-14)$$

где

$$I_0 = \frac{E_0}{z(0)}; \quad I_{nm} = \frac{E_{nm}}{z(n\omega)}.$$

Под $z(0)$ подразумевается сопротивление цепи при частоте, равной нулю, т. е. сопротивление постоянному току; $z(n\omega)$ — полное сопротивление при частоте $n\omega$.

Угол φ_n определяется как арктангенс отношения реактивного сопротивления цепи к ее активному сопротивлению при частоте $n\omega$.

В случае, когда цепь состоит из последовательно соединенных элементов r , L и C ,

$$z(n\omega) = \sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}, \quad \varphi_n = \arctg \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{r}.$$

При этом $z(0) = \infty$, так как цепь для постоянного тока разомкнута.

По мере повышения номера гармоники, т. е. с увеличением частоты $n\omega$, индуктивное сопротивление $n\omega L$ растет по закону прямой линии, а емкостное сопротивление $1/n\omega C$ убывает по закону гиперболы. Поэтому в цепи, состоящей из последовательно соединенных r и L , гармоники тока выражены слабее, чем в э. д. с. источника. В отличие от этого высшие гармоники тока в цепи, состоящей из r и C , могут достигать больших значений.

В смешанной индуктивно-емкостной цепи при $n\omega L - \frac{1}{n\omega C} = 0$ наступает явление резонанса для n -й гармоники.

В общем случае цепи, состоящей из элементов r , L и C , как реактивное, так и активное сопротивления являются функциями частоты $n\omega$ (см., например, § 3-3).

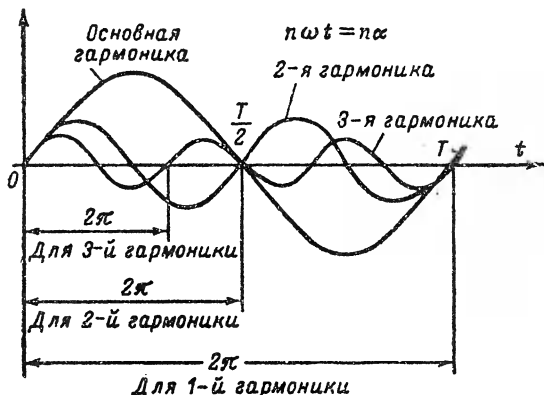


Рис. 13-10. Соотношение масштабов углов для разных гармоник.

Периоды различных гармоник обратно пропорциональны номеру гармоники. Поэтому если по оси абсцисс откладывается не время t , а угол $\alpha_n = n\omega t = n\alpha$, то углу α основной гармоники соответствует на той же абсциссе угол $n\alpha$ для n -й гармоники (рис. 13-10).

Расчет периодических несинусоидальных токов и напряжений в разветвленных электрических цепях ведется, как правило, в комплексной форме.

Если периодическая несинусоидальная э. д. с. задана в тригонометрической форме ряда Фурье вида (13-8), то э. д. с. и ток могут быть представлены так:

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} (\dot{E}_{nm} e^{jn\omega t});$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} (I_{nm} e^{jn\omega t}),$$

где

$$\dot{E}_{nm} = E_{nm} e^{j\psi_n}; \quad \dot{I}_{nm} = I_{nm} e^{j(\psi_n - \varphi_n)}.$$

Следовательно, комплексная форма расчета периодического несинусоидального тока заключается в нахождении комплексных амплитуд токов $\dot{I}_{nm}$, соответствующих заданным комплексным амплитудам э.д.с. $\dot{E}_{nm}$, для разных значений n . При этом, ввиду того что отдельные слагающие имеют неодинаковые частоты, не складываются непосредственно комплексные амплитуды, а суммируются проекции векторов, вращающихся с разными угловыми скоростями $n\omega$, т. е. суммируются мгновенные значения отдельных гармоник.

Рис. 13-11. Пример 13-4.

Пример 13-4. Вычислить суммарный ток в схеме на рис. 13-11. Задано:

$$e(t) = 30 + 15 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t, \text{ в.}$$

$$r_1 = 1 \text{ ом}; \quad r_2 = 0,5 \text{ ом}; \quad \omega L = 1 \text{ ом}; \quad \frac{1}{\omega C} = 9 \text{ ом}.$$

Искомый ток находится методом наложения, т. е. поочередным вычислением постоянной слагающей и гармоник тока с последующим суммированием их.

Сопротивление постоянному току $z(0) = r_1 + r_2 = 1,5 \text{ ом}$. Постоянная слагающая тока

$$I_0 = \frac{E_0}{z(0)} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ а.}$$

Комплексное сопротивление цепи для основной частоты

$$Z(j\omega) = 1,63 + j 1,09 \text{ ом.}$$

Комплексная амплитуда тока основной частоты.

$$\dot{I}_{1m} = \frac{15}{1,63 + j 1,09} = 7,65 \angle -33,6^\circ \text{ а.}$$

Комплексное сопротивление цепи для утроенной частоты

$$Z(j3\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j 3\omega L) \left(-j \frac{1}{3\omega C} \right)}{r_2 + j \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right)} = 19 - j 3 \text{ ом.}$$

Комплексная амплитуда тока третьей гармоники

$$i_{3m} = \frac{20}{19-j3} = 1,04 \angle 8,9^\circ \text{ а.}$$

Мгновенное значение суммарного тока

$$i(t) = 20 + 7,65 \sin(\omega t - 33,6^\circ) + 1,04 \sin(3\omega t + 8,9^\circ).$$

В заключение следует отметить, что в простых случаях установившийся периодический ток может быть получен не только в виде суммы гармоник, но и в более удобной форме аналитического выражения, справедливого для определенного интервала времени (например, полупериода). Для этого интервала записывается дифференциальное уравнение для тока, которое решается так называемым классическим методом (см. рис. 14) или с помощью преобразования Лапласа (гл. 15). Полученное решение включает в себя неизвестное начальное значение тока, которое затем находят из условия периодичности.

Рассмотрим простой пример. Пусть в цепи последовательно соединенных r и L действует периодическая знакопеременная э. д. с. такого вида, как изображено на рис. 13-7. Тогда для первого полупериода справедливо уравнение $ri + L \frac{di}{dt} = E$, решение которого

имеет вид $i = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}$. При $t=0$, $i=i(0)$, следовательно,

$A = i(0) - \frac{E}{r}$. Кривая тока, так же как и кривая э. д. с., будет симметрична относительно оси времени и не будет иметь скачков благодаря индуктивному характеру цепи. Поэтому $i\left(\frac{T}{2}\right) = -i(0)$. Это дает:

$$i\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E}{r} + \left[i(0) - \frac{E}{r}\right] e^{-\frac{rT}{2L}} = -i(0).$$

Отсюда находится $i(0)$

$$i(0) = \frac{E(e^{-a} - 1)}{r(e^{-a} + 1)},$$

где $a = rT/2L$.

Подставив это в выражение для тока, получим окончательно для первого полупериода $\left(0 < T < \frac{T}{2}\right)$:

$$i = \frac{E}{r} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-a}} e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Во втором полупериоде кривая тока будет иметь тот же вид, но противоположный знак.

Итак, периодическая несинусоидальная функция представляется не только в виде ряда Фурье, но и в замкнутой форме, т. е. в виде

аналитического выражения с конечным числом слагаемых, справедливое для выбранного интервала времени. Другой метод решения в замкнутой форме описан в § 15-12.

13-6. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ И СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Действующее значение периодической несинусоидальной функции определяется по формуле (см. § 2-3)

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}.$$

Если функция задана в виде (13-8), то после возведения ее в квадрат интеграл под знаком корня разложится на ряд интегралов, дающих в результате сумму квадрата постоянной слагающей $(a_0/2)^2$, и средних значений квадратов отдельных гармоник (которые согласно § 2-3 равны $F_n^2/2$), средние же значения удвоенных произведений гармоник разных порядков или произведений постоянной слагающей на отдельные гармоники будут равны нулю.

Следовательно, действующее значение периодической несинусоидальной функции выражается формулой

$$F = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2}{2}}.$$

Поскольку F_n — амплитуда n -й гармоники, $F_n/\sqrt{2}$ — действующее значения гармоники. Таким образом, полученное выражение показывает, что действующее значение периодической несинусоидальной функции равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений гармоник и квадрата постоянной слагающей.

Отсюда следует, что действующее значение функции, представляющей собой сумму гармоник разных частот, не зависит от начальных фаз этих гармоник, а всецело определяется их действующими значениями.

Например, если несинусоидальный ток выражается формулой (13-14), то действующее значение тока равно:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}.$$

Действующее значение периодической несинусоидальной функции может быть измерено, так же как и при синусоидальных токах, с помощью электроизмерительного прибора электромагнитной, электродинамической, тепловой или других систем.

Наряду с понятием действующего значения периодической несинусоидальной функции в электротехнике и радиотехнике пользуются понятием среднего значения функции, взятой по абсолютной величине; последнее в соответствии с § 2-3 выражается интегралом вида:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt.$$

Этот интеграл равен среднему значению функции $f(t)$ за положительный полупериод, если $f(t)$ имеет одинаковые положительные и отрицательную полуволны:

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

Среднее значение функции за полупериод измеряется с помощью магнитоэлектрического прибора с выпрямителем (магнитоэлектрический прибор без выпрямителя измеряет постоянную слагающую).

13-7. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В соответствии с (2-26) *активная мощность равна среднему значению мощности:*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt.$$

Если вместо u и i подставить их выражения через тригонометрический ряд вида (13-8), то интеграл разложится на ряд интегралов, дающих в результате сумму произведений постоянных слагающих напряжения и тока и средних значений произведений гармоник напряжения и тока одного и того же порядка. Остальные интегралы будут равны нулю, так как они представляют собой сред-

ние значения произведений гармоник разных порядков или произведений постоянной слагающей на отдельные гармоники.

Итак,

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n, \quad (13-15)$$

т. е. *активная мощность периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник плюс мощность постоянных слагающих.*

Иначе говоря, активная мощность от взаимодействия разноименных гармоник напряжений и токов или взаимодействия гармоник с постоянными слагающими равна нулю.

По аналогии с понятием реактивной мощности для синусоидальных функций может быть введено понятие реактивной мощности в цепи с периодическими несинусоидальными величинами. Она определяется как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник.

Содержание в одной из кривых (напряжения или тока) гармоник, отсутствующих в другой кривой, не отражается на величинах активной и реактивной мощностей, но повышает действующее значение той функции, которая содержит эти гармоники. Поэтому, если полную мощность в рассматриваемой цепи определять как произведение действующих значений напряжения и тока $S = UI$, то на основании сказанного можно заключить, что в отличие от синусоидального режима сумма квадратов активной и реактивной мощностей в цепи с периодическими несинусоидальными величинами не равна квадрату полной мощности:

$$P^2 + Q^2 = S^2 - T^2.$$

Величина T носит название мощности искажения; она характеризует степень различия в формах кривых напряжения u и тока i . Если сопротивление цепи активное, то кривые напряжения и тока подобны; при этом $Q=0$ и $T=0$.

Пример 13-5. Вычислить активную мощность, поступающую в цепь в примере 13-4.

$$e(t) = 30 + 15 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t;$$

$$i(t) = 20 + 7,65 \sin(\omega t - 33,6^\circ) + 1,04 \sin(3\omega t + 8,9^\circ).$$

На основании (13-15)

$$P = 30 \cdot 20 + \frac{15 \cdot 7,65}{2} \cos 33^\circ 36' + \frac{20 \cdot 1,04}{2} \cos 8^\circ 54' = \\ = 600 + 47,9 + 10 = 657,9 \text{ вт.}$$

13-8. КОЭФФИЦИЕНТЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

По аналогии с синусоидальными функциями отношение активной мощности при несинусоидальных токах к полной мощности называется коэффициентом мощности и обозначается χ :

$$\chi = \frac{P}{UI} = \frac{\int_0^T ui \, dt}{\sqrt{\int_0^T u^2 \, dt \int_0^T i^2 \, dt}}. \quad (13-16)$$

Отношение в правой части (13-16) обращается в единицу только при наличии прямой пропорциональности между u и i .

Положим, что напряжение синусоидально, а ток несинусоидален. В этом случае активная мощность в соответствии с (13-15) определяется мощностью первой гармоники:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = UI \cos \varphi_1.$$

При этом действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} > I_1.$$

Следовательно, коэффициент мощности

$$\chi = \frac{UI_1 \cos \varphi_1}{UI} = \frac{I_1}{I} \cos \varphi_1 = k_n \cos \varphi_1.$$

Множитель $k_n = \frac{I_1}{I} < 1$ называется коэффициентом искажения.

В радиотехнике и электротехнике пользуются также коэффициентами формы кривой (k_f) и амплитуды (k_a).

Коэффициент формы кривой определяется как отношение действующего значения функции к среднему значению функции, взятой по абсолютной величине:

$$k_{\Phi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt}.$$

Для синусоиды

$$k_{\Phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11.$$

Коэффициент амплитуды определяется как отношение максимального значения функции к действующему значению ее:

$$k_a = \frac{i_m}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}},$$

Для синусоиды

$$k_a = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Несинусоидальные кривые напряжения и тока заменяются в ряде случаев эквивалентными синусоидами. Замена производится таким образом, что действующие значения синусоидальных функций принимаются равными действующим значениям несинусоидальных функций, а угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами принимается равным углу $\arccos \chi$, где χ определяется из (13-16).

13-9. ВЫСШИЕ ГАРМОНИКИ В ТРЕХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

При установившемся режиме в симметричных трехфазных электрических цепях кривые напряжения и тока во второй и третьей фазах аналогичны кривой напряжения и тока первой фазы со сдвигом на треть периода. Так, например, если напряжение $u_A(t)$ в фазе A выражается функцией

$$u_A = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n),$$

то:

$$u_B = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin \left[n\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right];$$

$$u_C = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin \left[n\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right].$$

Гармоники порядка, кратного 3 ($n=3, 6, 9, \dots$), во всех фазах тождественны, так как

$$\begin{aligned} \sin \left[n\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] &= \sin \left[n\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] = \\ &= \sin [n\omega t + \psi_n]. \end{aligned}$$

Поэтому они образуют систему напряжений нулевой последовательности.

Гармоники порядка $n=3k+1$, где k — любое целое число, т. е. при $n=1, 4, 7, 10, 13$ и т. д., образуют симметричную систему напряжений прямой последовательности, так как при этом:

$$\sin \left[n\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] = \sin \left[n\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right];$$

$$\sin \left[n\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] = \sin \left[n\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right]$$

и, следовательно, n -я гармоника в фазе B отстает от n -й гармоники в фазе A на 120° , а в фазе C опережает ее на 120° .

Наконец, гармоники при $n=3k-1$, где k — любое целое число, т. е. при $n=2, 5, 8, 11, 14$ и т. д., образуют симметричную систему напряжений обратной последовательности, так как при этом:

$$\sin \left[n\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] = \sin \left[n\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right];$$

$$\sin \left[n\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] = \sin \left[n\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right]$$

и, следовательно, n -я гармоника в фазе B опережает n -ю гармонику в фазе A на 120° , а в фазе C отстает от нее на 120° . Все эти случаи весьма наглядно представляются на векторных диаграммах, построенных для каждой частоты в отдельности.

В практически встречающихся случаях постоянная составляющая и четные гармоники обычно отсутствуют, и поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только нечетных гармоник.

При соединении источника электроэнергии и нагрузки звездой с нейтральным проводом в последнем в соответствии с изложенным выше протекает ток, равный сумме всех гармоник с порядковым номером, кратным 3:

$$\begin{aligned} i_N &= i_A + i_E + i_C = \\ &= 3I_{3m} \sin(3\omega t - \varphi_3) + 3I_{9m} \sin(9\omega t - \varphi_9) + \dots \end{aligned}$$

Действующее значение этого тока определится согласно § 13-6:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + \dots}$$

При отсутствии нейтрального провода токи в фазах не содержат гармоник порядка, кратного 3.

В линейных напряжениях, равных разностям фазных напряжений, будут отсутствовать гармоники с порядковым номером, кратным 3.

Ввиду отсутствия в линейных напряжениях гармоник порядка, кратного 3, отношение действующего значения линейного напряжения к действующему значению фазного напряжения при несинусоидальных напряжениях получается меньше $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} U_L &= \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + \dots}; \\ U_\Phi &= \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots} \end{aligned}$$

Если фазы генератора соединены треугольником, то во внешней цепи гармоники порядка, кратного 3, отсутствуют; в обмотках же генераторов, соединенных треугольником, действует э. д. с., равная утроенной сумме высших гармоник, кратным 3. Однако она полностью уравнивается падением напряжения в контуре треугольника от токов этих гармоник. Поэтому гармоники, порядок которых кратен 3, отсутствуют не только в линейных токах и напряжениях, но и в фазных напряжениях.

Разность потенциалов на зажимах вторичной обмотки трансформатора напряжения, соединенной разомкну-

тым треугольником (см. рис. 12-28, в), в случае несинусоидальных фазных напряжений равна:

$$u_A + u_B + u_C = 3U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ + 3U_{9m} \sin(9\omega t + \psi_9) + \dots$$

Действующее значение этого напряжения

$$U = 3 \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + \dots}$$

Поэтому даже при симметричной трехфазной электрической цепи возможно появление составляющих токов и напряжений нулевой последовательности, обусловливаемых несинусоидальностью фазных э. д. с. генераторов.

13-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

13-1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию, получаемую при однополупериодном выпрямлении косинусоиды:

$$f(t) = \cos \omega t \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2}.$$

О т в е т:

$$\frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

13-2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию, получаемую при двухполупериодном выпрямлении косинусоиды.

О т в е т:

$$\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right).$$

13-3. Разложить в тригонометрический ряд Фурье выпрямленное трехфазное напряжение, изменяющееся по закону $u = \cos \omega t$ в пределах

$$-\frac{\pi}{3} < \omega t < \frac{\pi}{3}.$$

О т в е т:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left(1 + \frac{2 \cos 3\omega t}{8} - \frac{2 \cos 6\omega t}{35} + \frac{2 \cos 9\omega t}{80} - \dots \right)$$

13-4. В цепи, состоящей из индуктивности $L=5$ гн и емкости $C=10$ мкф, соединенных последовательно, действует э. д. с., полученная в результате двухполупериодного выпрямления косинусоидальной э. д. с. Параллельно емкости присоединено сопротивление $r=2000$ ом. Найти напряжение на сопротивлении, приняв $\omega=377$ рад/сек.

О т в е т:

$$\frac{2}{\pi} E_m [1 + 0,0242 \cos (2\omega t - 176^\circ) - 0,0012 \cos (4\omega t - 178^\circ) + \dots], \text{ в.}$$

13-5. Индуктивность L присоединена к источнику, э. д. с. которого задана кривой прямоугольной формы вида, показанного на рис. 13-8. Найти ток.

О т в е т:

$$\frac{4}{\omega L \pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right).$$

13-6. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию треугольной формы:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \omega t \text{ при } -\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2};$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} (\pi - \omega t) \text{ при } \frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{3\pi}{2}.$$

О т в е т:

$$\frac{8}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right).$$

13-7. Сопоставив результаты двух предыдущих задач, пояснить, какова форма кривой тока в задаче 13-5.

О т в е т: $\frac{1}{L} t$ при $-\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2}$.

13-8. Вычислить действующее значение функции в задаче 13-2.

О т в е т: 0,707.

13-9. Вычислить амплитуду n -й гармоники периодической функции, симметричной относительно начала координат. Наклонная часть трапеции на участке от $\alpha=0$ до $\alpha=\alpha_1$ выражается уравнением

$f(\alpha) = A \frac{\alpha}{\alpha_1}$, где A — высота трапеции. Сопоставить результаты вычислений по формулам (13-6) и (13-10а).

О т в е т:

$$b_n = \frac{2A}{\pi n^2 \alpha_1} \sin n\alpha_1 (1 - \cos n\pi);$$

при четных n $b_n = 0$; при нечетных n

$$b_n = \frac{4A}{\pi n^2 \alpha_1} \sin n\alpha_1.$$

13-10. Вычислить мощности: активную, реактивную, полную и мощность искажения, если

$$u = 141 \sin \omega t + 11 \sin (3\omega t + 30^\circ) \text{ в;}$$

$$i = 10,19 \sin (\omega t - 11,3^\circ) + 2 \cos 3\omega t + \sin 5\omega t \text{ а.}$$

О т в е т: $P = 709,5 \text{ вт}$; $Q = 123,8 \text{ вар (инд.)}$; $S = 738 \text{ ва}$; $T = 160,5 \text{ ва}$.

13-11. Найти эквивалентные синусоиды напряжения и тока, если

$$u = 156 \sin(\omega t + \pi/6) + 50 \sin(3\omega t - \pi/3) + 2 \sin(5\omega t + \pi/4);$$

$$i = 31,1 \sin(\omega t + 25^\circ) + 5 \sin 5\omega t.$$

Ответ: $164 \sin(\omega t + 30^\circ)$; $31,55 \sin(\omega t + 9,2^\circ)$.

13-12. Вычислить действующее значение несинусоидального тока $i = 5 + 10 \sin \omega t - 10 \cos \omega t$ а.

Ответ: 11,2 а.

13-13. Вычислить действующее значение несинусоидального напряжения $u = 10 \sin 400 t + 5 \sin 800 t + \cos 1200 t$ в.

Ответ: 7,95 в.

13-14. Вычислить действующее значение разности двух несинусоидальных токов: $i_1 = 5 + 4 \cos(\omega t - \pi/3) + 2 \cos(2\omega t + \pi/6)$ и $i_2 = 3 - 5 \cos \omega t - 3 \cos(2\omega t + \pi/4)$ а.

Ответ: 6,85 а.

13-15. Сопротивление 50 ом и емкость 50 мкф, соединенные параллельно, приключены к источнику напряжения, имеющему э. д. с. $50 + 100 \sin(400 t + \pi/6) + 50 \sin(1200 t - \pi/4)$ в и внутреннее сопротивление 30 Ом. Определить действующие значения напряжения на параллельных ветвях и суммарного тока.

Ответ: 54 в; 1,62 а.

13-16. Сохранив условия предыдущей задачи, вычислить активную мощность, расходуемую в обоих сопротивлениях, и энергию, запасенную в емкости при $t=0$.

Ответ: 95,5 Вт; 0,01 Дж.

13-17. Вычислить напряжение $u(t)$ в схеме рис. 13-11 (см. пример 13-4).

Ответ: $10 + 9,64 \sin(\omega t + 26^\circ 12') + 18,97 \sin(3\omega t - 4^\circ 48')$ в.

13-18. Входное напряжение трансформатора (см. рис. 8-11) $u_1 = 20 + 100 \sin 1000 t + 40 \sin 3000 t$ в; выходные зажимы замкнуты: $r_1 = 20$ ом; $L_1 = 15$ мГн; $r_2 = 40$ ом; $L_2 = 30$ мГн; $M = 20$ мГн. Определить токи i_1 и i_2 .

Ответ: $i_1 = 1 + 3,54 \sin(1000 t - 21^\circ 10') + 1,09 \sin(3000 t - 18^\circ 5')$; $i_2 = 1,42 \sin(1000 t + 32^\circ) + 0,665 \sin(3000 t + 6^\circ)$ а.

13-19. Зависит ли действующее значение несинусоидальной функции от начальных фаз и частот отдельных гармоник?

13-20. Показать, что линейные напряжения трехфазного генератора не содержат гармоник, кратных трем.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

14-1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В предыдущих главах рассматривались установившиеся процессы в линейных электрических цепях, т. е. такие процессы, при которых напряжения и токи либо неизменны во времени (цепи постоянного тока), либо

представляют собой периодические функции времени (цепи переменного тока).

Наступлению установившегося процесса, отличного от первоначального режима работы цепи, предшествует, как правило, переходный процесс, при котором напряжения и токи изменяются неперiodически.

Переход от одного режима работы цепи к другому может быть вызван изменением параметров или схемы цепи, называемым в общем случае в электротехнике коммутацией.

Можно теоретически считать, что коммутация цепи производится мгновенно, т. е. на включение, выключение или переключение цепи время не расходуется. Тем не менее переход от исходного режима работы цепи к последующему установившемуся процессу происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени. Объясняется это тем, что каждому состоянию цепи соответствует определенный запас энергии электрических и магнитных полей. Переход к новому режиму связан с нарастанием или убыванием энергии этих полей. Энергия $w_L = Li_L^2/2$, запасаемая в магнитном поле индуктивности L , и энергия $w_C = Cu_C^2/2$, запасаемая в электрическом поле емкости C , не могут изменяться мгновенно: энергия может изменяться непрерывно, без скачков, так как в противном случае мощность, равная производной энергии по времени, достигала бы бесконечных значений, что физически невозможно. Именно поэтому, например, в случае размыкания ветви с индуктивной катушкой в месте размыкания неизбежно возникает искра, в сопротивлении которой расходуется энергия, накопленная в магнитном поле индуктивной катушки. Аналогично если замкнуть коротко зажимы конденсатора, который был предварительно заряжен, то запасенная в нем электрическая энергия рассеется в сопротивлении соединяющего провода и между контактами.

Если исключить случаи размыкания индуктивности и замыкания накоротко емкости и рассматривать цепи, в которых энергия, накапливаемая в магнитном или электрическом поле, может рассеиваться в виде тепла в сопротивлениях, то, считая, что коммутация происходит мгновенно, можно искрообразование не учитывать.

Для завершения переходного и наступления установившегося процессов теоретически требуется бесконечно

большое время. Практически, однако, время переходного процесса определяется малым интервалом, по истечении которого токи и напряжения настолько приближаются к установившимся значениям, что разница оказывается практически неощутимой. Чем интенсивнее происходит рассеивание энергии в сопротивлениях, тем быстрее протекает переходный процесс.

Если бы электрическая цепь состояла только из сопротивлений и не содержала индуктивностей и емкостей, то переход от одного установившегося состояния к другому совершался бы мгновенно, без затраты времени. В реальных электротехнических устройствах тепловые потери, обусловленные током, магнитные и электрические поля сопутствуют друг другу. Применяя специальные схемы и подбирая соответствующие параметры цепи, можно в зависимости от необходимости ускорить или замедлить переходный процесс.

В одних случаях переходные процессы в электрических цепях нежелательны и опасны (например, при коротких замыканиях в энергетических системах). В других случаях переходный процесс представляет собой естественный, нормальный режим работы цепи, как это, например, имеет место в радиопередающих и радиоприемных устройствах, системах автоматического регулирования и других цепях.

Существуют различные методы расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. Настоящая глава посвящена классическому методу решения дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы.

14-2. ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Высказанные выше положения о том, что запас энергии магнитного или электрического поля может изменяться только плавно, без скачков, выражают *принцип непрерывности во времени потокосцепления индуктивности и электрического заряда емкости* и называются *законами коммутации*.

Невозможность скачкообразного изменения потокосцепления следует из того, что в противном случае на индуктивности появилось бы бесконечно большое напряжение $u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \infty$, что лишено физического смысла.

Ввиду равенства $\Psi = Li$ принцип непрерывности потоко-сцепления означает, что при неизменном L ток i не может изменяться скачком. Итак, *в начальный момент после коммутации ток в индуктивности остается таким же, каким он был непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется.*

Аналогично невозможность скачкообразного изменения электрического заряда q следует из того, что в противном случае через емкость проходил бы бесконечно большой ток $i_C = \frac{dq}{dt} = \infty$, что также лишено физического смысла. Ввиду равенства $q = C u_C$ принцип непрерывности электрического заряда означает, что при неизменном C напряжение u_C не может изменяться скачком. Итак, *в начальный момент после коммутации напряжение на емкости остается таким же, каким оно было непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется.*

При этом следует отметить, что в цепях с идеализированными сосредоточенными параметрами скачкообразно могут изменяться: 1) токи в сопротивлениях и емкостях и 2) напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Значения тока в индуктивности и напряжения на емкости в момент коммутации называются независимыми начальными условиями.

Обычно принимают, что коммутация происходит в момент времени $t = 0$; тогда ток в индуктивности и напряжение на емкости в момент времени непосредственно перед коммутацией обозначаются через $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$, а в начальный момент переходного процесса после коммутации — через $i_L(0)$ и $u_C(0)$.

На основании законов коммутации:

$$\left. \begin{aligned} i_L(0-) &= i_L(0); \\ u_C(0-) &= u_C(0). \end{aligned} \right\} \quad (14-1)$$

Эти равенства выражают начальные условия цепи, в которых происходит коммутация.

При нулевых начальных условиях, т. е. когда $i_L(0-) = 0$ и $u_C(0-) = 0$, индуктивность в начальный момент после коммутации равносильна разрыву цепи, а емкость равносильна короткому замыканию.

В случае ненулевых начальных условий, т. е. когда $i_L(0) \neq 0$ и $u_C(0) \neq 0$, индуктивность в первый момент

равносильна источнику тока $i_L(0)$, а емкость равносильна источнику э. д. с. $u_C(0)$.

Независимые начальные условия характеризуют энергию магнитного и электрического полей, запасенную к моменту коммутации, и для расчета переходного процесса обязательно требуется знание этих начальных условий, причем совершенно безразлично, каким образом эти условия в цепи были созданы.

При расчете переходных процессов в разветвленных электрических цепях наряду с независимыми начальными условиями используются так называемые зависимые начальные условия, а именно: значения токов, напряжений и их производных в начальный момент времени ($t=0$).

Методика вычисления зависимых начальных условий и их использование в расчете описаны в § 14-7.

До сих пор нами исключались из рассмотрения случаи коммутации, при которых неизбежно между контактами возникает искра или дуга. Один из таких случаев показан на рис. 14-1, а. До коммутации ток проходит через индуктивность L_1 и контакт, шунтирующий индуктивность L_2 ; ток в L_2 равен нулю. В момент $t=0$ контакт размыкается и индуктивности L_1 и L_2 оказываются включенными последовательно; ток в них принудительно становится одинаковым. Поскольку в момент коммутации ток в L_1 не изменяется, а ток в L_2 равен нулю, в силу первого закона Кирхгофа ток должен замкнуться через дугу, образовавшуюся между контактами. Кроме того, если под L_2 подразумевать реальную индуктивную катушку, то ток может частично замкнуться и через межвитковую емкость. После быстрого погасания дуги токи в L_1 и L_2 уравниваются. Эта начальная стадия переходного процесса протекает столь быстро, что ею практиче-

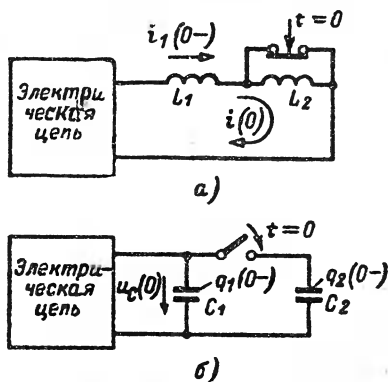


Рис. 14-1. Случай размыкания (а) или замыкания (б) при частичной потере энергии.

ски можно пренебречь, считая, что токи в L_1 и L_2 уравниваются мгновенно. Именно в этом смысле можно условно говорить о скачкообразном изменении токов в индуктивностях, которое предшествует исследуемому переходному процессу в цепи. При этом для расчета переходного процесса используется *принцип непрерывности суммарного потокосцепления* при коммутации, т. е. $L_1 i(0-) = (L_1 + L_2) i(0)$. Скачкообразное изменение токов и соответствующих им потоков в L_1 и L_2 в момент коммутации не сопряжено в данном случае с наведением бесконечно большой суммарной э. д. с. самоиндукции, поскольку суммарное потокосцепление не претерпевает скачкообразного изменения. При новых значениях токов в L_1 и L_2 магнитная энергия, запасенная в катушках, будет меньше энергии, запасенной в первой катушке до коммутации. Часть энергии превратится в тепло в искре, а также излучится.

Найденный таким образом ток $i(0)$ в L_1 и L_2 может рассматриваться как независимое начальное условие для расчета переходного процесса во всей цепи на рис. 14-1, а после разрыва дуги.

При коммутациях в цепях с емкостями при отсутствии сопротивлений также возможны весьма быстрые перераспределения зарядов, условно рассматриваемые как мгновенные. В этом случае применим *принцип непрерывности суммарного заряда*. Полученные при этом значения зарядов и напряжений на отдельных емкостях используются в расчете последующего переходного процесса как независимые начальные условия.

Например, в случае схемы на рис. 14-1, б принцип непрерывности суммарного заряда до и после коммутации выражается равенством

$$q_1(0-) + q_2(0-) = q_1(0) + q_2(0) = u_c(0)(C_1 + C_2).$$

При сделанном допущении в остальной электрической цепи, соединенной с емкостями, не возникает бесконечно большого тока, так как суммарный заряд не изменяется скачкообразно при $t = 0$.

В процессе рассматриваемой коммутации энергия электрического поля уменьшится, так как часть ее превратится в тепло в очень малом сопротивлении проводника при очень большом токе, а также сможет выделяться в искре и излучиться.

14-3. ПРИНУЖДЕННЫЙ И СВОБОДНЫЙ РЕЖИМЫ

В общем случае анализ переходного процесса в линейной цепи с сосредоточенными параметрами r , L , C и M сводится к решению обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, выражающих законы Кирхгофа. Эти уравнения представляют собой линейную комбинацию напряжений, токов, их первых производных и интегралов по времени.

Например, если какая-нибудь э. д. с. $e(t)$ включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных r , L и C , то интегродифференциальное уравнение имеет вид:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C} \int i dt \right) = e(t). \quad (14-2)$$

Это уравнение после дифференцирования приводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}. \quad (14-3)$$

Как известно, общий интеграл такого уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Частное решение выражает принужденный режим, задаваемый источником. Если воздействующая функция, стоящая в правой части уравнения, постоянна или является периодической функцией времени, то принужденный ток будет одновременно и установившимся. Расчеты установившихся токов рассмотрены в предыдущих главах. Нахождение частного решения в других, более сложных случаях будет изложено в § 14-7, а также в 15-12.

Общее решение физически определяет поведение цепи при отсутствии внешних источников электрической энергии и заданных начальных условиях. Функции, определяемые общим решением, называются свободными составляющими (токов, напряжений и пр.).

В случае, рассмотренном выше, однородное уравнение имеет вид:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (14-4)$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение

$$Lp^2 + rp + \frac{1}{C} = 0. \quad (14-5)$$

Если корни характеристического уравнения обозначить через p_1 и p_2 , то общее решение запишется в виде:

$$i_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (14-6)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий (см. § 14-7).

Полный переходный ток в цепи равен сумме принужденного и свободного токов:

$$i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t). \quad (14-7)$$

Аналогично напряжение, заряд, магнитный поток и другие функции на любом участке цепи в переходном режиме состоят из принужденной и свободной составляющих.

На основании законов коммутации (см. § 14-2) можно найти начальные независимые условия $i_L(0)$ и $u_C(0)$. После этого можно написать согласно (14-7):

$$i_L(0) = i_{L_{пр}}(0) + i_{L_{св}}(0); \quad u_C(0) = u_{C_{пр}}(0) + u_{C_{св}}(0),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} i_{L_{св}}(0) &= i_L(0) - i_{L_{пр}}(0); \\ u_{C_{св}}(0) &= u_C(0) - u_{C_{пр}}(0). \end{aligned} \right\} \quad (14-8)$$

нач. цен. (0)

Итак, начальные значения свободных функций $i_{L_{св}}(0)$ и $u_{C_{св}}(0)$ определяются изменениями в момент коммутации соответствующих принужденных функций.

В частном случае при нулевых начальных условиях:

$$i_{L_{св}}(0) = -i_{L_{пр}}(0); \quad u_{C_{св}}(0) = -u_{C_{пр}}(0).$$

В зависимости от порядка дифференциальных уравнений, описывающих исследуемые переходные процессы, различают цепи первого, второго и более высокого порядков.

В цепях первого порядка накопление энергии происходит только в одном элементе; L или C в форме магнитной энергии (в цепи с индуктивностью, см. § 14-4), или электрической энергии (в цепи с емкостью, см. § 14-5). Одноконтурная цепь, содержащая элементы, в ко-

торых накапливается энергия обоих видов — магнитная и электрическая, представляет собой цепь второго порядка (цепь r, L, C — § 14-6). Разветвленные цепи могут быть более высокого порядка (см. § 14-7).

14-4. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПИ r, L

Положим, что в момент $t = 0$ цепь, состоящая из сопротивления r и индуктивности L , включенных последовательно, присоединяется к источнику э. д. с. $e(t)$ (рис. 14-2).

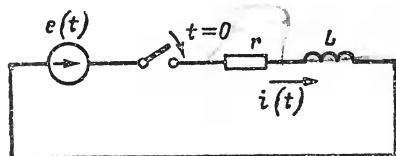


Рис. 14-2. Включение цепи r, L .

$$ri + L \frac{di}{dt} = e(t)$$

$$\mathcal{L} + LP = 0$$

Дифференциальное уравнение для времени $t \geq 0$ записывается в виде:

$$e = ri + L \frac{di}{dt}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $r + pL = 0$ и соответственно корень уравнения $p_1 = -\frac{r}{L}$.

Отсюда свободный ток

$$i_{\text{св}} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{r}{L} t}.$$

Переходный ток в цепи определится суммой принужденного и свободного токов:

$$i = i_{\text{пр}} + Ae^{-\frac{r}{L} t}. \quad (14-9)$$

Принужденный ток может быть найден, если задана э. д. с. $e(t)$.

Рассмотрим три случая:

- 1) включение в цепь r, L постоянной э. д. с. E ;
- 2) короткое замыкание цепи r, L ;
- 3) включение в цепь r, L синусоидальной э. д. с.

$$E_m \sin(\omega t + \psi).$$

1. Включение в цепь r, L постоянной э. д. с.

При включении в цепь r, L постоянной э. д. с. E принужденный ток равен E/r . Поэтому согласно (14-9)

$$i = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (14-10)$$

Постоянная интегрирования A находится по начальному условию

$$i(0) = i(0-) = 0.$$

Согласно уравнению (14-10) при $t = 0$

$$0 = \frac{E}{r} + A,$$

откуда $A = -\frac{E}{r}$.

Следовательно,

$$i = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Здесь $I = E/r$ — предельное значение, к которому стремится ток $i(t)$ по мере неограниченного возрастания t , называемое установившимся током.

В начальный момент $t = 0$ э. д. с. самоиндукции $e_L = -L \frac{di}{dt}(0) = -E$ и полностью компенсируется э. д. с. источника, так как ток $i(0)$ равен нулю.

С течением времени э. д. с. самоиндукции убывает, а ток в цепи возрастает, асимптотически приближаясь к установившемуся значению.

На рис. 14-3 показаны кривые принужденного, свободного и переходного токов; на том же рисунке изображена кривая напряжения на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Из курса математического анализа известно, что если $y = f(t)$, то подкасательная равна $\left| \frac{y}{y'} \right|$. В данном случае при любом значении t

$$\left| \frac{u_L}{u'_L} \right| = \left| \frac{i_{св}}{i'_{св}} \right| = \tau. \quad (14-11)$$

Величина $\tau = L/r$ носит название постоянной времени. Постоянная времени измеряется в секундах:

$$\left[\frac{L}{r} \right] = \frac{\text{гн}}{\text{ом}} = \frac{\text{ом} \cdot \text{сек}}{\text{ом}} = \text{сек.}$$

Выражение (14-11) показывает, что постоянная времени графически определяется длиной подкасательной к кривой $i_{\text{св}}$ или u_L при любом значении t .

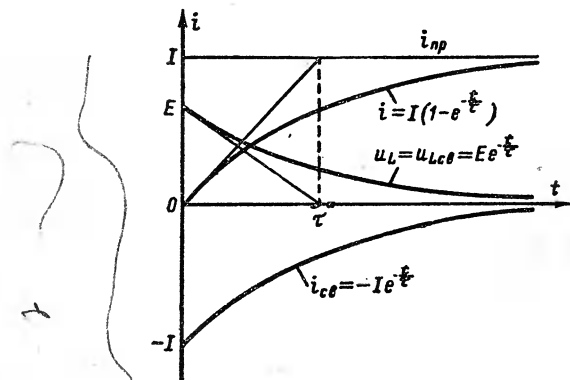


Рис. 14-3. Принужденный, свободный и переходный токи при включении в цепь r , L постоянной э. д. с.

Наращение тока происходит тем быстрее, чем меньше постоянная времени и соответственно чем быстрее убывает э. д. с. самоиндукции. Для различных моментов времени ток в цепи, выраженный в процентах конечного (установившегося) значения составляет:

$t = \tau$	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
$\frac{i}{I} 100\% = 63,2$	86,5	95,0	98,2	99,3	100

Следовательно, постоянная времени цепи r , L равна промежутку времени, в течение которого свободная составляющая тока убывает в $e = 2,718$ раза и соответственно ток в этой цепи, включенной на постоянное напряжение, достигает 63,2% своего установившегося значения.

Как видно из рис. 14-3 и приведенной выше таблицы, переходный процесс теоретически длится бесконечно дол-

го. Практически же можно считать, что он заканчивается спустя $t = (4 \div 5) \tau$.

2. Короткое замыкание цепи r, L .

Положим, что цепь r, L , присоединенная к источнику постоянного или переменного напряжения, замыкается при $t = 0$ накоротко (рис. 14-4, а). В образовавшемся при этом контуре r, L благодаря наличию магнитного поля индуктивной катушки ток исчезает не мгновенно: э. д. с. самоиндукции, обусловленная убыванием магнитного потока, стремится поддержать ток в контуре за счет энергии исчезающего магнитного поля.

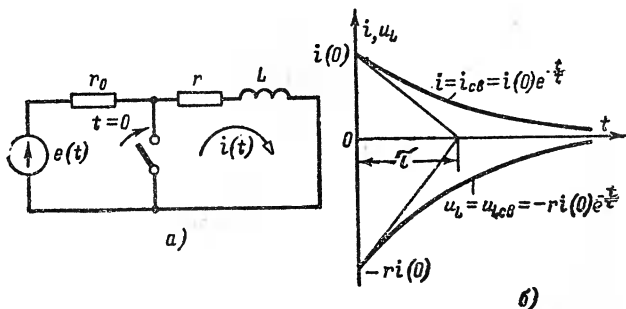


Рис. 14-4. Короткое замыкание цепи r, L .

а — расчетная схема; б — кривая тока i и напряжения u_L .

По мере того как энергия магнитного поля постепенно рассеивается, превращаясь в сопротивлении r в тепло, ток в контуре приближается к нулю.

Процесс, происходящий в короткозамкнутом контуре r, L , является свободным; принужденный ток в данном случае равен нулю.

Положив в (14-9) $i_{пр} = 0$, получим:

$$i = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Постоянная интегрирования A находится из начального условия

$$i(0) = i(0-),$$

откуда

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{r}{L}t} = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}};$$

здесь $i(0-)$ — значение тока в индуктивности в момент, непосредственно предшествовавший короткому замыканию; оно может быть положительным или отрицательным.

На рис. 14-4, б изображены кривые спада тока в короткозамкнутом контуре и кривая напряжения на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -ri(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

в предположении, что $i(0) > 0$.

Постоянная времени контура $\tau = L/r$ может быть найдена графически как подкасательная к кривой $i(t)$ (например, в момент $t = 0$).

Переходный процесс в короткозамкнутом контуре заканчивается теоретически при $t = \infty$. За это время в сопротивлении r выделяется в виде тепла энергия

$$\int_0^{\infty} ri^2 dt = r [i(0)]^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{r}{L}t} dt = \frac{L [i(0)]^2}{2},$$

т. е. вся энергия, запасенная в магнитном поле катушки до коммутации.

Так же как и в предыдущем случае, переходный процесс в короткозамкнутом контуре можно практически считать законченным спустя $t = (4 \div 5)\tau$.

3. Включение в цепь r, L синусоидальной э. д. с.

При включении в цепь r, L синусоидальной э. д. с. $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$ принужденный ток будет:

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}.$$

На основании (14-9)

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где

$$\tau = \frac{L}{r}.$$

Постоянная интегрирования определяется по начальному условию $i(0) = i(0-) = 0$.

Следовательно $0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A$, откуда $A = -I_m \sin(\psi - \varphi)$. Поэтому искомый ток будет:

$$i = I_m \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

На рис. 14-5, а изображены кривые $i_{пр}$, $i_{св}$ и i . Начальные ординаты $i_{пр}(0)$, $i_{св}(0)$ одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку; поэтому ток

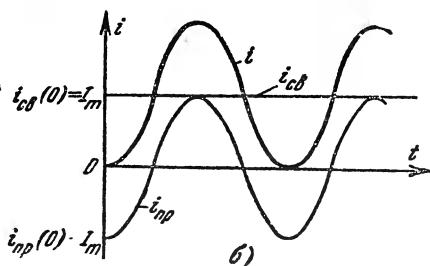
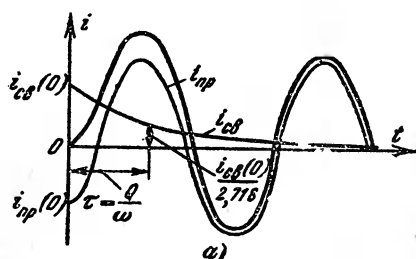


Рис. 14-5. Принужденный, свободный и переходный токи при включении в цепь r, L синусоидальной э. д. с.

в начальный момент равен нулю. Свободный ток убывает по показательному закону. По истечении времени $t = \tau$ свободный ток уменьшается в $e = 2,718$ раза по сравнению с начальным значением $i_{св}(0)$. Постоянная времени прямо пропорциональна добротности контура Q и обратно пропорциональна частоте ω :

$$\tau = \frac{\omega L}{\omega r} = \frac{Q}{\omega}.$$

Если в момент коммутации ($t = 0$) ток $i_{св}$ проходит через нуль, т. е. выполняется условие $\psi = \varphi$ или $\psi = \varphi \pm \pi$, то свободный ток не возникает и в цепи сразу наступает принужденный, установившийся режим без переходного процесса.

Если же коммутация происходит при $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, то начальный свободный ток максимален (рис. 14-5, б), а именно $i_{св}(0) = \mp I_m$, и ток переходного режима достигает экстремального значения (положительного или отрицательного) в конце первого полупериода. Однако даже в предельном случае, когда $r = 0$ и, следовательно, $\tau = \frac{L}{r} = \infty$, ток не может превышать амплитуды установившегося режима более чем вдвое.

При достаточно большой постоянной времени $\tau = L/r$ первым слагаемым в правой части дифференциального уравнения

$$e = ri + L \frac{di}{dt}$$

можно пренебречь по сравнению со вторым слагаемым, приняв при-

ближенно $e \approx L \frac{di}{dt}$, откуда $i \approx \frac{1}{L} \int_0^t e dt$ и соответственно $u_r = ri \approx$

$$\approx \frac{r}{L} \int_0^t e dt.$$

Следовательно, цепь с последовательно соединенными сопротивлением и индуктивностью при большой постоянной времени можно рассматривать как интегрирующее звено.

В свою очередь при достаточно малой постоянной времени, пренебрегая вторым слагаемым уравнения, приближенно получаем:

$$e \approx ri,$$

откуда

$$u_L = L \frac{di}{dt} \approx \frac{L}{r} \frac{de}{dt},$$

т. е. цепь с последовательно соединенными сопротивлением и индуктивностью при малой постоянной времени представляет собой дифференцирующее звено.

В обоих случаях функция $e(t)$ может быть произвольной.

Интегрирующие и дифференцирующие звенья входят в качестве элементов в системы автоматического управления и регулирования.

14-5. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПИ r, C

Положим, что в момент $t = 0$ цепь, состоящая из сопротивления r и емкости C , включенных последовательно, присоединяется к источнику э. д. с. $e(t)$ (рис. 14-6).

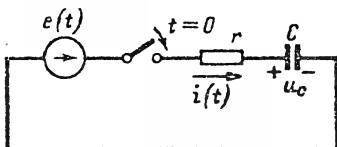


Рис. 14-6. Включение цепи r, C .

На основании второго закона Кирхгофа уравнение для времени $t \geq 0$ имеет вид:

$$e = ri + u_C,$$

где u_C — напряжение на емкости.

С учетом того, что $i = C \frac{du_C}{dt}$, получим:

$$e = rC \frac{du_C}{dt} + u_C;$$

здесь искомой величиной является напряжение на емкости.

Характеристическое уравнение $1 + rCp = 0$ и соответственно корень уравнения $p_1 = -\frac{1}{rC}$. Следовательно, свободная слагающая напряжения на емкости

$$u_{C\text{ св}} = Ae^{-\frac{t}{rC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = rC$ — постоянная времени контура r, C (измеряется в секундах: $[rC] = \text{ом} \cdot \text{ф} = \text{ом} \cdot \frac{\text{а} \cdot \text{сек}}{\text{в}} = \text{сек}$).

Переходное напряжение на емкости равно сумме принужденного и свободного напряжений:

$$u_{\tau} = u_{C\text{ пр}} + \underbrace{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{свободное}}. \quad (14-12)$$

В свою очередь ток в контуре

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_{Cnp}}{dt} - \frac{A}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (14-13)$$

Рассмотрим три случая:

- 1) включение в цепь r , C постоянной э. д. с. E ;
- 2) короткое замыкание цепи r , C ;
- 3) включение в цепь r , C синусоидальной э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \psi)$.

1. Включение в цепь r , C постоянной э. д. с.

Включим постоянную э. д. с. E в цепь с сопротивлением r и предварительно заряженной емкостью C (полярности заряженной емкости указаны на рис. 14-6 знаками $+$ и $-$); начальное напряжение на емкости $u_C(0)$ обозначим для простоты через U .

Принужденное напряжение на емкости равно э. д. с. источника. Поэтому согласно (14-12)

$$u_C = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (14-14)$$

Постоянная интегрирования A , входящая в (14-14), находится по начальному условию:

При $t = 0$ имеем $U = E + A$, откуда $A = U - E$.

Следовательно,

$$u_C = E - (E - U)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (14-15)$$

Согласно (14-13) ток в контуре

$$i = \frac{E - U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (14-16)$$

Если $E > U$, то с течением времени напряжение на емкости возрастает, стремясь к установившемуся значению E , а ток убывает, стремясь в пределе к нулю; на рис. 14-7, а изображены кривые нарастания u_C и спада i . Чем больше постоянная времени, тем медленнее происходят нарастание u_C и спад i .

Если $E < U$, то кривые u_C и i имеют вид, показанный на рис. 14-7, б.

Постоянная времени $\tau = rC$ может быть найдена так же, как раньше, графически как подкасательная к кривой i в любой точке (например при $t = 0$).

Закон изменения напряжения на емкости и тока в данной цепи аналогичен закону изменения тока и напряжения u_L в контуре r, L , рассмотренном ранее. Поэтому все сказанное о постоянной времени в предыдущем случае сохраняет силу для данного случая.

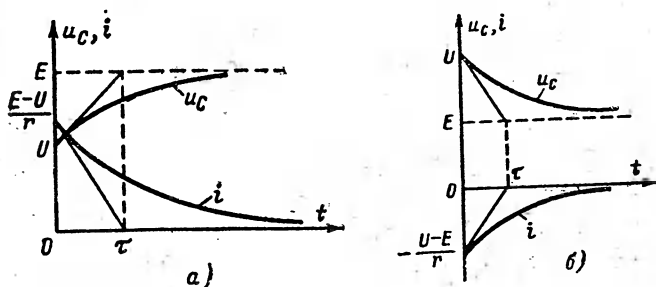


Рис. 14-7. Ток и напряжение при включении в цепь r, C постоянной э. д. с.

2. Короткое замыкание цепи r, C

Замыкание накоротко цепи, состоящей из последовательно соединенных r и C , равносильно принятию в предыдущем случае э. д. с., равной нулю. Предполагается, что емкость C заряжена, т. е. в момент включения на ее зажимах имеется напряжение U .

Положив в (14-15) и (14-16) э. д. с. E равной нулю, получим:

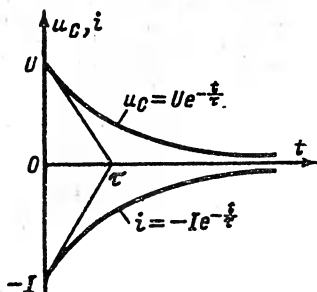


Рис. 14-8. Ток и напряжение при коротком замыкании цепи r, C .

где

$$u_C = Ue^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$i = -Ie^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$I = \frac{U}{r}.$$

При коротком замыкании цепи r, C электрический ток идет от зажима $+$ к зажиму $-$. Следовательно, при выбранной на рис. 14-6 полярности емкости ток проходит через сопротивление r в направлении, противоположном

тому, которое принято на рис. 14-6 за положительное. Поэтому в выражении для тока стоит знак минус. На рис. 14-8 изображены кривые спада u_C и i .

В отличие от напряжения на емкости, которое изменяется непрерывно, ток в контуре r, C , пропорциональный скорости изменения u_C , совершает при $t=0$ скачок.

Энергия, рассеиваемая в сопротивлении r в течение всего переходного процесса, равна энергии, запасенной в электрическом поле до коммутации:

$$\int_0^{\infty} ri^2 dt = \frac{U^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{rC}} dt = \frac{CU^2}{2}.$$

Так же как и в случае цепи r, L , переходный процесс может считаться законченным спустя $t = (4 \div 5)\tau$, так как к этому времени емкость разрядится на 98,2—99,3% и напряжение на емкости снизится до 1,8—0,7% первоначального (см. § 14-4, случай 1).

3. Включение в цепь r, C синусоидальной э. д. с.

При включении в цепь r, C синусоидальной э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \psi)$ принужденное напряжение на емкости

$$u_{Cпр} = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

где

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{-1}{r\omega C}\right);$$

на основании (14-12)

$$u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если предполагать, что конденсатор не был заряжен, то постоянная интегрирования определится по начальному условию $u_C(0) = 0$:

$$(0) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi - \varphi) + A,$$

откуда

$$A = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi - \varphi).$$

Тогда искомое напряжение на емкости будет:

$$u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \left[\cos(\omega t + \psi - \varphi) - \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right],$$

а ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{1}{\omega C} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

Из написанных выражений видно, что если включение цепи r, C происходит в момент, когда принужденный ток должен достигать максимума — положительного или отрицательного (т. е. $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$), а принужденное напряжение на емкости должно быть равно нулю, то свободной слагающей напряжения на емкости не возникает и в цепи сразу без переходного процесса наступает принужденный установившийся режим.

Так как цепь r, C по протеканию переходного процесса подобна цепи r, L , то при соответствующем подборе параметров r и C она также может служить дифференцирующим и интегрирующим звеном.

14-6. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПИ r, L, C

При включении в цепь r, L, C э. д. с. $e(t)$ (рис. 14-9) переходный процесс исследуется с помощью дифференциального уравнения (14-3):

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}.$$

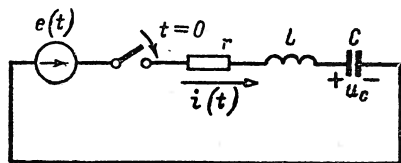


Рис. 14-9. Включение цепи r, L, C .

Соответствующее ему характеристическое уравнение (14-5)

$$Lp^2 + rp + \frac{1}{C} = 0.$$

имеет корни

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \\ &= -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (14-17)$$

где

$$\delta = \frac{r}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ — резонансная частота.}$$

Свободный ток согласно (14-6) равен:

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Ток в цепи определяется суммой принужденного и свободного токов:

$$i = i_{\text{пр}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (14-18)$$

Принужденный ток находится в соответствии с заданной э. д. с. $e(t)$. Что касается свободного тока, то его характер зависит от знака подкоренного выражения (14-17).

1. Включение в цепь r, L, C постоянной э. д. с.

Рассмотрим сначала случай, когда э. д. с. источника постоянна: $e = E$, и емкость имеет начальное напряжение $u_C(0) = U$.

Ввиду наличия индуктивности начальное значение тока $i(0) = 0$.

Исходное уравнение

$$E = ri + L \frac{di}{dt} + u_C.$$

для начального момента записывается в виде:

$$E = L \frac{di}{dt}(0) + u_C(0),$$

откуда находится начальное значение производной $\frac{di}{dt}(0)$, которое является зависимым начальным условием, необходимым для вычисления A_1 и A_2 :

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E - U}{L}. \quad (14-19)$$

При установившемся режиме ток будет равен нулю, что следует как из физического смысла, так и из вида правой части дифференциального уравнения (14-3). Продифференцировав (14-18) с учетом того, что $i_{пр}=0$, получим:

$$\frac{di}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (14-20)$$

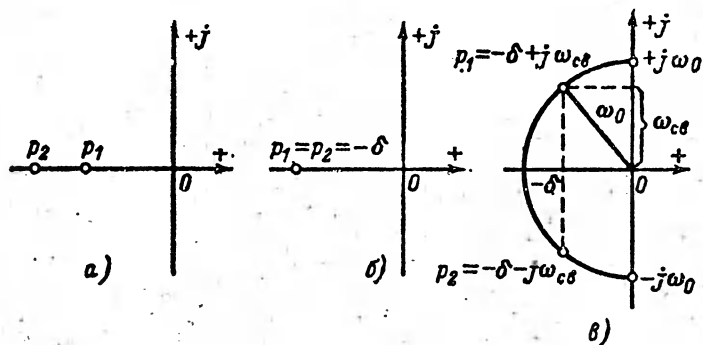


Рис. 14-10. Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости.

Подставляя в (14-18) и (14-20) $t=0$ и используя (14-19), получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2; \\ \frac{E-U}{L} &= A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует:

$$A_1 = -A_2 = \frac{E-U}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}.$$

Поэтому

$$i = \frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (14-21)$$

Рассмотрим возможные три случая.

Случай 1. $\delta > \omega_0$, т. е. $r > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ (апериодический процесс).

Согласно (14-17) корни характеристического уравнения p_1 и p_2 — отрицательные действительные числа (рис. 14-10, а). Если индекс 1 соответствует верхнему знаку перед корнем, то $|p_1| < |p_2|$ и поэтому кривая $e^{p_1 t}$ спадает медленнее, чем $e^{p_2 t}$.

На рис. 14-11 показана кривая i , построенная по выражению (14-21).

При больших значениях C влияние емкости мало и кривая тока приближается к кривой тока в цепи r, L (см. рис. 14-3); при малых значениях L влияние индуктивности незначительно и кривая тока близка к кривой тока в цепи r, C (рис. 14-7).

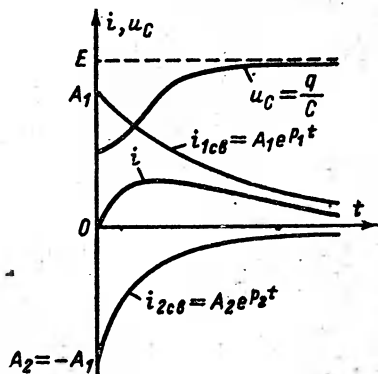


Рис. 14-11. Аперiodический процесс в цепи r, L, C .

Выражение (14-21) может быть преобразовано в гиперболическую форму

$$i = \frac{E - U}{L \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta t} \operatorname{sh} \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t. \quad (14-22)$$

Следует заметить, что при коротком замыкании цепи r, L, C , т. е. при $E=0$, ток в цепи обуславливается разрядом емкости.

Случай 2. $\delta = \omega_0$, т. е. $r = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ (критический случай).

Согласно (14-17) корни характеристического уравнения одинаковы:

$$p_1 = p_2 = -\frac{r}{2L} = -\delta$$

(см. рис. 14-10, б).

Выражение (14-21) приводит в этом случае к неопределенности вида $0/0$.

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья дифференцированием числителя и знаменателя по p_1 , получаем:

$$i = \lim_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{E - U}{L (p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E - U}{L} t e^{-\delta t}.$$

То же выражение получится, если воспользоваться общим решением однородного дифференциального уравнения с кратными корнями:

$$i_{св} = (B_1 + B_2 t) e^{-\delta t}.$$

В рассматриваемом случае $i_{св}(0) = B_1 = 0$ и

$$\frac{di}{dt} = B_2 e^{-\delta t} - B_2 \delta e^{-\delta t}.$$

Следовательно,

$$\frac{di}{dt}(0) = B_2 = \frac{E - U}{L}.$$

Кривая тока аналогична кривой i на рис. 14-11.

Случай 3. $\delta < \omega_0$, т. е. $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (колебательный процесс).

Корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}, \quad (14-23)$$

где

$$\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (14-24)$$

Согласно (14-24) $\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega_{св}^2}$.

Корни характеристического уравнения располагаются симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости, на полуокружности, центр которой совпадает с началом координат, а радиус равен $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(см. рис. 14-10, в).

Сопоставление рис. 14-10, а, б и в показывает, что о характере переходного процесса в цепи r, L, C можно судить по расположению корней характеристического уравнения, т. е. нулей функции $Z(p)$, на комплексной плоскости.

Если расположенные в левой полуплоскости нули функции $Z(p)$ лежат на действительной оси, то имеет место аperiодический процесс: совмещению нулей в одной точке отвечает критический случай; наконец, если нули функции $Z(p)$ являются комплексно-сопряженными, то имеет место колебательный процесс.

Величина $\omega_{св}$ (рис. 14-10, в) называется угловой частотой свободных или собственных колебаний в цепи r, L, C , а $T_{св} = 2\pi/\omega_{св}$ — периодом этих колебаний.

Ток в цепи согласно (14-22)

$$i = \frac{E-U}{j\omega_{св}L} e^{-\delta t} \operatorname{sh} j\omega_{св}t = \frac{E-U}{\omega_{св}L} e^{-\delta t} \sin \omega_{св}t^*. \quad (14-25)$$

Полученное выражение показывает, что при включении цепи r, L, C на постоянное напряжение, когда $\delta < \omega_0$, в цепи возникают затухающие синусоидальные колебания, причем огибающими кривой тока служат кривые $\pm \frac{E-U}{\omega_{св}L} e^{-\delta t}$ (рис. 14-12). Колебания возникают вследствие периодического преобразования энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно, причем эти колебания сопровождаются потерей энергии в сопротивлении.

При $t = 1/\delta$ ордината огибающей в $e = 2,718$ раза меньше начального значения огибающей. Поэтому величину $1/\delta = 2L/r$ называют постоянной времени колебательного контура.

На рис. 14-12 показана также кривая напряжения u_C на емкости, которая в другом масштабе выражает также зависимость электрического заряда q от времени. Функции u_C и i имеют одинаковый множитель затухания. При нулевых начальных условиях ($U=0$) кривая i_C начинается с нуля.

Как видно из (14-23) и рис. 14-10, в, угловая частота этих колебаний $\omega_{св}$ определяется абсолютной величиной

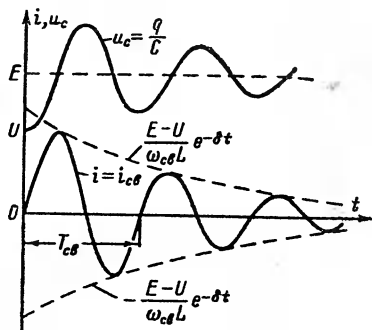


Рис. 14-12. Колебательный процесс при включении в цепь r, L, C постоянной э. д. с.

* Тот же результат получится, если исходить из общего решения однородного дифференциального уравнения с комплексно-сопряженными корнями:

$$i_{св} = (M \cos \omega_{св}t + N \sin \omega_{св}t) e^{-\delta t}.$$

ординаты корня характеристического уравнения, которая при $\delta \neq 0$ всегда меньше резонансной частоты ω_0 .

Чем меньше δ по сравнению с ω_0 , тем медленнее затухает колебательный процесс и тем больше частота собственных колебаний цепи r, L, C приближается к резонансной частоте.

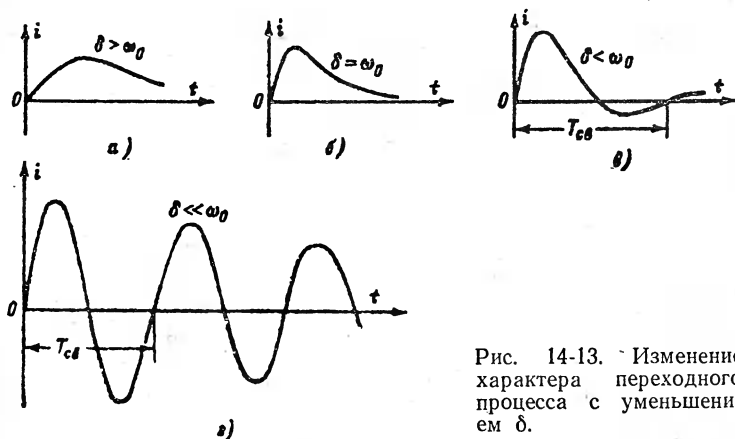


Рис. 14-13. Изменение характера переходного процесса с уменьшением δ .

В пределе, при $\delta = 0$ $\omega_{св} = \omega_0$, колебания не затухают и корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси (см. рис. 14-10, в).

О быстроте затухания колебательного процесса судят по величине $e^{\delta T_{св}}$, называемой декрементом колебания, или величине $\theta = \ln e^{\delta T_{св}} = \delta T_{св}$, называемой логарифмическим декрементом колебания.

На рисунке 14-13, а—г показано изменение характера переходного процесса при уменьшении δ .

Приведенные выше величины $\omega_{св}$ и θ связаны с параметрами последовательного резонансного контура — добротностью $Q = \omega_0 L / r$ и затуханием $d = 1/Q$, введенными в гл. 5:

$$\omega_{св} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\omega_0 L}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}.$$

При достаточно высокой добротности $\omega_{св} \approx \omega_0$. В этом случае $\theta = \frac{\delta 2\pi}{\omega_{св}} \approx \frac{\pi}{Q}$, откуда $d \approx \theta/\pi$. Для контура среднего качества $d \approx 0,01$ и логарифмический декремент $\theta \approx 0,03$.

2. Включение в цепь r, L, C синусоидальной э. д. с.

Если цепь r, L, C присоединяется к источнику синусоидальной э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \psi)$, то принужденный ток равен:

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$$

и переходный ток согласно (14-18) равен:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Кривые принужденного, свободного и переходного токов при апериодическом и колебательном процессах показаны в виде примера на рис. 14-14.

Частота принужденного тока равна частоте источника синусоидального напряжения, свободный же ток при $\delta < \omega_0$ изменяется с собственной частотой цепи $\omega_{св}$. Частота $\omega_{св}$ может быть в зависимости от параметров r, L и C меньше, больше или равна частоте ω .

Свободные колебания тока накладываются на принужденный ток и затухают пропорционально множителю $e^{-\delta t}$. По мере затухания свободного тока кривая переходного тока приближается к кривой принужденного тока.

Та из двух слагающих тока i , частота которой меньше, служит как бы криволинейной осью для другой слагающей, колеблющейся относительно нее (рис. 14-14, б). При близком совпадении частот ω и $\omega_{св}$ в цепи возникают биения. Этот вопрос подробнее рассмотрен в [Л. 12 и 14].

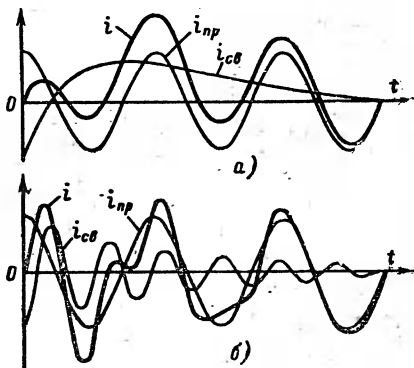


Рис. 14-14. Апериодический (а) и колебательный (б) процессы при включении в цепь r, L, C синусоидальной э. д. с.

14-7. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ

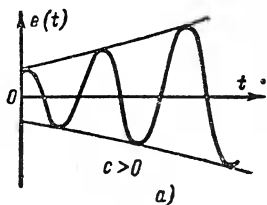
Переходный процесс в разветвленной линейной электрической цепи описывается системой линейных диффе-

ренциальных уравнений с постоянными коэффициентами, общее решение которых находится как сумма принужденной и свободной составляющих.

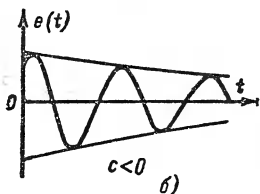
Рассмотрим сначала методику расчета принужденного режима.

Во многих случаях воздействующая функция, например э. д. с. источника, может быть представлена в обобщенной форме $E_m e^{i\psi} e^{pt}$, где $p = c + j\omega$ — комплексное число. В зависимости от значений буквенных величин, входящих в приведенное выражение, получается тот или иной закон изменения э.д.с., причем мгновенные значения э. д. с. определяются мнимой или действительной частью выражения.

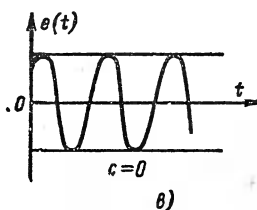
Условие $\omega \neq 0$ соответствует гармонической э. д. с. с возрастающей ($c > 0$), убывающей ($c < 0$) или неизменной ($c = 0$) амплитудой (рис. 14-15).



а)



б)



в)

Рис. 14-15. «Синусоиды» с возрастающей (а), убывающей (б) и неизменной (в) амплитудами.

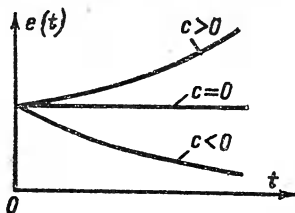


Рис. 14-16. Возрастающая ($c > 0$) и убывающая ($c < 0$) показательные функции и постоянная ($c = 0$).

Условие $\omega = 0$ соответствует возрастающей ($c > 0$) или убывающей ($c < 0$) показательной функции; при $c = 0$ э. д. с. постоянна (рис. 14-16).

Задавшись э. д. с. $E_m e^{i\psi} e^{pt}$, ищем принужденный ток в виде $I_m e^{i\alpha} e^{pt}$. Данная функция при дифференцировании (по переменной t) умножается на p , а при интегрировании делится на p . Поэтому подстановка выражения

$I_m e^{j\alpha} e^{pt}$ в исходное дифференциальное) (или интегродифференциальное) уравнение приводит к алгебраическому уравнению, которое отличается от уравнения для установившегося режима, записанного в комплексной форме, только тем, что $j\omega$ заменяется на p . Таким образом, принужденный ток получается равным

$$I_{\text{пр}}(t) = \frac{E_m e^{j\psi} e^{pt}}{Z(p)} = \frac{E_m e^{ct} e^{j(\omega t + \psi)}}{Z(c + j\omega)}.$$

В зависимости от схемы и постановки задачи $Z(p)$ означает обобщенное входное сопротивление или величину, обратную обобщенной передаточной проводимости; $Z(p)$ получается из соответствующего комплексного сопротивления заменой $j\omega L$ на pL и $1/j\omega C$ на $1/pC$.

Мгновенные значения тока определяются мнимой или действительной частью $I_{\text{пр}}(t)$.

В случае синусоидальной э. д. с. ($c=0$; $p=j\omega$) принужденный ток равен установившемуся синусоидальному току

$$I_{\text{уст}}(t) = \frac{E_m e^{j(\omega t + \psi)}}{Z(j\omega)}.$$

Если э. д. с. есть показательная функция ($\psi=0$; $p=c$; $E_m=E$), то принужденный ток изменяется также по показательному закону

$$i_{\text{пр}}(t) = \frac{E e^{ct}}{Z(c)},$$

где

$$Z(c) = [Z(p)]_{p=c}.$$

При постоянной э. д. с. ($\psi=0$; $p=0$; $E_m=E$) принужденный ток равен установившемуся постоянному току

$$I = \frac{E}{z(0)},$$

где $z(0)$ — сопротивление при постоянном токе.

Перейдем теперь к рассмотрению свободного режима.

Свободные составляющие представляют собой общее решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений. Для заданной цепи степень характеристического уравнения не зависит от выбора контуров, для которых составляются уравнения по второму закону Кирхгофа. Однако если выбрать контуры так, чтобы по-

рядок дифференциальных уравнений был наименьшим, то степень характеристического уравнения не будет превышать суммы порядков исходных дифференциальных уравнений системы. При этом, как будет показано ниже, для получения характеристического уравнения отнюдь не обязательно приводить систему дифференциальных уравнений к одному уравнению относительно одной неизвестной функции.

Корни характеристического уравнения могут быть действительными или комплексными. Если корни комплексные, то они всегда образуют комплексно-сопряженные пары. В связи с этим характеристическое уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень, остальные же корни могут быть действительными или комплексно-сопряженными; характеристическое уравнение четной степени имеет четное число действительных или комплексно-сопряженных корней. Действительные части всех корней характеристического уравнения всегда отрицательны, что физически обусловлено затуханием свободных составляющих в пассивных цепях с течением времени. При этом все коэффициенты характеристического уравнения должны быть действительными и положительными.

Корни единого характеристического уравнения используются для нахождения в данной цепи свободных составляющих как токов, так и напряжений.

Допустим, что характеристическое уравнение имеет n корней. Тогда свободный ток в любой ветви

$$i_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}; \quad (14-26)$$

здесь p_k — корни характеристического уравнения, A_k — постоянные интегрирования.

Аналогичная структура решения получается и для свободных составляющих напряжений.

В случае, когда $p_k = -\delta_k$ является действительным корнем m -й кратности, решение для этого корня записывается в виде

$$e^{-\delta_k t} \sum_{i=1}^m B_i t^{i-1}.$$

Если имеются сопряженные комплексные корни, например $p_k, p_{k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$, то выражение $A_k e^{p_k t} + A_{k+1} e^{p_{k+1} t}$

преобразуется в $e^{-\delta_k t} (A_k e^{j\omega_k t} + A_{k+1} e^{-j\omega_k t}) = e^{-\delta_k t} (M \cos \omega_k t + N \sin \omega_k t)$.

Для m -кратных сопряженных комплексных корней решение принимает вид:

$$e^{-\delta_k t} \sum_{i=1}^m t^{i-1} (M_i \cos \omega_k t + N_i \sin \omega_k t).$$

Методика получения характеристического уравнения иллюстрирована ниже на примере двухконтурной схемы, изображенной на рис. 14-17.

Первый контур содержит сопротивления r_1 и r_3 и индуктивность L , второй контур содержит сопротивления r_2 и r_3 и емкость C ; поэтому порядок дифференциального уравнения для каждого из этих контуров равен единице:

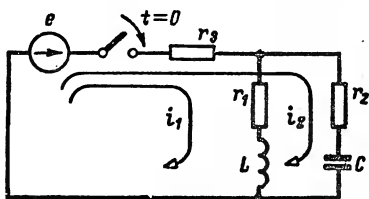


Рис. 14-17. Пример двухконтурной схемы.

$$r_3(i_1 + i_2) + r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} = e;$$

$$r_3(i_1 + i_2) + r_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt = e.$$

Соответственно степень характеристического уравнения равна 2.

Для получения характеристического уравнения применяется следующий прием. Система дифференциальных уравнений для свободных слагающих токов

$$r_3(i_{1\text{св}} + i_{2\text{св}}) + r_1 i_{1\text{св}} + L \frac{di_{1\text{св}}}{dt} = 0;$$

$$r_3(i_{1\text{св}} + i_{2\text{св}}) + r_2 i_{2\text{св}} + \frac{1}{C} \int i_{2\text{св}} dt = 0$$

записывается в символической алгебраической форме, при которой символ p заменяет операцию дифференцирования, а символ $1/p$ — операцию интегрирования:

$$(r_1 + r_3 + pL) i_{1\text{св}} + r_3 i_{2\text{св}} = 0;$$

$$r_3 i_{1\text{св}} + \left(r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \right) i_{2\text{св}} = 0.$$

Данная система уравнений имеет решение, отличное от нулевого, если определитель системы равен нулю, т. е.

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} r_1 + r_3 + pL & r_3 \\ r_3 & r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} & (r_1 + r_3 + pL) \left(r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \right) - r_3^2 = \\ & = \frac{1}{pC} \{ (r_2 + r_3) L C p^2 + [(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) C + \\ & + L] p + r_1 + r_3 \} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получается характеристическое уравнение второй степени:

$$\begin{aligned} & (r_2 + r_3) L C p^2 + [(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) C + L] p + \\ & + r_1 + r_3 = 0. \end{aligned}$$

Ввиду прямой пропорциональности, существующей между входным сопротивлением цепи $Z(p)$ и определителем системы $\Delta(p)$ [см., например, (7-9) в § 7-5], то же характеристическое уравнение получается и по формуле $Z(p) = 0$.

Обобщенное сопротивление $Z(p)$ получается из комплексного сопротивления $Z(j\omega)$ заменой $j\omega$ на p . При этом, разомкнув любую ветвь в пассивной цепи, находим в месте размыкания входное сопротивление $Z(p)$ *.

Если характеристическое уравнение имеет степень n , то искомыми являются n постоянных интегрирования ($A_1, A_2, \dots, A_n$), входящих в выражение (14-26) **. Постоянные интегрирования находятся в результате решения системы n уравнений, соответствующих моменту вре-

* Предыдущие рассуждения основывались на уравнениях контурных токов. Аналогично, исходя из метода узловых напряжений, можно показать, что $Y(p) = 0$ также является характеристическим уравнением, если под $Y(p)$ подразумевать обобщенную проводимость между любыми двумя узлами заданной схемы пассивной цепи.

** Методика вычисления постоянных интегрирования остается такой же и в случае кратных или комплексных корней характеристического уравнения.

мени $t=0$. Эта система уравнений получается путем $(n-1)$ -кратного дифференцирования уравнения (14-26):

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{св}}(0) &= i(0) - i_{\text{пр}}(0) = \sum_{k=1}^n A_k; \\ i'_{\text{св}}(0) &= i'(0) - i'_{\text{пр}}(0) = \sum_{k=1}^n p_k A_k; \\ &\dots\dots\dots \\ i^{(n-1)}_{\text{св}}(0) &= i^{(n-1)}(0) - i^{(n-1)}_{\text{пр}}(0) = \\ &= \sum_{k=1}^n p_k^{n-1} A_k. \end{aligned} \right\} \quad (14-27)$$

Значения свободного тока и его производных при $t=0$, входящие в (14-27), находятся предварительно на основании законов коммутации (см. § 14-2) и уравнений Кирхгофа.

Для определения начальных значений токов и напряжений в цепи можно для наглядности воспользоваться схемой замещения, которая составляется из исходной схемы после коммутации, если заменить индуктивности идеальными источниками тока с токами, равными $i_L(0)$, а емкости — идеальными источниками напряжения с э. д. с., равными $u_C(0)$. Эта схема замещения справедлива только для $t=0$.

При нулевых начальных условиях индуктивность равносильна разрыву ветви, а емкость — короткому замыканию.

По этой схеме замещения можно найти другие токи и напряжения в момент $t=0$, если воспользоваться уравнениями Кирхгофа или правилами преобразования схем.

Итак, в соответствии со сказанным выше расчет переходного процесса классическим методом проводится в следующем порядке:

1. Производится расчет режима до коммутации, из которого определяются конечные значения (т. е. при $t=0$ —) функций, не меняющихся скачком (токов в индуктивностях, напряжений на емкостях). Далее с использованием законов коммутации находятся независимые начальные условия, т. е. $i_L(0)$, $u_C(0)$.

2. Составляется система дифференциальных уравнений Кирхгофа, описывающая процесс в цепи после коммутации.

3. Находится общее решение системы однородных дифференциальных уравнений.

4. Находится тем или иным методом частное решение системы неоднородных дифференциальных уравнений,

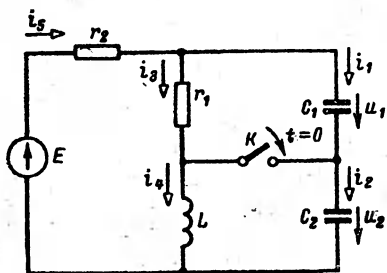


Рис. 14-18. Пример 14-1.

указанных в п. 2, соответствующее принужденному режиму цепи.

5. Определяются независимые начальные условия для искомых функций на основании найденных в п. 1 независимых начальных условий и уравнений Кирхгофа из п. 2, примененных для $t=0$.

6. По начальным условиям определяют постоянные интегрирования, содержащиеся в общем решении.

7. Найденные принужденные и свободные токи и напряжения складываются¹.

Приведенный ниже пример 14-1 иллюстрирует нахождение начальных условий; в примере 14-2 дан численный расчет переходного процесса в цепи на рис. 14-17.

Пример 14-1. В цепи, изображенной на рис. 14-18, моменту $t=0$ предшествовал установившийся режим постоянного тока. При $t=0$ замкнулся контакт K . Найти начальные значения тока в индуктивности и напряжений на емкостях и их первых производных.

Независимыми начальными условиями будут ток в индуктивности $i_4(0) = i_4(0-) = \frac{E}{r_1 + r_2}$ и напряжения на емкостях $u_1(0) = u_1(0-)$ и $u_2(0) = u_2(0-)$.

Напряжения на емкостях до коммутации находятся из условий равенства их зарядов (так как емкости соединены последовательно) и равенства суммарного напряжения на емкостях напряжению на сопротивлении r_1 :

$$C_1 u_1(0-) = C_2 u_2(0-);$$

$$u_1(0-) + u_2(0-) = r_1 i_3(0-) = r_1 i_4(0-),$$

¹ В случае, когда э. д. с. изменяется в виде импульса, имеющего кусочно-аналитическую форму, представляется часто целесообразным применять интеграл Дюамеля (см. § 15-11).

откуда

$$u_1(0-) = r_1 i_4(0-) \frac{C_2}{C_1 + C_2};$$

$$u_2(0-) = r_1 i_4(0-) \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Требуемые зависимые начальные условия определяются из уравнений

$$C_1 \frac{du_1}{dt}(0) = i_1(0) \quad \text{и} \quad C_2 \frac{du_2}{dt}(0) = i_2(0),$$

токи же $i_1(0)$ и $i_2(0)$ — из уравнения Кирхгофа после коммутации:

$$E = r_2 i_5 + u_1 + u_2, \quad u_1 = r_1 i_3; \quad i_1 + i_3 = i_2 + i_4 = i_5.$$

Подстановка в эти уравнения найденных значений $i_4(0)$, $u_1(0)$ и $u_2(0)$ дает:

$$i_5(0) = \frac{E - u_1(0) - u_2(0)}{r_2}; \quad i_3(0) = \frac{u_1(0)}{r_1};$$

$$i_1(0) = i_5(0) - i_3(0); \quad i_2(0) = i_5(0) - i_4(0)$$

и далее

$$\frac{du_1}{dt}(0) = \frac{i_1(0)}{C_1}; \quad \frac{du_2}{dt}(0) = \frac{i_2(0)}{C_2}.$$

Начальное значение производной тока в индуктивности определяется также из уравнения Кирхгофа:

$$E = r_2 i_5 + r_1 i_3 + L \frac{di_4}{dt},$$

откуда при $t=0$

$$\frac{di_4}{dt}(0) = \frac{E - r_2 i_5(0) - r_1 i_3(0)}{L}.$$

Пример 14-2. Определить ток i_4 в цепи на рис. 14-17, если известно, что $e=E=100$ в, $r_1=5$ ом, $r_2=3$ ом, $r_3=100$ ом, $L=0,1$ гн, $C=100$ мкф, $u_C(0)=0$.

Подстановка заданных величин в приведенное выше характеристическое уравнение дает:

$$1,03 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,1815 p + 105 = 0,$$

или

$$p^2 + 176 p + 1,02 \cdot 10^5 = 0;$$

корни характеристического уравнения комплексные:

$$p_{1,2} = -88 \pm j 307.$$

Искомый ток

$$i_1 = i_{1пр} + i_{1св}.$$

Принужденный ток

$$i_{\text{пр}} = \frac{100}{105} = 0,952 \text{ а.}$$

Свободный ток

$$i_{\text{св}} = e^{-88t} (A_1 e^{j307t} + A_2 e^{-j307t}) = e^{-88t} (M \cos 307t + N \sin 307t).$$

В начальный момент $i_1(0) = 0$; следовательно, $0 = 0,952 + M$, откуда $M = -0,952$.

Производная тока по времени

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= e^{-88t} (-307M \sin 307t + 307N \cos 307t) - \\ &- 88e^{-88t} (M \cos 307t + N \sin 307t). \end{aligned}$$

В начальный момент $u_c(0) = 0$, $i_1(0) = 0$ и $i_2(0) = \frac{100}{103} = 0,971 \text{ а.}$

Следовательно, в начальный момент напряжение на ветви r_2C (и параллельной ей ветви r_1L) равно $3 \cdot 0,971 = 2,913 \text{ а.}$ Начальное значение производной $di_1/dt(0)$ определяется из уравнения $2,913 = 0,1 \frac{di_1}{dt}(0)$, откуда $\frac{di_1}{dt}(0) = 29,13$. $2,913 - \frac{di_1}{dt}(0)r_1 = 0,1 \frac{di_1}{dt}(0)$

Следовательно, подставляя значение $\frac{di_1}{dt}(0)$ в выражение для производной при $t=0$, получаем:

$$29,13 = 307N - 88M = 307N + 83,8,$$

откуда

$$N = -0,178.$$

Итак,

$$i_1 = 0,952 - e^{-88t} (0,952 \cos 307t + 0,178 \sin 307t), \text{ а.}$$

14-8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами (в линиях, обмотках электрических машин и т. п.) возникают при коммутациях, передаче непериодических сигналов или под влиянием внешнего электромагнитного поля (например, при грозовых разрядах). Для исследования переходных процессов в однородных цепях с распределенными параметрами пользуются диф-

ференциальными уравнениями (11-2) в частных производных, выведенными в гл. 11:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t},$$

где r , L , g и C — параметры цепи на единицу длины; x — координата рассматриваемой точки, отсчитываемая от начала цепи.

В общем виде решение этих дифференциальных уравнений достаточно сложно. Решение упрощается, если пренебречь потерями, т. е. считать, что r и g равны нулю. В этом случае

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (14-28)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (14-29)$$

Дифференцируя (14-28) по x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = -L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)$$

и используя (14-29), получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14-30)$$

Дифференциальное уравнение (14-30) известно в математической физике под названием уравнения колебаний струны. Его решение дано Даламбером и имеет вид:

$$u = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \quad (14-31)$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Первая слагающая представляет собой одиночную прямую волну напряжения, которая без изменения перемещается в сторону возрастающих x , т. е. от начала к концу цепи. Для всех значений x , при которых $x - vt = \text{const}$, эта слагающая имеет одно и то же значение, т. е. волна движется со скоростью $v = dx/dt$.

Вторая слагающая представляет собой одиночную обратную волну напряжения, которая без изменения перемещается в противоположном направлении.

Для нахождения тока произведем замену переменных, обозначив $\xi = x - vt$ и $\eta = x + vt$. На основании (14-29) и (14-31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &= -C \frac{\partial}{\partial t} (f_1 + f_2) = \\ &= -C \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = Cv \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial \eta}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial i}{\partial t} = Cv \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right).$$

Интегрирование последнего уравнения дает¹:

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]. \quad (14-32)$$

Выражения (14-31) и (14-32) записываются сокращенно:

$$u = u_{\text{п}} + u_{\text{о}}; \quad (14-33)$$

$$i = \frac{1}{z_{\text{в}}} (u_{\text{п}} - u_{\text{о}}) = i_{\text{п}} - i_{\text{о}}, \quad (14-34)$$

здесь $i_{\text{п}}$ и $i_{\text{о}}$ — прямая и обратная волны тока; $z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — волновое сопротивление.

Следовательно, напряжение и ток прямой и соответственно обратной волн связаны законом Ома:

$$\frac{u_{\text{п}}}{i_{\text{п}}} = \frac{u_{\text{о}}}{i_{\text{о}}} = z_{\text{в}}.$$

Аналогичный результат был получен в § 11-3 для установившихся прямой и обратной волн при рассмотрении синусоидального режима в однородной линии.

¹ Постоянная интегрирования может быть отнесена к функциям f_1 и f_2 .

Физически установившиеся волны представляют собой бесконечные суммы прямых и обратных одиночных волн, отраженных от обоих концов линии.

Итак, при отсутствии потерь в однородной цепи с распределенными параметрами напряжение и ток могут быть представлены как сумма и разность двух волн, движущихся с одинаковой скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ в противо-

положных напряжениях, без изменения их формы. При этом в любой точке однородной цепи отношение напряжения и тока для прямой и обратной волн равно волновому сопротивлению z_B .

Если на пути распространения волны встречается неоднородность, например воздушная линия переходит в кабельную или волна достигает конца линии (разомкнутого или замкнутого через сопротивление или на короткое), происходит отражение волны. В зависимости от характера неоднородности отражение может быть частичным или полным. В первом случае наряду с отраженной волной возникает преломленная волна, распространяющаяся за место нарушения однородности; во втором случае преломленная волна отсутствует.

Обозначим u_1 и i_1 — напряжение и ток в месте отражения;

$u_{1п}$ и $i_{1п}$ — напряжение и ток падающей (прямой) волны;

$u_{1о}$ и $i_{1о}$ — напряжение и ток отраженной (обратной) волны;

u_2 и i_2 — напряжение и ток преломленной (прямой) волны;

z_1 и z_2 — волновые сопротивления для прямой и обратной волны (z_1) и преломленной волны (z_2).

В месте неоднородности выполняется условие равенства напряжений и токов:

$$u_1 = u_2, \quad i_1 = i_2.$$

Следовательно,

$$u_{1п} + u_{1о} = u_2; \quad (14-35)$$

$$i_{1п} - i_{1о} = i_2. \quad (14-36)$$

Подстановка в (14-36) значений $i_{1п} = u_{1п}/z_1$, $i_{1о} = -u_{1о}/z_1$ и $i_2 = u_2/z_2$ дает:

$$\frac{u_{1п} - u_{1о}}{z_1} = \frac{u_2}{z_2}. \quad (14-37)$$

В результате совместного решения уравнений (14-35) — (14-37) находятся отраженная (u_{10}) и преломленная (u_2) волны:

$$\left. \begin{aligned} u_{10} &= nu_{1п}; \\ u_2 &= (1 + n) u_{1п}; \end{aligned} \right\} \quad (14-38)$$

где $n = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$ — коэффициент отражения.

Соответственно ток отраженной волны

$$i_{10} = \frac{u_{10}}{z_1} = n \frac{u_{1п}}{z_1},$$

а ток преломленной волны

$$i_2 = \frac{u_2}{z_2} = \frac{(1 + n) u_{1п}}{z_2} = \frac{2u_{1п}}{z_1 + z_2}.$$

Последнее выражение показывает, что ток в конце линии после отражения можно найти как ток в эквивалентной цепи, в которую включается напряжение, равное двойному напряжению падающей волны, и которая состоит из волнового сопротивления первой линии z_1 и последовательно соединенного с ним сопротивления нагрузки (в которое входит вторая линия своим волновым сопротивлением z_2).

Опишем процесс включения однородной линии без потерь. После присоединения линии к источнику э. д. с. по линии начнет распространяться зарядная волна, создающая напряжение и ток. Если в конце линии присоединена нагрузка, равная волновому сопротивлению линии, то падающая волна, достигнув ее, не отразится и в линии сразу наступит установившийся режим. Если же нагрузка с линией не согласована, то падающая зарядная волна, достигнув конца линии, претерпит отражение. Распространяясь в обратную сторону, отраженная волна сложится с падающей, причем напряжения волн суммируются, а токи вычитаются (алгебраически). Достигнув начала линии, обратная волна снова отразится от источника э. д. с., как от короткозамкнутого конца; появится новая прямая волна напряжения и тока, которая также отразится от конца, и т. д.. Процесс будет продолжаться до наступления установившегося режима. Теоретически в идеальной линии без потерь при чисто реактивной нагрузке процесс колебаний будет продолжаться бесконечно долго. В реальной ли-

нии при наличии потерь волны напряжения и тока будут постепенно затухать в направлении распространения.

Напряжение и ток в линии в произвольный момент времени определяются как алгебраические суммы и соответственно разности напряжений и токов прямых и обратных волн.

Пользуясь формулами и схемой замещения, описанной выше, можно найти напряжение и ток, возникающие в месте присоединения сосредоточенной нагрузки или перехода одной линии в другую (см. пример 14-3).

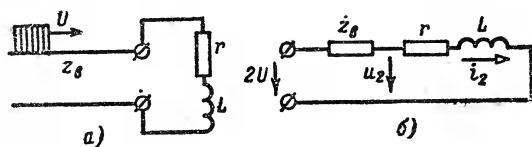


Рис. 14-19. Пример 14-3.

Следует отметить, что индуктивность, включенная последовательно в линию, или емкость, включенная параллельно проводам линии, сглаживает фронт преломленных волн; активное сопротивление, включенное в линию параллельно, уменьшает преломленную волну.

Различные случаи отражения и преломления волн рассмотрены в [Л. 5, 12 и 14].

Пример 14-3. К концу линии, имеющей волновое сопротивление z_B , присоединена индуктивная катушка r , L . Определить ток в катушке и напряжение на ней под воздействием прямоугольной волны U .

На рис. 14-19 показаны расчетная схема и эквивалентная схема замещения. Дифференциальное уравнение Кирхгофа для такой цепи запишется так:

$$2U = i_2(z_B + r) + L \frac{di_2}{dt};$$

откуда

$$i_2 = \frac{2U}{z_B + r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

и

$$u_2 = 2U - z_B i_2 = \frac{2U}{z_B + r} \left(r + z_B e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Здесь $\tau = \frac{L}{z_B + r}$; $t=0$ соответствует моменту падения волны на катушку.

14-9. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

14-1. Сопротивление $r=1000$ ом и незаряженная емкость $C=1$ мкф, соединенные последовательно, подключаются при $t=0$ к источнику постоянной э. д. с. $E=100$ в. Вычислить ток и первую производную тока по времени для $t=0$, не находя функциональной зависимости $i(t)$.

Ответ: $i(0)=0,1$ а;

$$\frac{di}{dt}(0) = -100 \text{ а/сек.}$$

14-2. Сопротивление $r=10$ ом и индуктивность $L=1$ гн, соединенные последовательно, приключаются при $t=0$ к источнику э. д. с. $E=100$ в. Вычислить ток и первую производную тока по времени для $t=0$, не находя функциональной зависимости $i(t)$.

Ответ: $i(0)=0$; $\frac{di}{dt}(0) = 100$ а/сек.

14-3. Сопротивление $r=10$ ом и незаряженная емкость $C=10$ мкф, соединенные последовательно, приключаются при $t=0$ к источнику э. д. с. $10 e^{-t} \sin t$, в. Определить $i(t)$.

Ответ: $i=10^{-4}e^{-t}(\cos t - \sin t) - 10^{-4}e^{-10^4 t}$, а.

14-4. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивлений $r=75$ ом, индуктивности $L=3 \cdot 10^{-4}$ гн и незаряженной емкости $C=12 \cdot 10^{-10}$ ф, подключается при $t=0$ к источнику постоянной э. д. с. $E=100$ в. Определить $i(t)$.

Ответ: $i=0,2 e^{-12,5 \cdot 10^4 t} \sin(1,66 \cdot 10^6 t)$, а.

14-5. Сопротивление $r=20$ ом и емкость $C=5$ мкф, соединенные последовательно, подключаются при $t=0$ к источнику постоянной э. д. с. $E=25$ в. Определить $i(t)$, если начальное напряжение на емкости равно 50 в.

Ответ: $i=3,75 e^{-10^4 t}$, или $i=-1,25 \cdot 10^4 t$, а.

14-6. Сопротивление $r=50$ ом и незаряженная емкость $C=3,75$ мкф, соединенные последовательно, подключаются при $t=0$ к источнику э. д. с. $E=20$ в. Определить $i(t)$.

Ответ: $i=0,4 e^{-5 \cdot 10^3 t}$, а.

14-7. В цепи на рис. 14-17 $r_2=0$ и $e=E$. Определить: 1) напряжения на r_1 и на L для $t=0$ и $t=\infty$;

2) первые производные напряжений на r_1 и L по времени для $t=0$.

Ответ: $u_{r1}(0) = u_L(0) = 0$;

$$u_{r1}(\infty) = E \frac{r_1}{r_1 + r_3}; u_L(\infty) = 0; \frac{du_{r1}}{dt}(0) = 0;$$

$$\frac{du_L}{dt}(0) = \frac{E}{r_3 C}.$$

14-8. Заряженная емкость $C_1 = 10 \text{ мкф}$ с начальным напряжением 1000 в присоединяется при $t = 0$ к двум параллельным ветвям. Первая ветвь состоит из одного сопротивления $r_1 = 10^6 \text{ ом}$, вторая ветвь состоит из сопротивления $r_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ ом}$ и незаряженной емкости $C_2 = 20 \text{ мкф}$, соединенных последовательно. Вычислить вторую производную тока во второй ветви для $t = 0$, не находя функциональной зависимости от времени.

Ответ: $1,41 \cdot 10^{-5} \text{ а/сек}^2$.

14-9. Сопротивление $r = 100 \text{ ом}$ и заряженная емкость $C = 100 \text{ мкф}$, соединенные последовательно, подключаются к источнику э. д. с. $e = 141 \sin(377t + \pi/6) \text{ в}$ при $t = 0$. Определить $i(t)$, если начальное напряжение емкости равно 50 в .

Ответ: $i = 1,37 \sin(377t + 44^\circ 48') + 0,241 e^{-100t} \text{ а}$ или $i = 1,37 \sin(377t + 44^\circ 48') - 0,759 e^{-100t} \text{ а}$.

14-10. Возможно ли включение на переменное синусоидальное напряжение контуров rL , rC и rLC , не сопровождаемое переходным процессом (пояснить физическую сторону явления)?

14-11. Может ли частота колебательного разряда в контуре rLC быть равной или больше резонансной частоты этого контура?

14-12. Пояснить физический смысл постоянных времени цепей rL и rC . Почему с увеличением r постоянная времени для первого контура уменьшается, а для второго контура увеличивается?

14-13. Цепь rL подключается при $t = 0$ к источнику синусоидальной э. д. с. Выбрать начало отсчета времени так, чтобы свободный ток отсутствовал.

14-14. Изменив в схеме на рис. 14-6 полярность заряженной емкости, начертить кривые тока и напряжения при включении в цепь rC постоянной э. д. с.

14-15. Зависит ли характеристическое уравнение (и соответственно порядок цепи) от воздействующей функции?

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

15-1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Необходимость определения постоянных интегрирования из начальных условий в ряде случаев сильно осложняет расчет переходных процессов классическим методом решения линейных дифференциальных уравнений, обыкновенных или с частными производными, описывающих исследуемые процессы. По мере усложнения электрических схем и возрастания порядка дифференциальных уравнений трудности, связанные с нахождением постоянных интегрирования, увеличиваются.

Для инженерной практики более удобным является метод решения линейных дифференциальных уравнений, при котором заданные начальные условия включаются в исходные уравнения и для нахождения искомых функций не требуется дополнительно определять постоянные интегрирования.

В прошлом столетии в математике развивалось так называемое символическое исчисление, построенное на системе формальных операций над символом p : производная $df(t)/dt$ представлялась как результат действия на функцию $f(t)$ символа p ; операция интегрирования рассматривалась как применение символа $1/p$ и т. д. В числе работ, посвященных этому вопросу, большого внимания заслуживает монография М. Е. Ващенко-Захарченко «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (Киев, 1862).

В конце XIX в. английский инженер-электрик О. Хевисайд успешно применил и развил символический метод решения линейных дифференциальных уравнений для расчета переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами. Строгое обоснование символического, или, как его стали называть, операционного исчисления, было дано лишь в 20-х годах нашего столетия на базе общей теории функциональных (интегральных) преобразований.

В настоящее время формально-операционное исчисление Хевисайда полностью вытеснено более общим и строгим методом — преобразованием Лапласа, нашедшим широкое применение в технике.

Идея этого метода заключается в том, что из области функций действительного переменного решение переносится в область функций комплексного переменного¹ $p = c + j\omega$, где операции принимают более простой вид, а именно: вместо исходных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений получаются алгебраические уравнения; затем полученный решением алгебраических уравнений результат «интерпретируется», т. е. производится обратный переход в область функций действительного переменного. Этот переход осуществляется с помощью формул или таблиц.

¹ В современной литературе наряду с обозначением комплексного переменного p широко распространено также обозначение s .

В этом отношении преобразование Лапласа можно сравнить с логарифмированием, когда от чисел переходят к логарифмам, над логарифмами производят действия, соответствующие действиям над числами, причем умножению чисел соответствует более простая операция сложения логарифмов, и т. д.; наконец, по найденному логарифму определяют искомое число (пользуясь таблицами).

15-2. ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Пусть $f(t)$ — функция действительного переменного t , заданная в области $t > 0$ и равная нулю при $t < 0$, возрастает не быстрее показательной функции, т. е. $|f(t)| < Me^{c_0 t}$ при $t > 0$; здесь M и c_0 — постоянные (положительные и действительные); t — переменное (время). Постоянная c_0 называется показателем роста функции $f(t)$. Говорят, что функция имеет ограниченный рост, если показатель роста конечен.

Из курса математического анализа известно, что если $f(t)$ имеет ограниченный рост, то интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (15-1)$$

сходится абсолютно и является аналитической функцией комплексного переменного $p = c + j\omega$ в полуплоскости $\text{Re } p = c > c_0$ (рис. 15-1).

Интегральное уравнение вида (15-1) представляет собой *прямое преобразование Лапласа*. Функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция $F(p)$ — *изображением* по Лапласу. Следовательно, оригинал и изображение представляют собой пару функций действительного переменного t и комплексного переменного p , связанных преобразованием Лапласа.

Из определения изображения следует, что каждый оригинал имеет единственное изображение. В свою очередь оригинал вполне определяется своим изображением с точностью до значений в точках разрыва оригинала.

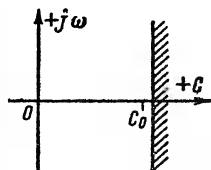


Рис. 15-1. Комплексная плоскость.

Фразу «оригинал $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$ » будем записывать символически (с помощью знака соответствия $\doteq$):

$$f(t) \doteq F(p) \text{ или } F(p) \doteq f(t).$$

Такая сокращенная запись равносильна интегральному уравнению (15-1). В литературе применяется также другая условная форма записи прямого преобразования Лапласа, а именно:

$$L[f(t)] = F(p).$$

Для обоснования операционного исчисления Хевисайда в свое время использовалось изображение по Карсону¹

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

отличающееся от изображения по Лапласу множителем p .

В настоящее время в теории автоматического регулирования и радиотехнике применяется преобразование Лапласа, имеющее прямую связь со спектральным преобразованием Фурье (см. гл. 16). Поэтому все последующие рассуждения будут относиться к изображениям по Лапласу, а не по Карсону.

15-3. ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

При исследовании переходных процессов в электрических цепях часто предполагается, что в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($t=0$), в электрическую цепь включается источник постоянной синусоидальной или какой-либо другой э. д. с., выражаемой функцией $f(t)$. Для всех значений $t < 0$ функция $f(t)$ принимается равной нулю; это означает, что данная э. д. с. не воздействует на рассматриваемую электрическую цепь до момента ее включения.

Если функция $f(t)$ имеет ограниченный рост, то на основании § 15-2 она рассматривается как оригинал.

Простейшими оригиналами являются единичная и показательная функции.

¹ Изображение по Карсону имеет ту же размерность, что и оригинал, однако эта особенность не имеет для практики существенного значения.

Единичная функция (рис. 15-2), заданная условно

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

соответствует случаю включения постоянной э. д. с., равной 1 в.

Единичная функция имеет условное обозначение $1(t)$. Однако для простоты записи в дальнейшем будем условно писать $f(t) = 1$, помня, что всякий оригинал (в том числе и единичная функция) по определению равен нулю при $t < 0$.

Изображение единичной функции согласно (15-1) имеет вид:

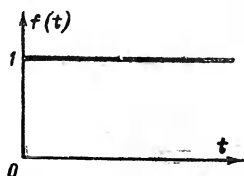


Рис. 15-2. Единичная функция.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Следовательно,

$$1 \doteq \frac{1}{p} \text{ при } \operatorname{Re} p > 0^1. \quad (15-2)$$

Умножение единичной функции на любую функцию времени оставляет последнюю без изменения при $t > 0$ и дает нуль при $t < 0$. Поэтому, умножив, например, единичную функцию на показательную функцию e^{qt} , получим функцию-оригинал

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ e^{qt} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

для которой, применяя в дальнейшем сокращенную запись $f(t) = e^{qt}$, условно сохраним название показательной функции².

Найдем изображение этого оригинала, полагая, что q — произвольное комплексное число:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{qt} dt = - \left. \frac{e^{-(p-q)t}}{p-q} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p-q}$$

¹ При $\operatorname{Re} p \leq 0$ интеграл расходится.

² Данная условность распространяется и на другие функции времени: синусоидальные, косинусоидальные и т. п.

при $\operatorname{Re}(p-q) > 0$, т. е. при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q$. Итак,

$$e^{qt} \doteq \frac{1}{p-q} \text{ при } \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q. \quad (15-3)$$

Полученное выражение справедливо также для действительных или мнимых значений q .

15-4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Математическим операциям над оригиналами соответствуют определенные операции над изображениями и наоборот.

Знание этих операций, или, как их называют, *свойств преобразования Лапласа*, облегчает нахождение изображений: оно позволяет переходить от дифференциальных (или интегродифференциальных) уравнений, записанных для функций-оригиналов, к «операторным» уравнениям, записываемым для изображений, и облегчает последующее нахождение искомого оригинала по вычисленному изображению.

Основные свойства преобразования Лапласа, известные из курса математического анализа, приведены в табл. 15-1. Во всех соотношениях предполагается, что $f(t) \doteq F(p)$.

Пользуясь соответствием (15-3) и свойством линейности преобразования Лапласа (изображение линейной комбинации есть линейная комбинация изображений), легко найти изображения следующих функций-оригиналов, часто встречающихся в задачах по электротехнике:

$$e^{j(\omega_1 t + \psi)} \doteq \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega_1}; \quad (15-4)$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_1 t + \psi) &= \frac{1}{2j} [e^{j(\omega_1 t + \psi)} - e^{-j(\omega_1 t + \psi)}] \doteq \\ &\doteq \frac{p \sin \psi + \omega_1 \cos \psi}{p^2 + \omega_1^2}; \end{aligned} \quad (15-5)$$

$$\cos(\omega_1 t + \psi) \doteq \frac{p \cos \psi - \omega_1 \sin \psi}{p^2 + \omega_1^2}. \quad (15-6)$$

Такие изображения соответствуют, например, э. д. с., включаемым в электрическую цепь, если эти э. д. с. задаются в комплексной (показательной), синусоидальной

или косинусоидальной форме (амплитуда равна единице).

Ниже приводятся дополнительные разъяснения к табл. 15-1 и применение некоторых свойств преобразования Лапласа иллюстрируется на примерах.

Особого внимания заслуживают преобразования, связанные с дифференцированием и интегрированием оригиналов (теоремы дифференцирования и интегрирования).

По *теореме дифференцирования*

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0). \quad (15-7)$$

Здесь, как и ранее в гл. 14, под $f(0)$ подразумевается предел $f(0+)$, к которому стремится $f(t)$, когда t неограниченно убывает, оставаясь положительным. В случае, когда оригинал в начальной точке непрерывен, т. е. $f(0) = f(0-) = 0$, его дифференцированию соответствует операция умножения изображения на p :

$$f'(t) \doteq pF(p). \quad (15-8)$$

Повторным применением операции, выражаемой формулой (15-7), можно распространить теорему о дифференцировании на производные высших порядков:

$$\begin{aligned} f''(t) &\doteq p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = \\ &= p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

и т. д., откуда

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0)p^{n-k},$$

где $f^{(k-1)}(0)$ — правое предельное значение, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f^{(k-1)}(t).$$

Если в частности, $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p)$$

и, следовательно, n -кратному дифференцированию оригинала соответствует n -кратное умножение на p (если все производные при $t=0$ равны нулю).

По *теореме интегрирования*

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (15-9)$$

Основные свойства одностороннего преобразования Лапласа

Наименование	Формула
Свойство линейности	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n a_i F_i(p)$
Свойство коммутативности преобразований Лапласа и операций Re и Im	$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(t) &\doteq \operatorname{Re} F(p) \\ \operatorname{Im} f(t) &\doteq \operatorname{Im} F(p) \end{aligned}$
Дифференцирование оригинала (теорема дифференцирования)	$f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$
Интегрирование оригинала (теорема интегрирования)	$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}$
Дифференцирование изображений	$(-t)^n f(t) \doteq \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
Интегрирование изображений	$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_0^\infty F(p) dp$
Дифференцирование по параметру	$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \doteq \frac{\partial}{\partial x} F(p, x)$
Интегрирование по параметру	$\int_{x_0}^x f(t, x) dx \doteq \int_{x_0}^x F(p, x) dx$
Изменение масштаба независимого переменного (теорема подобия)	$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
Смещение в области действительного переменного (теорема запаздывания)	$f(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p)$
Смещение в области комплексного переменного (теорема смещения)	$e^{\pm \lambda t} f(t) \doteq F(p \mp \lambda)$

Наименование	Формула
Предельные соотношения: начальное значение оригинала конечное значение оригинала	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$
Умножение изображений (теорема свертывания)	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq F_1(p) F_2(p)$
Следствие теоремы свертывания	$\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq pF_1(p) F_2(p)$
Интеграл Дюамеля	$f_1(0) f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t - \tau) d\tau =$ $= f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau \doteq$ $\doteq pF_1(p) F_2(p)$
Умножение оригинала на косинус или синус	$f(t) \cos \omega_1 t \doteq \frac{1}{2} [F(p - j\omega_1) + F(p + j\omega_1)]$ $f(t) \sin \omega_1 t \doteq \frac{1}{2j} [F(p - j\omega_1) - F(p + j\omega_1)]$

Повторное применение операции, выраженной этой формулой, дает:

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n \doteq \frac{F(p)}{p^n}. \quad (15-10)$$

Теоремы дифференцирования и интегрирования показывают, что комплексное переменное p можно рассматривать как оператор (отсюда и наименование «операторный метод»).

По теореме запаздывания

$$f(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p). \quad (15-11)$$

Формула (15-11) показывает, что умножение изображения на e^{-pt_0} сдвигает график оригинала вправо на t_0 (рис. 15-3).

Пример 15-1. Найти изображение функции (рис. 15-4, а)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{при } 0 < t < t_0; \\ 0 & \text{при } t > t_0 \end{cases}$$

(a — положительное действительное число).

Согласно (15-1)

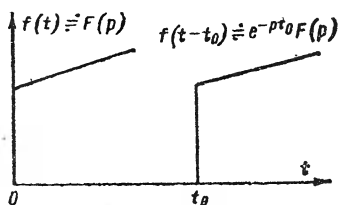


Рис. 15-3. Смещение в области действительного переменного.

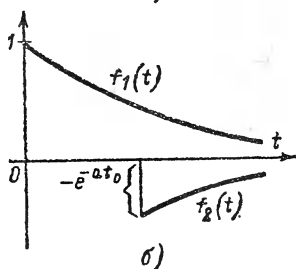
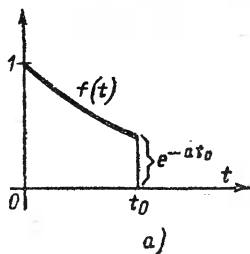


Рис. 15-4. Пример 15-1.

$$F(p) = \int_0^{t_0} e^{-at} e^{-pt} dt = \frac{1}{p+a} [1 - e^{-(p+a)t_0}].$$

Тот же результат получится, если рассматривать $f(t)$ как сумму двух функций, показанных на рис. 15-4, б: $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Функция $f_1(t)$ имеет изображение $\frac{1}{p+a}$. Поэтому в соответствии с (15-11) функция $f_2(t)$ имеет изображение

$$-\frac{e^{-at_0} e^{-pt_0}}{p+a}.$$

Искомое изображение функции $f(t)$ в силу линейности преобразования Лапласа равно:

$$\frac{1}{p+a} [1 - e^{-(p+a)t_0}].$$

Пример 15-2. Найти изображение полупериода синусоиды (рис. 15-5, а) с амплитудой, равной единице, и основанием, равным $T/2$.

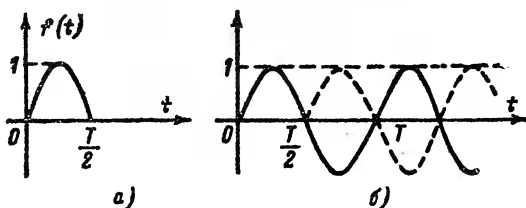


Рис. 15-5. Пример 15-2.

Такой импульс можно получить сложением двух синусоид, сдвинутых на полпериода (рис. 15-5, б). По теореме запаздывания

$$F(p) = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} e^{-p \frac{T}{2}} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-p \frac{T}{2}} \right).$$

Пример 15-3. Найти изображение «выпрямленной» синусоиды, т. е. функции $f(t) = |\sin \omega_1 t|$ (рис. 15-6).

Заданная кривая получается периодическим повторением полуволн синусоиды, для которой в предыдущем примере найдено изображение $F_1(p)$. По теореме запаздывания изображение «выпрямленной» синусоиды будет:

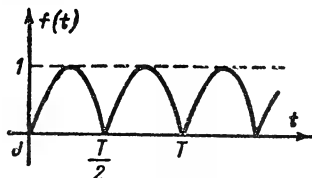


Рис. 15-6. Пример 15-3.

$$F(p) = F_1(p) \left(1 + e^{-p \frac{T}{2}} + e^{-pT} + \dots \right) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-p \frac{T}{2}}}.$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{\omega_1 \left(1 + e^{-p \frac{T}{2}} \right)}{(p^2 + \omega_1^2) \left(1 - e^{-p \frac{T}{2}} \right)} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \operatorname{cth} \frac{pT}{2\omega_1}.$$

Пример 15-4. Найти изображение пилообразной функции (рис. 15-7, а).

Заданная пилообразная кривая получается периодическим повторением кривой (рис. 15-7, б). Последняя складывается из трех функций: прямолинейных 1 и 2 и единичной 3. Тангенсы углов наклона прямых равны соответственно $1/T$ и $-1/T$.

По таблице приложения IV и теореме запаздывания рассматриваемая кусочная функция $f_1(t)$ имеет изображение

$$F_1(p) = \frac{1}{Tp^2} - \frac{e^{-pT}}{p} - \frac{e^{-pT}}{Tp^2}.$$

То же получится, если применить непосредственно формулу (15-1) и вычислить интеграл

$$F_1(p) = \int_0^T \frac{t}{T} e^{-pt} dt.$$

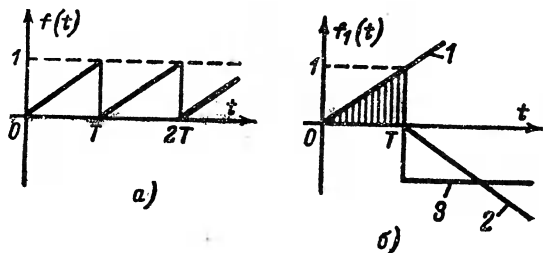


Рис. 15-7. Пример 15-4.

Изображение заданной функции $f(t)$ находится сложением изображений одинаковых треугольников с учетом сдвига:

$$\begin{aligned} F(p) &= F_1(p) (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \\ &= \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{1}{Tp^2} - \frac{e^{-pT}}{p(1 - e^{-pT})}. \end{aligned}$$

Теорема сдвига

$$e^{\pm \lambda t} f(t) \div F(p \mp \lambda) \quad (15-12)$$

показывает, как изменяется изображение при умножении оригинала на показательную функцию. При этом следует иметь в виду, что число λ может быть как действительным, так и комплексным. Если $F(p)$ определено при $\text{Re } p > c_0$, то изображение (15-12) определено при $\text{Re } p > c_0 \pm \text{Re } \lambda$.

Предельные соотношения

Первое предельное соотношение согласно табл. 15-1

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (15-13)$$

дает возможность найти начальное значение функции $f(t)$ при $t=0$ непосредственно по изображению. Эта фор-

мула устанавливает существование равенства между двумя частными значениями: значением функции $f(t)$ в начале координат (при подходе справа) и значением функции $F(p)$ в бесконечно удаленной точке (в предположении, что p стремится к бесконечности внутри угла $|\arg p| < \pi/2$, т. е. в правой полуплоскости).

Второе предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (15-14)$$

дает возможность найти предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ по значению функции $F(p)$ в начале координат.

Эта формула имеет смысл только в том случае, когда предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ существует.

Предельные соотношения (15-13) и (15-14) полезны для проверки вычислений с помощью преобразования Лапласа.

Теорема умножения изображений (теорема свертывания)

$$F_1(p) F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(t) f_2(t - \tau) d\tau \quad (15-15)$$

устанавливает, что умножению в области комплексного переменного соответствует свертывание в области действительного переменного.

Если произведение представляет собой произведение более чем двух сомножителей, то теорема свертывания может быть применена к попарно сгруппированным сомножителям (в любом порядке).

Применение *интеграла Дюамеля*

$$\begin{aligned} pF_1(p) F_2(p) &\doteq f_1(0) f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (15-16)$$

облегчает вычисления по сравнению с формулой

$$pF_1(p) F_2(p) \doteq \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (15-17)$$

в тех случаях, когда после дифференцирования функции $f_1(\tau)$ или $f_2(t - \tau)$ подынтегральное выражение упро-

щается и вычисление интеграла в результате этого облегчается. Следует иметь в виду, что функция $f_2(t-\tau)$ в (15-16) дифференцируется по переменной t .

В § 15-11 будет специально рассмотрен метод расчета переходных процессов в электрических цепях с помощью интеграла Дюамеля.

15-5. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Из теории функции комплексного переменного известно, что если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re } p > c_0$, стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$ в любой полуплоскости $\text{Re } p = c > c_0$ равномерно относительно аргумента p и интеграл $\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) dp$ абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (15-18)$$

Эта формула, носящая название *обратного преобразования Лапласа*, представляет собой решение интегрального уравнения (15-1) относительно функции $f(t)$.

В литературе применяется также условная форма записи обратного преобразования Лапласа:

$$\mathbf{L}^{-1} [F(p)] = f(t).$$

За путь интегрирования в (15-18) может быть принята любая бесконечная прямая, параллельная мнимой оси, расположенная на расстоянии $c > c_0$ от последней (см. рис. 15-1), так чтобы все особые точки функции $F(p)$ оставались левее пути интегрирования. Интеграл в (15-18) принимается в смысле главного значения¹.

При практическом применении обратного преобразования Лапласа путь интегрирования вдоль прямой, параллельной оси мнимых величин, заменяется замкнутым контуром², что дает возможность применить теорему о

¹ То есть как предел интеграла вдоль отрезка $(c-j\omega, c+j\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

² Возможность такой замены основывается на лемме Жордана.

вычетах, согласно которой оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname{Res} F(p) e^{pt} \quad (t > 0), \quad (15-19)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

При $t < 0$ функция $f(t)$ равна нулю.

Формула (15-19) позволяет вывести теорему разложения (см. § 15-6) применительно к мероморфной функции $F(p)$, т. е. когда особенности интегральной функции в конечной области — только полюсы.

15-6. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ

Пусть изображение задано в виде правильной дроби $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$, причем числитель и знаменатель не имеют общих корней. Положение полюсов функции $F(p)$ определяется корнями уравнения

$$F_2(p) = 0. \quad (15-20)$$

Обозначим n корней уравнения (15-20) через $p_1, p_2, \dots, p_n$. При этом возможны два случая: а) все корни простые; б) некоторые или все корни кратные.

Рассмотрим эти случаи в отдельности.

а) Случай простых корней

Из теории функций комплексного переменного известно, что вычет функции $\varphi(p)/\psi(p)$ по полюсу первого порядка $p = p_k$ равен:

$$\operatorname{Res}_{p_k} \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \left[(p - p_k) \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right]_{p=p_k} = \frac{\varphi(p_k)}{\psi'(p_k)}. \quad (15-21)$$

Если, как в формуле (15-18), функция комплексного переменного p имеет вид $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt}$, причем все корни уравнения (15-20) простые (полюсы первого порядка), то на основании (15-19) и (15-21)

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{\left[\frac{F_2(p)}{p - p_k} \right]_{p=p_k}} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{F_2'(p_k)}. \quad (15-22)$$

Это общая форма теоремы разложения для случая простых корней. Выражение в квадратных скобках в знаменателе сначала надо сократить на множитель $(p-p_k)$, после чего произвести подстановку $p=p_k$.

В случае комплексных корней получаются два сопряженных слагаемых, сумма которых равна удвоенному значению действительной части (см. пример 15-11).

Пример 15-5. Пользуясь теоремой разложения (15-22), найти оригинал по изображению

$$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}.$$

В данном случае $F_1(p) = 1$;

$$F_2(p) = p(p+a)(p+b).$$

Корни уравнения $F_2(p) = 0$ равны соответственно:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -a, \quad p_3 = -b.$$

Следовательно, на основании (15-22)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p+a)(p+b)} &= \frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{(-a)(-a+b)} + \frac{e^{-bt}}{(-b)(-b+a)} = \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{ae^{-bt} - be^{-at}}{ab(b-a)}. \end{aligned}$$

б) Случай кратных корней

Допустим, что корень p_k повторяется m раз. Из теории функций комплексного переменного известно, что если функция $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt}$ имеет в точке p_k полюс порядка m , то вычет функции в этой точке равен:

$$\operatorname{Res}_{p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p-p_k)^m e^{pt} \right]_{p=p_k}.$$

Как и в предыдущем случае, все операции производятся после сокращения на множитель $(p-p_k)^m$. Обозначив $A(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p-p_k)^m$, продифференцируем $A(p)e^{pt}$ по p $m-1$ раз:

$$\frac{d}{dp} A(p) e^{pt} = e^{pt} [tA(p) + A'(p)];$$

$$\frac{d^2}{dp^2} A(p) e^{pt} = e^{pt} [t^2 A(p) + 2tA'(p) + A''(p)],$$

.....

$$\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} A(p) e^{pt} = e^{pt} \left[t^{m-1} A(p) + (m-1) t^{m-2} A'(p) + \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m-2)}{2!} t^{m-3} A''(p) + \dots + A^{(m-1)}(p) \right]^*.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} = e^{p_k t} \left[\frac{t^{m-1} A(p)}{(m-1)!} + \right. \\ \left. + \frac{t^{m-2} A'(p)}{(m-2)!} + \frac{t^{m-3} A''(p)}{(m-3)! 2!} + \dots + \frac{A^{(m-1)}(p)}{(m-1)!} \right]_{p=p_k} = \\ = e^{p_k t} \sum_{i=1}^m \frac{t^{m-i} A^{(i-1)}(p_k)}{(m-i)! (i-1)!}. \quad (15-23)$$

Формула (15-23) универсальна; она справедлива для любого корня. Здесь предполагается, что $0! = 1$. Поэтому если в (15-23) принять $m=1$, то получится выражение

$$\frac{e^{p_k t} t^0 A^0(p_k)}{0! 0!} = \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{\left[\frac{F_2(p)}{p - p_k} \right]_{p=p_k}},$$

соответствующее случаю простого корня p_k . Это в равной мере относится и к приведенной выше исходной формуле вычета функции в полюсе порядка m , которая при $m=1$ переходит в формулу (15-21).

Если уравнение (15-20) содержит несколько кратных корней, то формула (15-23) применяется поочередно для каждого корня, после чего полученные результаты суммируются.

Если имеются одновременно простые и кратные корни, то формулы (15-22) и (15-23) применяются отдельно соответственно для простых и кратных корней; затем производится суммирование.

Пример 15-6. Найти оригинал по изображению

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3}.$$

* То же получается непосредственно при формуле Лейбница

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(2)}v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v.$$

Заданная функция имеет полюс второго порядка $p_1 = 1$ и полюс третьего порядка $p_2 = 0$. Применяя формулу (15-23) поочередно для случаев $m=2$ и $m=3$, получим:

$$e^t \left[t \frac{p+2}{p^3} + \frac{d}{dp} \frac{p+2}{p^3} \right]_{p=1} = (3t-8)e^t;$$

$$e^0 \left[\frac{t^2}{2} \frac{p+2}{(p-1)^2} + t \frac{d}{dp} \frac{p+2}{(p-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \frac{p+2}{(p-1)^2} \right]_{p=0} =$$

$$= t^2 + 5t + 8.$$

Следовательно,

$$\frac{p+2}{(p-1)^2 p^3} = (3t-8)e^t + t^2 + 5t + 8.$$

Другой способ нахождения оригинала при наличии кратных корней, не требующий дифференцирования, заключается в том, что заданное дробное рациональное выражение раскладывается на простые дроби; для перехода от простых дробей к оригиналу используется соответствие

$$\frac{1}{(p-p_k)^i} \doteq \frac{1}{(i-1)!} t^{i-1} e^{p_k t}.$$

Разложение на простые дроби может быть произведено известным в математике методом неопределенных коэффициентов, который, однако, связан с решением системы уравнений, что практически не всегда удобно.

Если заданная рациональная дробь имеет m -кратный полюс p_k , то разложение на простые дроби может быть осуществлено непосредственным делением полиномов, расположенных по восходящим степеням p . Например, в рассмотренном выше примере в результате деления полиномов получаем:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{2+p}{p^3-2p^4+p^5} = \frac{2}{p^3} + \frac{5}{p^2} + \frac{8}{p} + \frac{11p^3-8p^4}{p^3-2p^4+p^5}.$$

Остаточный член в данном случае разлагается весьма просто:

$$\frac{8(p^3-p^4)+3p^3}{(p-1)^2 p^3} = -\frac{8}{p-1} + \frac{3}{(p-1)^2}.$$

Если имеется m -кратный полюс p_k , отличный от нуля, то после замены $p-p_k = z$ производится деление полиномов, расположенных по восходящим степеням z .

Пусть, например,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{p^3}{(p+2)^4(p+1)}.$$

Здесь $p_k = -2$ полюс кратности 4.

Обозначив $p+2=z$ и соответственно $p=z-2$; $p+1=z-1$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{(z-2)^3}{z^4(z-1)} &= \frac{-8+12z-6z^2+z^3}{-z^4+z^5} = \\ &= \frac{8}{z^4} - \frac{4}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{8}{(p+2)^4} - \frac{4}{(p+2)^3} + \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1}.$$

В заключение отметим, что для разложения $F_1(p)/F_2(p)$ на простые дроби при наличии m -кратного полюса p_k можно пользоваться формулой

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{i=1}^m \frac{K_i}{(p-p_k)^i},$$

где

$$K_i = \frac{1}{(m-i)!} A^{(m-i)}(p_k).$$

Данное разложение приводит к формуле (15-23).

15-7. ТАБЛИЦЫ ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Теорема разложения для случаев простых и кратных корней (см. § 15-6) в сочетании с другими свойствами преобразования Лапласа (см. § 15-4) дает возможность составить *таблицы оригиналов и изображений*, весьма облегчающие и ускоряющие расчеты переходных процессов. Такие таблицы широко применяются на практике.

Наиболее полные таблицы приводятся в справочниках по операционному исчислению и специальных трудах, посвященных преобразованию Лапласа. При практическом пользовании той или иной таблицей во избежание возможных недоразумений надлежит в первую очередь проверить форму записи изображения: дается ли изображение по Лапласу или по Карсону. Если изображение дается по Карсону, то в соответствии с § 15-2 его надле-

жит разделить на p для получения изображения по Лапласу.

В ряде типовых примеров, разобранных в предыдущих параграфах, были приведены оригиналы и изображения по Лапласу. Эти пары функций, а также некоторые другие, встречающиеся на практике, помещены в сводной таблице в приложении IV (в конце книги).

Возможность пользования таблицами оригиналов и изображений наряду с теоремами и различными свойствами преобразования Лапласа представляет большое удобство. Поэтому преобразование Лапласа широко применяется на практике для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. К этому следует добавить, что изображения по Лапласу, приводимые в таблицах, непосредственно связаны с гармоническим анализом непериодических функций (см. гл. 16), что делает этот метод еще более универсальным.

15-8. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим цепь с ненулевыми начальными условиями, показанную на рис. 15-8. Допустим, что в момент времени $t = 0$ участок r, L, C подключается к источнику э. д. с. $e(t)$. Требуется найти изображение тока на этом участке.

По второму закону Кирхгофа для $t \geq 0$ имеем:

$$e = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0); \quad (15-24)$$

здесь $u_C(0)$ — начальное напряжение на емкости, обусловленное электрическим зарядом емкости в момент коммутации.

Будем рассматривать $e(t)$, $u_C(0)$ и $i(t)$ как функции-оригиналы, имеющие изображения $E(p)$, $u_C(0)/p$ и $I(p)$.

На основании свойства линейности преобразования Лапласа и теорем дифференцирования и интегрирования исходному уравнению (15-24) соответствует следующее уравнение для изображений:

$$E(p) = rI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}; \quad (15-25)$$

здесь $i(0)$ — начальный ток в индуктивности.

Благодаря тому, что операция дифференцирования и интегрирования оригинала соответствуют операции умножения и деления изображения на p , уравнение для изображений получается алгебраическим, т. е. более простым, чем исходное интегро-дифференциальное уравнение. Его решение относительно $I(p)$ дает:

$$I(p) = \frac{E(p) - \frac{u_C(0)}{p} + Li(0)}{r + pL + \frac{1}{pC}}. \quad (15-26)$$

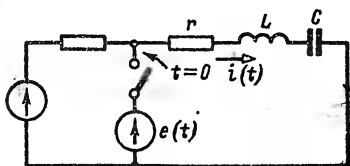


Рис. 15-8. Включение источника э. д. с. в цепь с ненулевыми начальными условиями.

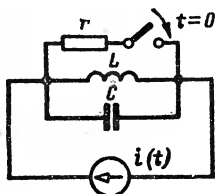


Рис. 15-9. Включение ветви в цепь с источником тока.

Далее после преобразований получим:

$$I(p) = \frac{1}{L} \frac{pE(p) + pLi(0) - u_C(0)}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}}. \quad (15-26a)$$

Искомая функция $i(t)$ (оригинал) находится по изображению (15-26a) одним из указанных выше способов, а именно: с помощью теоремы разложения (или других правил) или по готовым таблицам.

Для схемы, показанной на рис. 15-9, уравнение записывается по первому закону Кирхгофа (при $t > 0$, т. е. после подключения сопротивления r):

$$i = \frac{1}{r} + u + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0),$$

где i — ток источника тока; $u(t)$ — напряжение между узлами; $i_L(0)$ — ток в индуктивности при $t = 0$.

Полагая $i(t) \doteq I(p)$ и $u(t) \doteq U(p)$, находим:

$$I(p) = \frac{U(p)}{r} + pCU(p) - Cu(0) + \frac{U(p)}{pL} + \frac{i_L(0)}{p}; \quad (15-27)$$

здесь $u(0)$ — начальное напряжение между узлами, равное напряжению на емкости.

После преобразований получается изображение искомого напряжения

$$U(p) = \frac{1}{C} \frac{pI(p) + pCu(0) - i_L(0)}{p^2 + p\frac{1}{rC} + \frac{1}{LC}},$$

для которого указанными выше способами находится оригинал $u(t)$.

При нулевых начальных условиях, т. е. при включении источников в пассивные цепи, выражения (15-26) и (15-27) упрощаются, а именно:

$$I(p) = \frac{E(p)}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E(p)}{Z(p)}$$

и

$$I(p) = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{pL} + pC \right) U(p) = Y(p) U(p).$$

Здесь $Z(p)$ и $Y(p)$ представляют собой сопротивление и проводимость соответствующих цепей при комплексной частоте $p = s + j\omega$. Это те же сопротивление и проводимость, которые уже встречались в гл. 14. Они называются обобщенными или операторными сопротивлением и проводимостью.

В общем случае порядок решения задачи следующий:

1) записываются интегро-дифференциальные уравнения Кирхгофа для цепи, в которой исследуется переходный процесс;

2) записываются те же уравнения для изображений с учетом независимых начальных условий;

3) уравнения для изображений решаются алгебраически относительно изображения искомой функции;

4) на основе полученного изображения находится оригинал искомой функции.

При достаточном навыке или если схемы относительно просты, уравнения для изображений записываются непосредственно, без предварительного составления ин-

тегро-дифференциальных уравнений (см. примеры 15-8, 15-11 и др.).

В случае сложной схемы также можно обойтись без записи интегро-дифференциальных уравнений, если предварительно нарисовать эквивалентную схему для изображений. Как видно из предыдущих рассуждений такая схема отличается от схемы цепи для установившегося

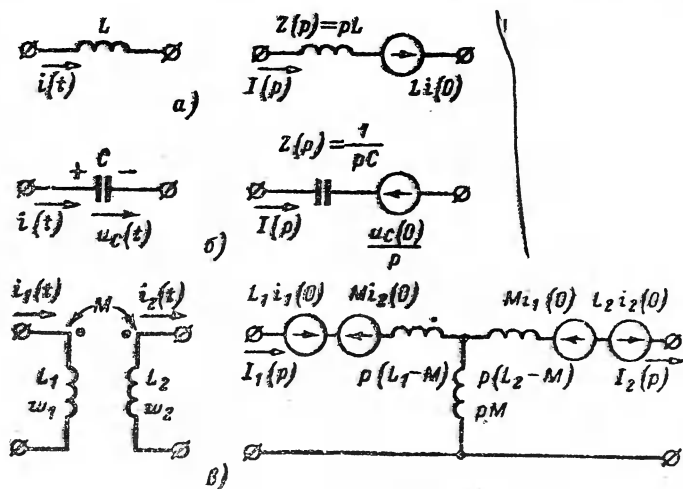


Рис. 15-10. Схемы замещения элементов для изображений.

синусоидального режима тем, что комплексные величины $j\omega L$ и $j\omega C$ заменяются соответственно pL и pC и вместо комплексных функций времени вводятся их лапласовы изображения. Кроме того, при ненулевых начальных условиях в схему для изображений последовательно с индуктивностью включается дополнительный источник э. д. с., равной $Li_L(0)$ (рис. 15-10, а), а последовательно с емкостью — дополнительный источник с э. д. с., равной $u_C(0)/p$ (рис. 15-10, б).

В случае индуктивной связи между двумя элементами соответствующая схема замещения представлена рис. 15-10, в. При коэффициенте связи $k = 1$ имеют место соотношения:

$$L_1 = \frac{w_1}{w_2} M; \quad L_2 = \frac{w_2}{w_1} M.$$

$$i_1(0) \omega_1 = i_2(0) \omega_2;$$

поэтому в этом случае в схеме замещения э. д. с. дополнительных источников взаимно уничтожаются.

После введения дополнительных источников записываются уравнения Кирхгофа непосредственно для изображений; структура этих уравнений аналогична структуре уравнений для установившегося синусоидального режима. Сказанное проиллюстрировано в примере 15-7.

Если воздействующая функция, например э. д. с. источника, синусоидальна, то переходный процесс можно рассчитывать в действительной или комплексной форме. При комплексной форме расчета начальные значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях учитываются в виде комплексных амплитуд и уравнения записываются для изображений комплексных функций токов и напряжений. Искомые функции времени определяются мнимой частью найденных комплексных оригиналов (подробнее см. пример 15-10). Любая из указанных здесь форм решения уравнений для изображений приводит в конечном итоге к необходимости нахождения оригинала по теореме разложения или таблице; оригинал получим в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

Вычисления во многих случаях могут быть облегчены, если предварительно рассчитать принужденный режим и определить по формулам (14-8) начальные значения свободных токов в индуктивностях $i_{L_{св}}(0)$ и свободных напряжений на емкостях $u_{C_{св}}(0)$. Используя эти значения как начальные условия в уравнениях для свободного режима или соответствующих эквивалентных схемах замещения с дополнительными источниками, но без основных источников, можно получить изображение свободного тока. Оно будет иметь более простой вид, чем изображение полного тока. Соответственно облегчится и нахождение оригинала по изображению. Полный ток определится как сумма принужденного тока, найденного отдельно, и оригинала свободного тока (см. пример 15-11).

Такой метод расчета целесообразен в том случае, когда принужденный ток, входящий в состав полного тока, значительно усложняет лапласово изображение для полного тока и тем затрудняет нахождение оригинала.

Пример 15-7. Составить уравнения для изображений контурных токов схемы на рис. 15-11, *а* после замыкания контакта. Начальные значения тока в индуктивности L и напряжения на емкости C обоз-

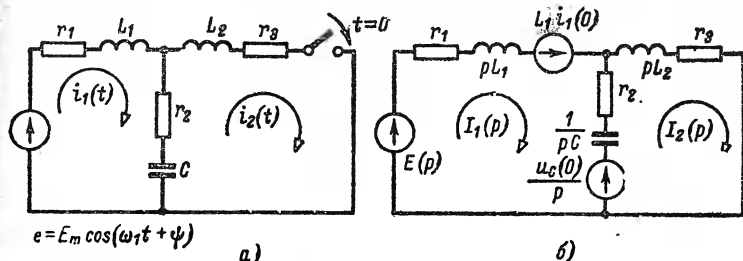


Рис. 15-11. Пример 15-7.

начим через $i_1(0)$ и $u_C(0)$, приняв положительное направление напряжения на емкости в направлении тока i_1 . Уравнения по второму закону Кирхгофа для $t \geq 0$ запишутся так:

$$E_m \sin(\omega_1 t + \psi) = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_2 (i_1 - i_2) + \\ + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt + u_C(0);$$

$$0 = r_3 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 (i_2 - i_1) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) dt - u_C(0).$$

Соответствующие уравнения для изображений, если обозначить

$$I_1(p) = I_1 \triangleq i_1(t) \text{ и } I_2(p) = I_2 \triangleq i_2(t),$$

примут вид:

$$E_m \frac{p \sin \psi + \omega_1 \cos \psi}{p^2 + \omega_1^2} = \left(r_1 + r_2 + pL_1 + \frac{1}{pC} \right) I_1 - \\ - \left(r_2 + \frac{1}{pC} \right) I_2 + \frac{u_C(0)}{p} - L_1 i_1(0);$$

$$0 = \left(r_2 + r_3 + pL_2 + \frac{1}{pC} \right) I_2 - \left(r_2 + \frac{1}{pC} \right) I_1 - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Те же самые уравнения получаются и на основании эквивалентной схемы на рис. 15-11, *б*, составленной для изображений.

Пример 15-8. Найти токи в схеме на рис. 15-12 после замыкания контакта.

Начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости равны соответственно:

$$i_L(0) = \frac{E}{r_1 + r_2} \text{ и } u_C(0) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} E.$$

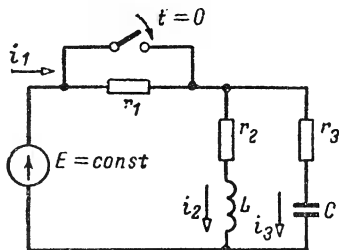


Рис. 15-12. Пример 15-8.

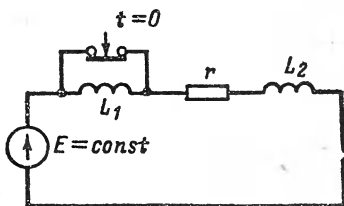


Рис. 15-13. Пример 15-9.

На основании расчетной схемы можно непосредственно написать уравнения по второму закону Кирхгофа для изображений:

$$\begin{aligned} \frac{E}{p} + Li_L(0) &= (r_2 + pL) I_2; \\ \frac{E}{p} - \frac{u_C(0)}{p} &= \left(r_3 + \frac{1}{pC} \right) I_3. \end{aligned}$$

Откуда

$$I_2 = \frac{E + Li_L(0)p}{p(r_2 + pL)} = \frac{\frac{E}{L} + i_L(0)p}{p\left(p + \frac{r_2}{L}\right)}$$

и

$$I_3 = \frac{E - u_C(0)}{r_3\left(p + \frac{1}{r_3 C}\right)}.$$

Переходя к оригиналам по формуле (15-22), находим:

$$i_2(t) = \frac{E}{r_2} \left(1 - e^{-\frac{r_2}{L}t} \right) + i_L(0) e^{-\frac{r_2}{L}t};$$

$$i_3(t) = \frac{E - u_C(0)}{r_3} e^{-\frac{1}{r_3 C}t};$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t).$$

Пример 15-9. Определить ток в контуре цепи на рис. 15-13 после размыкания контакта, если до размыкания в цепи был установившийся постоянный ток.

В задаче пренебрегают временем горения дуги на контакте; считается, что токи в индуктивностях L_1 и L_2 уравниваются мгновенно. В § 14-2 указывалось, что решение такого рода задач основано на принципе непрерывности суммарного потокоосцепления до и после коммутации.

Дифференциальное уравнение для данной цепи запишется так:

$$E = ri + L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}.$$

При $t=0$ токи в индуктивностях были $i_1(0-)=0$ и $i_2(0-)=E/r$. Начальным условием для процесса после разрыва дуги будет:

$$L_2 i_2(0-) = (L_1 + L_2) i(0),$$

откуда

$$i(0) = \frac{i_2(0-) L_2}{L_1 + L_2}.$$

Переходя к изображениям, напишем:

$$\frac{E}{p} = rI(p) + (L_1 + L_2)pI(p) - (L_1 - L_2)i(0),$$

откуда

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} + L_2 i_2(0-)}{r + 2(L_1 + L_2)p} = \frac{E + \frac{EL_2}{r}p}{(L_1 + L_2)\left(p + \frac{r}{L_1 + L_2}\right)p}.$$

По формуле (15-22) найдем оригинал:

$$i(t) = \frac{E}{r} \left(1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} e^{-\frac{r}{L_1 + L_2}t} \right).$$

Пример 15-10. В момент $t=0$ цепь, состоящая из последовательно соединенных r и L , присоединяется к источнику синусоидальной э. д. с. $e(t) = E_m \sin(\omega_1 t + \psi)$.

Определить ток $i(t)$, пользуясь комплексной формой расчета переходного процесса.

При $t \geq 0$

$$E_m e^{j(\omega_1 t + \psi)} = rI(t) + L \frac{dI(t)}{dt}.$$

Переходя к изображениям, приняв $I(t) \doteq I(p)$, получаем:

$$E_m e^{j\psi} \frac{1}{p - j\omega_1} = rI(p) + pLI(p),$$

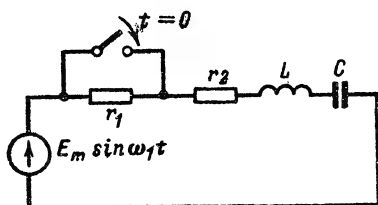
откуда

$$I(p) = \frac{E_m e^{j\psi}}{(p - j\omega_1)(r + pL)}.$$

Оригинал находим по формуле (15-22):

$$I(t) = \frac{E_m e^{j(\omega_1 t + \psi)}}{r + j\omega_1 L} - \frac{E_m e^{j\psi}}{r + j\omega_1 L} e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Искомый ток определяется мнимой частью этого выражения, т. е.



$$i(t) = \frac{E_m \sin(\omega_1 t + \psi - \varphi)}{\sqrt{r^2 + (\omega_1 L)^2}} - \frac{E_m \sin(\psi - \varphi)}{\sqrt{r^2 + (\omega_1 L)^2}} e^{-\frac{r}{L}t},$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_1 L}{r}.$$

Рис. 15-14. Пример 15-11.

Пример 15-11. Найти методом отделения свободного тока от принужденного ток в цепи на рис. 15-14 после замыкания контакта, Дано:

$$E_m = 10 \text{ в}; \quad \omega_1 = 400 \text{ рад/сек}; \quad r_1 = 10 \text{ ом}; \\ r_2 = 5 \text{ ом}; \quad L = 0,1 \text{ гн}; \quad C = 100 \text{ мкф}.$$

Обычным методом расчета установившегося синусоидального режима легко найти до коммутации ток и напряжение u_C . Они будут: $i = 0,472 \sin(400t - \pi/4)$, а; $u_C = -11,8 \cos(400t - \pi/4)$, в.

Отсюда находятся начальные условия:

$$i(0) = i(0-) = -0,332 \text{ а}; \quad u_C(0) = u_C(0-) = -8,34 \text{ в}.$$

Аналогичным расчетом после коммутации находятся те же принужденные функции:

$$i_{\text{пр}}(t) = 0,633 \sin(400t - 71^\circ 30'), \text{ а}$$

и

$$u_{C\text{пр}}(t) = -15,8 \cos(400t - 71^\circ 30'), \text{ в},$$

что для $t = 0$ дает:

$$i_{\text{пр}}(0) = -0,6 \text{ а} \text{ и } u_{C\text{пр}}(0) = -5 \text{ в}.$$

Согласно (14-8) начальные независимые значения свободных составляющих будут:

$$i_{\text{св}}(0) = -0,332 + 0,6 = 0,268 \text{ а}; \\ u_{C\text{св}}(0) = -8,34 + 5 = -3,34 \text{ в}.$$

Изображение свободного тока для такой цепи имеет вид:

$$I_{\text{св}}(p) = \frac{Li_{\text{св}}(0) - \frac{u_{\text{св}}(0)}{p}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{0,1 \cdot 0,268 - \frac{-3,34}{p}}{5 + p \cdot 0,1 + \frac{10^6}{p \cdot 100}} =$$

$$= \frac{0,268p + 33,4}{p^2 + 50p + 10^5} = \frac{0,268p + 33,4}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Здесь $p_{1,2} = -25 \pm j 315$.

По формуле (15-22) находим оригинал:

$$i_{\text{св}}(t) = \frac{0,268(-25 + j 315) + 33,4}{2 \cdot j 315} e^{p_1 t} +$$

$$+ \frac{0,268(-25 - j 315) + 33,4}{-2 \cdot j 315} e^{p_2 t} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} [0,141 e^{-j 17^\circ 30'} e^{-25 t} e^{j 315 t}] =$$

$$= 0,282 e^{-25 t} \cos(315 t - 17^\circ 30'), \text{ а.}$$

Как видно, оригинал свободного тока достаточно просто нашелся.

Пример 15-12. Найти ток в контуре rC в случае включения в него источника э. д. с. треугольной формы (рис. 15-15).

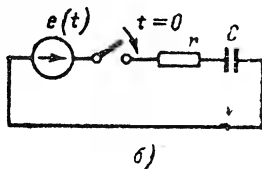
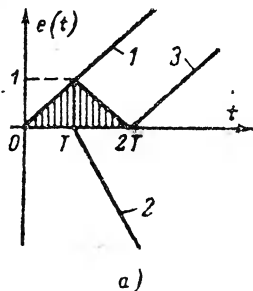


Рис. 15-15. Пример 15-12.

Начальные условия нулевые.

Функцию $e(t)$ можно представить в виде суммы трех прямолинейных функций, изображенных на рис. 15-15, а. Тангенсы углов наклона первой и третьей прямой равны $1/T$, а второй прямой $\left(-\frac{2}{T}\right)$. Используя теорему запаздывания для функции $e(t)$, получаем изображение

$$E(p) = \frac{1}{Tp^2} - \frac{2}{Tp^2} e^{-pT} + \frac{1}{Tp^2} e^{-2pT}.$$

Тот же результат получится, если применить непосредственно формулу (15-1) и произвести интегрирование.

Изображение искомого тока будет:

$$I(p) = \frac{E(p)}{r + \frac{1}{pC}};$$

первое слагаемое э. д. с. даст:

$$I_1(p) = \frac{1}{Tp^2 \left(r + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{1}{rTp \left(p + \frac{1}{rC} \right)} \doteq \frac{rC}{rT} e^0 + \\ + \frac{1}{rT \left(-\frac{1}{rC} \right)} e^{-\frac{t}{rC}} = \frac{C}{T} - \frac{C}{T} e^{-\frac{t}{rC}} = \frac{C}{T} \left(1 - e^{-\frac{t}{rC}} \right) = i_1(t).$$

Второе и третье слагаемые имеют тот же вид, но запаздывают относительно первого соответственно на T и $2T$ (второе слагаемое учитывается при $t > T$, третье — при $t > 2T$). Поэтому

$$i(t) = i_1(t) - 2i_1(t - T) + i_1(t - 2T).$$

15-9. УЧЕТ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИСТОЧНИКА

Если в электрической цепи при ненулевых начальных условиях (т. е. при наличии токов в индуктивностях или напряжений на емкостях) происходит замыкание или размыкание какой-либо ветви, то переходный процесс, вызываемый изменением схемы, может быть рассчитан *методом эквивалентного источника*. В случае замыкания ветви удобно применять теорему об эквивалентном источнике э. д. с., а в случае размыкания — теорему об эквивалентном источнике тока (см. гл. 7).

На рис. 15-16 показан случай *замыкания ветви* электрической цепи в момент $t = 0$. Так же как в § 7-9, буква A означает активную, а буква Π — пассивную цепь; $u_x(t)$ — напряжение, существовавшее до момента замыкания ветви, условно продолженное на время $t > 0$.

Режим электрической цепи при $t > 0$ мог быть как установившимся, так и переходным. Ход рассуждений в обоих случаях остается одним и тем же. Включив в замкнувшуюся ветвь две э. д. с., равные по величине $u_x(t)$ и противоположно направленные (рис. 15-16, б), и пользуясь методом наложения, приходим к двум схемам

на рис. 15-16, в и г, в первой из которых токи те же, что и в первоначальной схеме.

Таким образом, переходный процесс при замыкании ветви находится в результате наложения токов предшествующего режима (при разомкнутой ветви), условно продолженного на время $t > 0$, на токи, получаемые в результате включения в пассивную цепь источника э. д. с. $u_x(t)$. При этом если при $t < 0$ режим был установив-

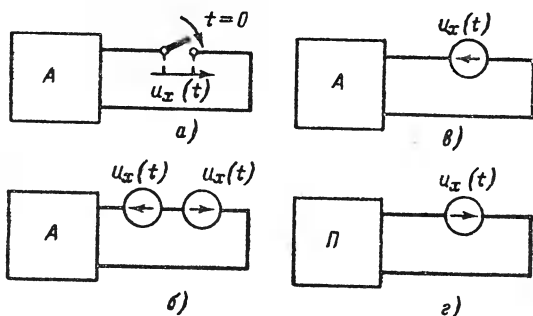


Рис. 15-16. Замыкание ветви электрической цепи.

шимся, то напряжение $u_x(t)$ может быть как постоянным, так и переменным (синусоидальным).

При $u_x(t) = U = \text{const}$ в расчет вводится изображение $U_x(p) = U/p$, а при синусоидальном напряжении $u_x(t)$, записанном в комплексной форме $U_m e^{j(\omega_1 t + \psi)}$, в расчет вводится изображение $U_m e^{j\psi} \frac{1}{p - j\omega_1}$.

Ток в замыкаемой ветви находится по изображению

$$I(p) = \frac{U_x(p)}{Z(p)}, \quad (15-28)$$

где $Z(p)$ — операторное сопротивление всей пассивной цепи, рассматриваемой со стороны места замыкания. Применительно к схеме на рис. 15-16 оно равно входному операторному сопротивлению пассивного двухполюсника.

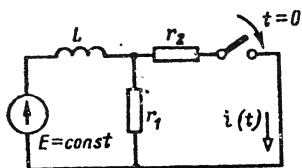
Рассмотрим для иллюстрации изложенного метода один простейший пример.

Пример 15-13. Найти ток $i(t)$ в ветви с сопротивлением r_2 , замыкаемой при $t = 0$ (рис. 15-17).

Напряжение на разомкнутых контактах равно E . Следовательно, изображение $U_x(p)$ равно E/p . Входное операторное сопротивление пассивной цепи, рассматриваемой со стороны замыкающего контакта,

$$Z(p) = r_2 + \frac{r_1 p L}{r_1 + p L}.$$

Следовательно, на основании (15-28)



$$I(p) = \frac{E}{p \left(r_2 + \frac{r_1 p L}{r_1 + p L} \right)} = \frac{E (r_1 + p L)}{p [r_1 r_2 + (r_1 + r_2) p L]}.$$

Переходим к оригиналу:

Рис. 15-17. Пример 15-13.

$$i(t) = \frac{E}{r_2} - \frac{r_1 E}{r_2 (r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2) L} t}.$$

На рис. 15-18 показан случай *размыкания ветви* электрической цепи в момент $t = 0$. Здесь $i_K(t)$ — ток, существовавший до момента размыкания ветви, условно продолженный на время $t > 0$.

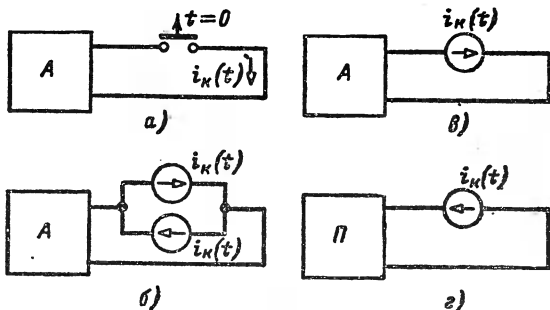


Рис. 15-18. Размыкание ветви электрической цепи.

Включив параллельно в месте размыкания два источника тока $i_K(t)$, действующие в противоположных направлениях (рис. 15-18, б), и пользуясь принципом наложения, приходим к двум схемам (в и г). В первой схеме токи те же, что и в первоначальной схеме а.

Таким образом, *переходный процесс при размыкании ветви находится в результате наложения токов предшествующего режима (при замкнутой ветви), условно продолженного на время $t > 0$, на распределение токов, полу-*

чаемое в результате включения в пассивную цепь источника тока $i_k(t)$.

Напряжения в исследуемом переходном режиме также находятся методом наложения, т. е. алгебраическим сложением напряжений на одинаковых участках цепи на рис. 15-18, а и з.

Ток $i_k(t)$ заменяется изображением $I_k(p)$, и напряжение в месте размыкания определяется по изображению

$$U(p) = Z(p) I_k(p); \quad (15-29)$$

здесь $Z(p)$ — входное операторное сопротивление пассивного двухполюсника (схема з).

Если исследуемый переходный процесс вызывается изменением схемы электрической цепи не при $t = 0$, а при $t = t_1$, то заменой переменной $t' = t - t_1$ начало отсчета времени переносится в t_1 (см. примеры 15-14 и 15-15).

Пример 15-14 [Л. 5]. В схеме на рис. 15-19 при $t=0$ замыкается контакт K_1 , а при $t=t_1$ — контакт K_2 . Требуется определить ток в цепи контакта K_2 методом эквивалентного источника.

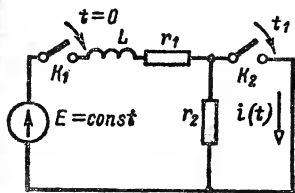


Рис. 15-19. Пример 15-14.

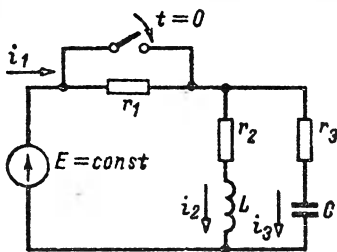


Рис. 15-20. Пример 15-15.

При $t < t_1$, т. е. до замыкания контакта K_2 , напряжение на нем определяется напряжением на сопротивлении r_2 :

$$u_x(t) = \frac{Er_2}{r_1 + r_2} (1 - e^{-at}),$$

где

$$a = \frac{r_1 + r_2}{L}.$$

Искомый ток вызывается этим напряжением, уничтожаемым в момент t_1 вследствие замыкания контакта K_2 . Начнем отсчет времени снова, приняв момент замыкания контакта K_2 за $t = 0$.

Произведем замену переменной: $t = t_1 + t'$. Следовательно,

$$u_x(t') \doteq \frac{Er_2}{(r_1+r_2)} (1 - e^{-at'} e^{-at_1}).$$

Пусть $u_x(t') \doteq U_x(p)$, т. е.

$$U_x(p) = \frac{Er_2}{r_1+r_2} \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-at_1}}{p+a} \right) = \frac{Er_2 [a+p(1-e^{-at_1})]}{(r_1+r_2)p(p+a)}.$$

Изображение искомого тока находится по формуле (15-28):

$$I(p) = \frac{U_x(p)}{Z(p)},$$

где

$$Z(p) = \frac{r_2(r_1+pL)}{r_1+r_2+pL}.$$

Подставляя выражения $U_x(p)$ и $Z(p)$ в выражение для $I(p)$, получаем:

$$I(p) = \frac{E [a+p(1-e^{-at_1})]}{(r_1+r_2)(p+b)p}.$$

Здесь

$$b = \frac{r_1}{L}.$$

Переходя к оригиналу, находим:

$$i(t') = \frac{E}{r_1} - E \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1-e^{-at_1}}{r_1+r_2} \right) e^{-bt'} \quad (t' > 0).$$

Пример 15-15 [Л. 5]. В схеме на рис. 15-20 при $t=0$ замыкается контакт K_1 , а при $t=t_1$ размыкается контакт K_2 . Требуется определить методом эквивалентного источника напряжение на зажимах K_2 после его размыкания.

При $t=t_1$, т. е. до размыкания контакта K_2 , проходящий через него ток равен:

$$i_K(t) = \frac{E}{r_1} e^{-at},$$

где

$$a = \frac{1}{r_1 C}.$$

Производим замену переменной: $t = t' + t_1$. Следовательно,

$$i_K(t') = \frac{E}{r_1} e^{-at_1} e^{-at'}.$$

Полагая $i_K(t') \doteq I_K(p)$, имеем:

$$I_K(p) = \frac{E}{r_1} e^{-at_1} \frac{1}{p+a}.$$

Обозначим через $Z(p)$ входное операторное сопротивление пассивной цепи, рассматриваемой со стороны зажимов контакта K_2 :

$$Z(p) = \frac{r_2 \left(r_1 + \frac{1}{pC} \right)}{r_1 + r_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \frac{p + a}{p + b},$$

где

$$b = \frac{1}{(r_1 + r_2) C}.$$

Изображение искомого напряжения на зажимах K_2 находится по формуле (15-29):

$$U(p) = Z(p) I_K(p) = \frac{Er_2(p+a)e^{-at_1}}{(r_1+r_2)(p+b)(p+a)} = \frac{Er_2 e^{-at_1}}{(r_1+r_2)(p+b)}.$$

Оригинал искомой функции

$$u(t') = \frac{Er_2}{r_1 + r_2} e^{-(at_1 + bt')} (t' > 0).$$

15-10. ФОРМУЛЫ ВКЛЮЧЕНИЯ

Как было показано выше, включение источника э. д. с. в пассивную (без энергии) электрическую цепь вызывает ток

$$I(p) = E(p)/Z(p).$$

Операторное сопротивление $Z(p)$ может представлять собой либо входное сопротивление (в этом случае $I(p)$ является входным током), либо величину, обратную передаточной проводимости.

Если включаемая э. д. с. задана в виде показательной функции Ee^{qt} , то

$$E(p) = \frac{E}{p - q}$$

и соответственно

$$I(p) = \frac{E}{(p - q) Z(p)}.$$

Применяя теорему разложения (15-22) получаем формулу включения для показательной э. д. с.¹

$$I(p) \doteq i(t) = \frac{Ee^{qt}}{Z(q)} + \sum_{k=1}^n \frac{Ee^{p_k t}}{(p_k - q) Z'(p_k)}. \quad 15-30$$

¹ Здесь по аналогии с § 14-7 предполагается, что уравнение $Z(p) = 0$ имеет n корней.

Первое слагаемое представляет собой принужденный ток; сумма остальных слагаемых образует свободный ток.

Наиболее распространенными на практике случаями являются случаи включения источников постоянной или синусоидальной э. д. с.

При включении источника постоянной э. д. с. ($q = 0$) формула (15-30) принимает вид:

$$i(t) = \frac{E}{Z(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{E e^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)}. \quad (15-31)$$

В случае включения источника синусоидальной э. д. с. (в комплексной форме) $q = j\omega_1$, причем вместо E должна быть введена комплексная амплитуда $E_m e^{j\psi}$:

$$I(t) = \frac{E_m e^{j(\omega_1 t + \psi)}}{Z(j\omega_1)} + \sum_{k=1}^n \frac{E_m e^{j\psi} e^{p_k t}}{(p_k - j\omega_1) Z'(p_k)}. \quad (15-32)$$

Нетрудно убедиться в том, что формулы включения (15-30) — (15-32) остаются справедливыми и в том случае, когда $Z(p)$ представляет собой дробную функцию вида $Z(p) = A(p)/B(p)$, однако при этом удобнее пользоваться теоремами разложения (15-22) и (15-23).

15-11. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ НАЛОЖЕНИЯ

Если пассивную электрическую цепь (без запаса энергии), имеющую операторное сопротивление $Z(p)$, присоединить к источнику э. д. с. $e(t) \doteq E(p)$, то возникнет ток $i(t) \doteq I(p) = E(p)/Z(p)$. Изображение искомого тока равно произведению двух функций: $1/Z(p)$ и $E(p)$.

Рассматривая функцию $1/Z(p)$ как изображение, соответствующее некоторому оригиналу $y_\delta(t)$, можно воспользоваться формулой (15-15) умножения изображений (теоремой свертывания). В результате получим:

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) y_\delta(t - \tau) d\tau = \int_0^t e(t - \tau) y_\delta(\tau) d\tau. \quad (15-33)$$

Выражение $1/Z(p)$ может трактоваться как изображение тока, возникающего в данной цепи под воздействием э. д. с., изображение которой равно единице. Функция, изображение которой равно единице, представляет собой предел прямоугольного импульса длительностью τ и высотой $1/\tau$ при $\tau \rightarrow 0$. Действительно прямоугольный импульс на рис. 15-21, а заштрихованная площадь кото-

рого равна единице, может быть представлен как разность двух единичных функций (рис. 15-21, б и в), имеющих изображения $1/\tau p$ и $e^{-p\tau}/\tau p$. Следовательно, изображение прямоугольного импульса равно $\frac{1}{\tau p} (1 - e^{-p\tau})$.

При $\tau \rightarrow 0$ данное выражение принимает неопределенный вид $0/0$. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, находим:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau p} (1 - e^{-p\tau}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{pe^{-p\tau}}{p} = 1.$$

Хотя физически этот предел нереализуем, однако на основании сказанного выше условно считается, что функция, изображение которой равно единице, означает бесконечно большой импульс бесконечно малой продолжительности; площадь, ограниченная импульсом, равна единице. Такая функция называется импульсной функцией и обозначается $\delta(t)$.

Итак, оригинал $y_\delta(t)$ представляет собой не что иное, как реакцию цепи на импульсную функцию. Если функция $y_\delta(t)$ известна, то переходный процесс в той же цепи под воздействием произвольной э. д. с. $e(t)$ рассчитывается по формуле (15-33), представляющей собой одну из разновидностей *формулы наложения*.

Другие разновидности формул наложения основаны на том, что первоначально исследуется переходный процесс под воздействием единичной функции, т. е. в предположении, что заданная цепь присоединяется к источнику постоянной э. д. с., равной 1 в.

Ток, возникающий под воздействием единичной функции, имеет изображение $1/pZ(p)$. Функция $y_1(t) \doteq 1/pZ(p)$ носит в литературе название *переходной проводимости*.

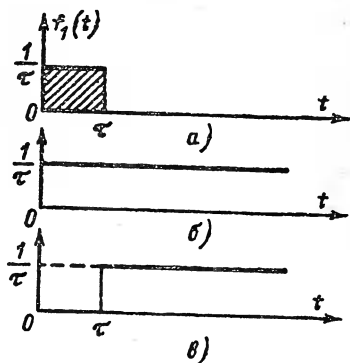


Рис. 15-21. Прямоугольный импульс как разность двух единичных функций.

Ток $i(t)$, возникающий под воздействием э. д. с. $e(t)$, имеет изображение

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = pE(p) \frac{1}{pZ(p)}. \quad (15-34)$$

Следовательно, задача сводится к нахождению оригинала по изображению, сомножителями которого являются p , $E(p) \doteq e(t)$ и $1/pZ(p) \doteq y_1(t)$.

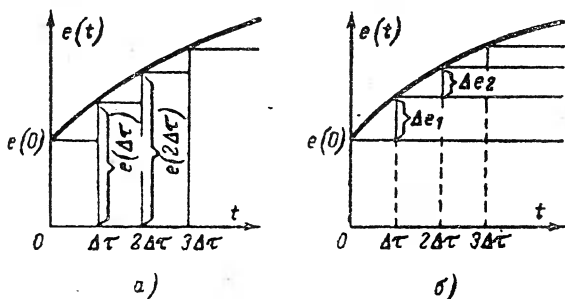


Рис. 15-22. Иллюстрация к выводу формул наложения.

В данном случае можно воспользоваться следствием теоремы свертывания, т. е. одной из формул интеграла Дюамеля (15-16):

$$\begin{aligned} i(t) &= e(0) y_1(t) + \int_0^t e'(\tau) y_1(t - \tau) d\tau = \\ &= e(t) y_1(0) + \int_0^t e(\tau) y_1'(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (15-35)$$

Таким образом, зная реакцию электрической цепи на импульсную или единичную функцию, можно найти реакцию той же цепи на произвольную функцию с помощью одной из интегральных формул (15-33) или (15-35). Эти формулы могут быть также выведены на основе метода наложения.

Заданную кривую э. д. с. $e(t)$ можно приближенно заменить ступенчатой кривой в виде серии прямоугольных импульсов длительностью $\Delta\tau$ (рис. 15-22, а). При достаточно малом $\Delta\tau$ реакция цепи на первый прямоугольный импульс приближенно равна реакции цепи на импульсную функцию, помноженную на площадь первого

прямоугольного импульса $e(0) \Delta \tau y_{\delta}(t)$. Реакция цепи на второй прямоугольный импульс приближенно равна $e(\Delta \tau) \Delta \tau y_{\delta}(t - \Delta \tau)$, где $e(\Delta \tau) \Delta \tau$ — площадь второго прямоугольного импульса, $y_{\delta}(t - \Delta \tau)$ — реакция цепи на импульсную функцию, соответствующую моменту времени $\Delta \tau$.

Следовательно, для рассматриваемого момента времени $t = n \Delta \tau$ реакция цепи приближенно выражается так:

$$i(t) \approx \sum_{k=0}^n e(k \Delta \tau) \Delta \tau y_{\delta}(t - k \Delta \tau).$$

Когда $\Delta \tau \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. В этом случае

$$i(t) = \lim_{\substack{\Delta \tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^n e(k \Delta \tau) \Delta \tau y_{\delta}(t - k \Delta \tau).$$

По мере приближения $\Delta \tau$ к нулю изменение $k \Delta \tau$ вместо скачкообразного (дискретного) становится непрерывным; операция суммирования превращается в операцию интегрирования по переменной $\tau = k \Delta \tau$:

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) y_{\delta}(t - \tau) d\tau.$$

На рис. 15-22, б кривая $e(t)$ приближенно заменена серией ступенчатых функций, запаздывающих друг относительно друга на $\Delta \tau$. Реакция цепи на первую ступень равна реакции цепи на единичную функцию, помноженную на высоту первой ступени: $e(0) y_1(t)$. Реакция цепи на вторую ступень равна $\Delta e_1 y_1(t - \Delta \tau)$, где Δe_1 — высота второй ступени, $y_1(t - \Delta \tau)$ — реакция цепи на единичную функцию, смещенную в сторону, запаздывания $\Delta \tau$.

Следовательно, для рассматриваемого момента времени $t = n \Delta \tau$ реакция цепи равна:

$$i(t) \approx e(0) y_1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta e_k y_1(t - k \Delta \tau).$$

При $\Delta \tau \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} i(t) &= e(0) y_1(t) + \lim_{\substack{\Delta \tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta e_k}{\Delta \tau} y_1(t - k \Delta \tau) \Delta \tau = \\ &= e(0) y_1(t) + \int_0^t e'(\tau) y_1(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Метод интеграла Дюамеля целесообразно применять в тех случаях, когда известна или легко находится реакция на единичную функцию, а воздействующая функция имеет кусочно-аналитическую форму.

Если воздействующая функция является разрывной при $t > 0$, то удобнее пользоваться той формой интеграла Дюамеля, которая не содержит производной этой функции. В противном случае должна быть учтена реакция цепи на соответствующий скачок функции.

Пример 15-17. Сопротивление r и емкость C , соединенные последовательно, подключаются при $t=0$ к источнику э. д. с. в виде треугольного импульса (см. рис. 15-15, а). Определить ток при $t > 2T$.

$$\text{Реакция цепи на единичную функцию равна } Y_1(p) = \frac{1}{p\left(r + \frac{1}{pC}\right)}.$$

$$\text{Следовательно, } y_1(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Воспользуемся первой формулой (15-35):

$$i(t) = e(0) y_1(t) + \int_0^t e'(\tau) y_1(t-\tau) d\tau;$$

$$i(t) = \int_0^T \frac{1}{Tr} e^{-\frac{t-\tau}{rC}} d\tau - \int_T^t \frac{1}{Tr} e^{-\frac{t-\tau}{rC}} d\tau.$$

Проинтегрировав, получим ток после окончания действия импульса, т. е. для $t > 2T$:

$$i(t) = -\frac{Ce^{-\frac{t}{rC}}}{T} \left(1 - e^{\frac{T}{rC}}\right)^2.$$

Нетрудно убедиться, что полученный результат совпадает с результатом примера 15-2, найденным с помощью преобразования Лапласа. В данном случае интеграл Дюамеля дал очень легкое решение.

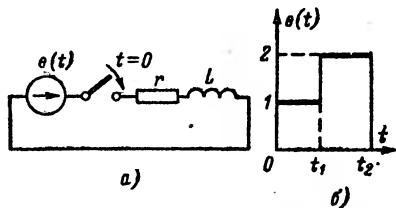


Рис. 15-23. Пример 15-18.

Пример 15-18. Сопротивление r и индуктивность L , соединенные последовательно, подключают при $t=0$ к источнику ступенчатой э. д. с., показанной на рис. 15-23. Определить ток при $t_2 > t > t_1$ и $t > t_2$.

Решение находится проще всего методом наложения. Суммируются реакции цепи на две единичные ступени напряжения, одна из

которых запаздывает на t_1 ; при $t > t_2$ вычитается реакция цепи на удвоенную ступень напряжения, смещенную в сторону запаздывания на t_2 .

Итак, при

$$t_2 > t > t_1$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{r} \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} + 1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_1)} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[2 - e^{-\frac{r}{L}t} \left(1 + e^{\frac{r}{L}t_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

При $t > t_2$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{r} \left[2 - e^{-\frac{r}{L}t} \left(1 + e^{\frac{r}{L}t_1} \right) - 2 + 2e^{-\frac{r}{L}(t-t_2)} \right] = \\ &= \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{L}t} \left(2e^{\frac{r}{L}t_2} - e^{\frac{r}{L}t_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Для сравнения приведем решения по формулам (15-33) и (15-35).

По первой формуле (15-33) $i(t) = \int_0^t e(\tau) y_\delta(t-\tau) d\tau$.

Изображение реакции цепи на импульсную функцию равно:

$$Y_\delta(p) = \frac{1}{r + pL}.$$

Следовательно,

$$y_\delta(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}t}, \quad y_\delta(t-\tau) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}.$$

При $t_2 > t > t_1$

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^{t_1} \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau + 2 \int_{t_1}^t \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{1}{r} \left[2 - e^{-\frac{r}{L}t} \left(1 + e^{\frac{r}{L}t_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

При $t > t_2$

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^{t_1} \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau + 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{L}t} \left(2e^{\frac{r}{L}t_2} - e^{\frac{r}{L}t_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

По второй формуле (15-35)

$$i(t) = e(t) y_1(0) + \int_0^t e(\tau) y_2'(t-\tau) d\tau.$$

Реакция цепи на единичную функцию равна:

$$y_1(t) = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

Следовательно,

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(t-\tau) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)},$$

т. е. получаются те же интегралы, которые были вычислены выше.

15-12. НАХОЖДЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ РЕАКЦИИ ЦЕПИ НА ПЕРИОДИЧЕСКУЮ НЕСИНУСОИДАЛЬНУЮ ВОЗДЕЙСТВУЮЩУЮ ФУНКЦИЮ

В § 13-5 было показано, что в случае периодической несинусоидальной воздействующей функции установившаяся реакция цепи может быть получена не только как сумма гармоник, но и в замкнутой форме с конечным, относительно малым числом слагаемых. Решение основывалось на интегрировании дифференциального уравнения в определенном интервале времени и нахождении постоянной интегрирования из условия периодичности процесса.

Другой метод решения этой задачи основан на применении преобразования Лапласа. Допустим, что первый период воздействующей периодической функции (равной нулю при $t < 0$) имеет изображение $F_1(p)$. Тогда изображением периодической функции-оригинала будет:

$$F(p) = F_1(p) (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где T — период.

Обозначив передаточную функцию цепи¹ через $K(p)$, получим реакцию цепи на периодическую функцию-оригинал как сумму вычетов функции:

$$\frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}} K(p) e^{pt}.$$

¹ Ход рассуждений останется тем же, если вместо передаточной функции воспользоваться сопротивлением или проводимостью цепи.

Установившаяся реакция цепи равна сумме вычетов относительно полюсов воздействующей функции $\frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$, а свободная реакция — сумме вычетов относительно полюсов передаточной функции $K(p)$.

Число полюсов воздействующей функции бесконечно велико, так как уравнению $1 - e^{-pT} = 0$ соответствует бесчисленное множество корней: $p_k = jk \frac{2\pi}{T}$ (k — целые числа). Поэтому находить установившуюся реакцию цепи непосредственно по изображению $\frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}} K(p)$ нецелесообразно (получится ряд Фурье).

Свободная же реакция цепи определяется суммой конечного числа слагаемых, так как число полюсов передаточной функции $K(p)$ ограничено (здесь рассматривается цепь с сосредоточенными параметрами).

Если из полной реакции цепи вычесть свободную реакцию, то получится установившаяся реакция цепи. При этом для первого периода полная реакция цепи на функцию $F(p)$ не отличается от реакции на функцию $F_1(p)$ и поэтому находится по изображению $F_1(p)K(p)$.

Поясним сказанное на примере, приведенном в § 13-5. Периодическая знакопеременная э. д. с. прямоугольной формы, равная нулю при $t < 0$, имеет изображение

$$\frac{E}{p} \left(1 - 2e^{-p \frac{T}{2}} + 2e^{-pT} - \dots \right) = \frac{E}{p} \frac{1 - e^{-p \frac{T}{2}}}{1 + e^{-p \frac{T}{2}}}.$$

Сопротивление цепи $Z(p) = r + pL$.

Изображение тока в цепи

$$I(p) = \frac{E}{p} \frac{1 - e^{-p \frac{T}{2}}}{\left(1 + e^{-p \frac{T}{2}} \right) (r + pL)}.$$

Свободный ток

$$i_{\text{св}} = \text{Res}_{p = -\frac{r}{L}} \frac{E}{p} \frac{\left(1 - e^{-p \frac{T}{2}} \right) e^{pt}}{\left(1 + e^{-p \frac{T}{2}} \right) (r + pL)} = \frac{E}{r} \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} e^{-\frac{r}{L} t},$$

где $a = rT/2L$.

Переходный ток в течение первого полупериода

$$i_1 = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

Следовательно, искомый установившийся ток

$$i_{уст} = i_1 - i_{св} = \frac{E}{r} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-a}} e^{-\frac{r}{L}t} \right) \\ \left(0 \leq t \leq \frac{T}{2} \right),$$

что совпадает с результатом, полученным в § 13-5.

Ниже приводятся два типовых примера для цепей первого и второго порядков.

Пример 15-19. [Л. 16]. Сопротивление $r=2$ ом и емкость $C=1$ ф, соединенные последовательно, подключены к источнику пилообразной э. д. с. вида, изображенного на рис. 15-7, а; период $T=1$ сек. Найти установившееся напряжение на сопротивлении.

Из примера 15-4 известно изображение первого периода (см. рис. 15-17, б):

$$E_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p_2}$$

и всей пилообразной функции (рис. 15-7, а):

$$E(p) = \frac{E_1(p)}{1 - e^{-p}}.$$

Передаточная функция равна:

$$\frac{r}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{2}{2 + \frac{1}{p}} = \frac{p}{p + \frac{1}{2}}.$$

Изображение реакции цепи на пилообразную функцию

$$U(p) = \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p \left(p + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-p})} = \\ = \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{2} \right)} - \frac{e^{-p}}{\left(p + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-p})}.$$

Свободное напряжение на сопротивлении

$$u_{св} = \operatorname{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{pt}}{p \left(p + \frac{1}{2} \right)} \right] - \operatorname{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{p(t-1)}}{\left(p + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-p})} \right] =$$

$$= -2e^{-\frac{t}{2}} - \frac{e^{-\frac{t}{2}} e^{\frac{1}{2}}}{1 - e^{\frac{1}{2}}} = -2e^{-\frac{t}{2}} + \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}.$$

Переходное напряжение на сопротивлении в течение первого периода (т. е. реакция цепи на первый «зубец»)

$$u_1 = \operatorname{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{pt}}{p \left(p + \frac{1}{2} \right)} \right] = 2 - 2e^{-\frac{t}{2}} \quad (0 \leq t < 1).$$

Здесь принято во внимание только первое слагаемое изображения «зубца», так как два вторых слагаемых не относятся ко времени $t < 1$.

Установившееся напряжение на сопротивлении в течение первого периода

$$u_{уст} = u_1 - u_{св} = 2 - 2e^{-\frac{t}{2}} - \left(-2e^{-\frac{t}{2}} + \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{1 + e^{-\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$= 2 - \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \quad (0 \leq t < 1).$$

Правильность ответа может быть проверена по условию непрерывности установившегося напряжения на емкости:

$$u_{C_{уст}}(0) = u_{C_{уст}}(1) = \frac{-1 + 2e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}.$$

Пример 15-20 [Л. 16]. Сопротивление $r=3$ ом, индуктивность $L=1$ гн и емкость $C=1/2$ ф, соединенные последовательно, подключены к источнику периодической э. д. с. треугольной формы:

$$e(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \text{ и т. д.} \end{cases}$$

Найти установившееся напряжение на емкости.

Из примера 15-12 известно изображение треугольника (см. рис. 15-15, а):

$$E_1(p) = \frac{1}{p^2} (1 - 2e^{-p} + e^{-2p}) = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p})^2.$$

Периодическая э. д. с. треугольной формы, равная нулю при $t < 0$, имеет изображение

$$E(p) = \frac{E_1(p)}{1 - e^{-2p}} = \frac{1 - e^{-p}}{p^2 (1 + e^{-p})}.$$

Передаточная функция равна:

$$\frac{1}{pC} \cdot \frac{1}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{\frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{2}p + 1} = \frac{2}{(p+1)(p+2)}.$$

Изображение реакции цепи на периодическую э. д. с.

$$U(p) = \frac{2(1 - e^{-p})}{p^2 (1 + e^{-p}) (p+1)(p+2)}.$$

Свободное напряжение на емкости

$$u_{св} = \text{Res}_{p=-1} \frac{2(1 - e^{-p}) e^{pt}}{p^2 (1 + e^{-p}) (p+1)(p+2)} + \\ + \text{Res}_{p=-2} \frac{2(1 - e^{-p}) e^{pt}}{p^2 (1 + e^{-p}) (p+1)(p+2)}.$$

Изображение напряжения на емкости в первом периоде

$$U_1(p) = E_1(p) \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{2(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})}{p^2 (p+1)(p+2)}$$

имеет простые полюсы $p_1 = -1$ и $p_2 = -2$ и полюс второго порядка $p_3 = 0$.

В интервале $0 \leq t < 1$ принимается во внимание только первое слагаемое числителя, так как второе и третье слагаемые относятся к последующим интервалам времени.

На основании (15-22) и (15-23) переходное напряжение на емкости

$$u_1(t) = \frac{1}{2} (2t - 3 + 4e^{-t} - e^{-2t}) \quad (0 \leq t < 1);$$

$$u_2(t) = u_1(t) - 2u_1(t-1) \quad (1 \leq t < 2).$$

Искомое установившееся напряжение на емкости

$$u_{уст} = t - \frac{3}{2} + \frac{4e^{-(t-1)}}{1+e} - \frac{e^{-2(t-1)}}{1+e^2} \quad (0 \leq t < 1);$$

$$u_{уст} = -(t-2) + \frac{3}{2} - \frac{4e^{-(t-2)}}{1+e} + \frac{e^{-2(t-2)}}{1+e^2} \quad (1 \leq t < 2).$$

Проверка:

$$u_{уст}(0) = u_{уст}(2) = \frac{-3 + 5e - 5e^2 + 3e^3}{2(1+e)(1+e^2)}.$$

15-13. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В гл. 11 (см. § 11-2) были выведены дифференциальные уравнения однородной двухпроводной линии; ввиду наличия двух независимых переменных (t и x) дифференциальные уравнения получились в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (15-36)$$

Минусы в левой части уравнений (15-36) соответствуют случаю, когда расстояние x отсчитывается от начала линии, или, точнее, в положительном направлении тока.

Формула дифференцирования по параметру (табл. 15-1) позволяет применить преобразование Лапласа к уравнениям (15-36), в которых x является параметром.

Если изображения искомых функций обозначить через

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &\doteq U(x, p) = U; \\ i(x, t) &\doteq I(x, p) = I, \end{aligned} \right\} \quad (15-37)$$

то системе дифференциальных уравнений в частных производных (15-36) будет соответствовать система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= (r + pL)I - Li(x, 0); \\ -\frac{dI}{dx} &= (g + pC)U - Cu(x, 0); \end{aligned} \right\} \quad (15-38)$$

здесь $i(x, 0)$ и $u(x, 0)$ — начальные (по времени) значения тока и напряжения в точке x .

Ввиду того что p не зависит от x и в уравнениях (15-38) производные по p отсутствуют, при переходе от уравнений (15-36) к (15-38) частные производные по x заменены обыкновенными.

Исключая из системы (15-38) I , получаем уравнение относительно U :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} &= (r + pL)(g + pC)U + \\ &+ L \frac{di(x, 0)}{dx} - C(r + pL)u(x, 0). \end{aligned} \quad (15-39)$$

Аналогично, исключая из (15-38) U , получаем уравнение относительно I :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dx^2} &= (r + pL)(g + pC)I + \\ &+ C \frac{du(x, 0)}{dx} - L(g + pC)i(x, 0). \end{aligned} \quad (15-40)$$

Эти уравнения решаются как обычные дифференциальные уравнения второго порядка.

Обозначим:

$$\gamma(p) = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}$$

и назовем это выражение операторным коэффициентом распространения.

При нулевых начальных значениях уравнения (15-39) и (15-40) упростятся:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} &= \gamma^2 U; \\ \frac{d^2 I}{dx^2} &= \gamma^2 I. \end{aligned} \right\} \quad (15-41)$$

Обращает на себя внимание сходство полученных операторных уравнений (15-41) при нулевых начальных условиях с дифференциальными уравнениями однородной линии при установившемся режиме.

Соответственно остаются в силе для (15-41) решения, полученные в гл. 11 (см. § 11-3), если под U и I подразумевать изображения напряжения и тока, а под

$$Z_B(p) = \sqrt{\frac{r + pL}{g + pC}}$$

операторное волновое сопротивление линии¹.

В общем случае переход от изображений $U(x, p)$ и $I(x, p)$, являющихся трансцендентными функциями p , к исходным оригиналам $u(x, t)$ и $i(x, t)$ представляет значительные трудности. При решении задач обычно делаются какие-либо упрощающие предположения [Л. 2 и 8].

15-14. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

15-1. Сопротивление $r=2$ ом и индуктивность $L=1$ гн, соединенные последовательно, подключаются при $t=0$ к источнику э. д. с. $e(t)=t$, в. Определить $i(t)$.

О т в е т: $\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$, а.

15-2. Применить обратное преобразование Лапласа к изображениям:

$$\frac{3p}{(p^2+1)(p^2+4)}; \frac{p+1}{p^2+2p};$$

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}; \frac{1}{p(p^2+2p+5)}; \frac{p^2}{(p^2+1)^2}.$$

О т в е т: $\cos t - \cos 2t$;

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-2t}); e^{-t} - e^{-2t}(1+t);$$

$$\frac{1}{5} \left[1 + \frac{1}{2} e^{-t} (-2 \cos 2t - \sin 2t) \right]; \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t.$$

15-3. Применяв преобразование Лапласа, решить задачи предыдущей главы: 14-3, 14-4, 14-5, 14-6 и 14-9.

15-4. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления $r=2$ ом, индуктивности $L=1$ гн и незаряженной емкости $C=0,5$ ф, подключена при $t=0$ к источнику э. д. с. $e(t)=\sin t$, в. Определить $i(t)$.

О т в е т: $0,2(\cos t + 2 \sin t - e^{-t} \cos t - 3e^{-t} \sin t)$, а.

15-5. Два одинаковых индуктивных контура rLC связаны взаимной индуктивностью M . В один из них при $t=0$ включена постоянная э. д. с. E .

Найти ток в другом контуре.

О т в е т:

$$\frac{E}{2} \left[\frac{e^{-\delta_1 t} \sin \omega_1 t}{\omega_1 (K+M)} - \frac{e^{-\delta_2 t} \sin \omega_2 t}{\omega_2 (L-M)} \right];$$

¹ Если в выражениях для $\gamma(p)$ и $Z_{\text{в}}(p)$ заменить p на $j\omega$, то получатся известные выражения для параметров линии при синусоидальном режиме.

$$\delta_{1,2} = \frac{r}{2(L \pm M)}; \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{C(L \pm M)} - \delta_{1,2}^2.$$

15-6. Сопротивление $r=10$ ом и индуктивность $L=0,1$ гн, соединенные последовательно, подключаются при $t=0$ к источнику э. д. с. $10 e^{-4t}$ в. Определить $i(t)$.

Ответ: $1,04 (e^{-4t} - e^{-100t}),$ а.

15-7. Сопротивление $r=1000$ ом и незаряженная емкость $C=10$ мкф, соединенные последовательно, подключаются при $t=0$ к источнику э. д. с. $2,5 \cdot 10^4 (1 - e^{-4t})$ в. Найти $i(t)$.

Ответ: $1,04 (e^{-4t} - e^{-100t}),$ а.

15-8. Найти оригинал по изображению

$$\frac{p^2 - p + 10}{(p+1)^2 (p^2 + 100)}.$$

Ответ:

$$0,119 te^{-t} - 0,027 e^{-t} + 0,027 \cos 10t + 0,086 \sin 10t.$$

15-9. В контуре, состоящем из сопротивления 40 ом и индуктивности 0,1 гн, при установившемся режиме действует э. д. с. $e=100 \cos 400t$, в.

Найти $i(t)$ при $t>0$, если, начиная с момента $t=0$, амплитуда э. д. с. становится равной 40 в.

Ответ:

$$0,707 \cos (400t - \pi/4) + 0,75 e^{-400t}, \text{ в.}$$

15-10. При нулевых начальных условиях в контур rL включается источник э. д. с. Ee^{-at} . Определить токи при $a \neq r/L$ и $a = r/L$.

Ответ:

$$\frac{E}{r-aL} \left(e^{-at} - e^{-\frac{r}{L}t} \right); \quad \frac{E}{L} te^{-\frac{r}{L}t}.$$

15-11. Решить предыдущую задачу, если э. д. с. равна Ete^{-at} .

Ответ:

$$\frac{E}{r-aL} te^{-at} + \frac{EL}{(r-aL)^2} \left(e^{-\frac{r}{L}t} - e^{-at} \right); \quad \frac{E}{2L} t^2 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

15-12. Источник тока, посылающий ток $i=1$ а в виде прямоугольного импульса длительностью 0,001 сек, подключен при $t=0$ к сопротивлению $r=100$ ом и емкости $C=10$ мкф, соединенным параллельно. Начальные условия нулевые. Определить напряжение на зажимах цепи.

Ответ:

$$100 (1 - e^{-10^3 t}) - 100 [1 - e^{-10^3 (t-0,001)}] 1 (t - 0,001), \text{ в.}$$

15-13. Пользуясь решением примера 15-12 (см. рис. 15-15), найти установившийся ток в r и C , соединенных последовательно и подключенных к источнику периодической э. д. с. треугольной формы.

О т в е т ы

$$\frac{C}{T} \left(1 - 2 \frac{e^{\frac{T-t}{rC}}}{1 + e^{\frac{T}{rC}}} \right) (0 \leq t < T);$$

$$\frac{C}{T} \left(-1 + 2 \frac{e^{\frac{2T-t}{rC}}}{1 + e^{\frac{T}{rC}}} \right) (T \leq t < 2T).$$

15-14. Доказать применимость теоремы об эквивалентном источнике напряжения к изображениям.

15-15. Как учитывается энергия магнитного и электрического полей, имеющаяся к началу исследуемого переходного процесса?

15-16. На каком основании при обратном преобразовании Лапласа применяется теория вычетов?

15-17. Что такое импульсная функция? Показать, что

$$\int_0^t \delta(t) dt = 1.$$

15-18. Найти изображение импульса произвольной формы, если известно изображение функции, получаемой периодическим повторением данного импульса.



ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

16-1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Допустим, что заданная непериодическая функция $f(t)$ преобразуема по Лапласу, причем показатель роста c_0 отрицателен, т. е. для всех $t > 0$.

$$|f(t)| < M e^{-|c_0|t}. \quad (16-1)$$

Это означает, что функция не превосходит некоторой затухающей экспоненты; следовательно, интеграл $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$

равен конечному числу (условие абсолютной интегрируемости функции). В таком случае изображение $F(p) \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ является аналитической функцией в полуплоско-

сти $\operatorname{Re} p > c_0$, а следовательно, и на мнимой оси; поэтому в формулах прямого и обратного преобразований Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

можно положить $c = 0$ и $p = j\omega$, т. е. за путь интегрирования в формуле обратного преобразования Лапласа выбрать мнимую ось.

Тогда будем иметь:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (16-2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16-3)$$

Эти формулы, известные под названием *одностороннего преобразования Фурье*, имеют более узкую область применения, чем преобразование Лапласа. Это связано с тем, что для сходимости несобственного интеграла (16-2) на функцию $f(t)$ наложено ограничение (16-1), которое является более жестким, чем условие $|f(t)| < Me^{c_0 t}$, предъявляемое к функциям-оригиналам (см. § 15-2).

Например, такие функции¹, как единичная, возрастающая показательная, периодические и некоторые другие функции-оригиналы, имеющие лапласовы изображения, не могут быть непосредственно представлены в виде интеграла Фурье (16-3).

Если заданная функция, преобразуемая по Лапласу, удовлетворяет условию (16-1), то свойства преобразования Лапласа сохраняют силу при $p = j\omega$. Соответственно свойства преобразования Фурье получаются на основании свойств преобразования Лапласа заменой p на $j\omega$. В этом смысле можно говорить, что преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа.

Из изложенного выше следует, что всякая функция, для которой применимо одностороннее преобразование

¹ Здесь имеются в виду функции, равные нулю при $t < 0$.

Фурье, всегда может быть преобразована по Лапласу. Значит, для нашей функции по изображению Лапласа можно находить $F(j\omega)$ (заменой p на $j\omega$).

16-2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Формулы преобразования Фурье представляют собой взаимно связанные интегральные уравнения, каждое из которых служит решением другого. Эти формулы позволяют преобразовать непериодическую функцию времени $f(t)$ в функцию частоты $F(j\omega)$ и обратно.

Для выражения связи между $F(j\omega)$ и $f(t)$, накладываемой преобразованием Фурье на эти функции, может быть применен тот же знак соответствия $\doteq$, которым мы пользовались в предыдущей главе. Итак, сокращенная условная запись $F(j\omega) \doteq f(t)$ обозначает, что $F(j\omega)$ и $f(t)$ связаны уравнениями (16-2) и (16-3).

Частотная функция $F(j\omega)$ носит название спектральной характеристики или спектральной плотности непериодической функции $f(t)$. Спектральная характеристика является функцией текущей частоты ω .

Согласно (16-3) непериодическая функция $f(t)$ представляется совокупностью бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами $\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega$ во всем диапазоне частот от $-\infty$ до $+\infty$. Иначе говоря, представление непериодической функции в виде интеграла Фурье подразумевает суммирование незатухающих гармонических колебаний бесконечного сплошного спектра частот.

Такой метод представления непериодических функций несколько сходен с методом разложения периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье (при комплексной форме ряда, так же как и в (16-3), присутствуют положительные и отрицательные частоты). Однако в отличие от представления периодических функций в виде дискретного ряда гармоник в данном случае *суммируются гармонические колебания сплошного спектра частот*. При этом интеграл Фурье (16-3) обладает тем ценным свойством, что, правильно описывая функцию $f(t)$ при $t > 0$, он тождественно обращается в нуль при $t < 0$.

Например, если на электрическую цепь с момента $t = 0$ воздействует функция $f(t)$, то представление ее ин-

тегралом (16-3) подразумевает существование бесконечного числа колебаний всевозможных частот с бесконечно малыми амплитудами во всем интервале времени от $t = -\infty$ до рассматриваемого момента t , причем при $t < 0$ все эти колебания дают в сумме нуль.

Если заданная непериодическая функция $f(t)$ не равна нулю для отрицательных значений t , то в формуле (16-2) нижним пределом интеграла берется $-\infty$, а не 0:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (16-4)$$

В этом случае преобразование Фурье называется *двусторонним*¹. Для сходимости несобственного интеграла (16-4) должно выполняться условие абсолютной интегрируемости функции в бесконечных пределах, т. е. должен существовать и иметь конечное значение интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Спектральную характеристику непериодической функции можно представить как огибающую коэффициентов ряда Фурье, т. е. как предел линейчатого спектра частот периодической функции, когда период стремится к бесконечности. Если непериодическая функция $f(t)$ задана в конечных пределах, то всегда можно подобрать такое T , чтобы выполнялось равенство

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Соответствующая этому случаю периодическая функция, совпадающая с $f(t)$ в пределах от $-\frac{T}{2}$ до $\frac{T}{2}$ и имеющая период T , характеризуется коэффициентами разложения в ряд Фурье согласно формуле (13-13):

$$\dot{F}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (16-5)$$

¹ В теории преобразования Лапласа иногда также пользуются двусторонним преобразованием Лапласа.

где $\omega_1 = 2\pi/T$ — основная угловая частота; она имеет индекс 1 для отличия ее от текущей частоты ω в (16-14).

Из сопоставления (16-4) с (16-5) видно, что спектральная характеристика $F(j\omega)$ заданной в конечных пределах непериодической функции $f(t)$ в масштабе $2/T$ изображает огибающую дискретного ряда коэффициен-

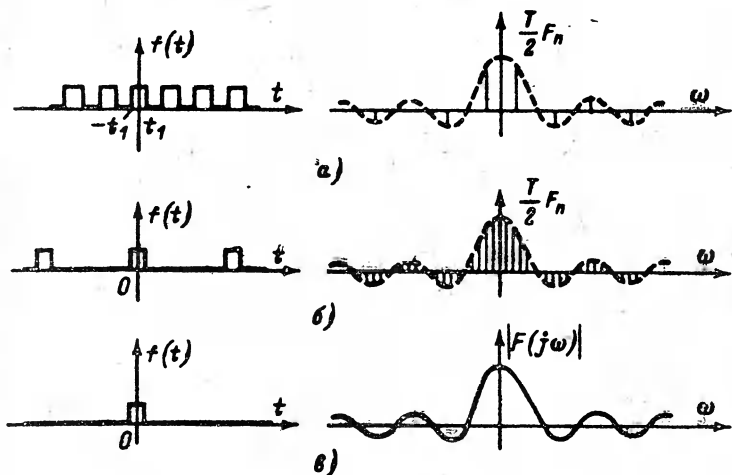


Рис. 16-1. Переход от коэффициентов разложения к спектральной характеристике.

тов $\dot{F}_n$ разложения, соответствующего периодическому повторению заданной функции:

$$\frac{T}{2} \dot{F}_n = [F(j\omega)]_{\omega=n\omega_1}. \quad (16-6)$$

По мере возрастания периода T интервал по шкале частот между составляющими ряда Фурье уменьшается и линейчатый спектр все более сгущается, стремясь перейти в пределе в сплошной спектр.

Рисунок 16-1 иллюстрирует постепенный переход от коэффициентов разложения к спектральной характеристике.

Периодические функции на рис. 16-1, а и б в интервале $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ заданы условиями:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } -t_1 < t < t_1, \\ 0 & \text{при } -t_1 > t > t_1. \end{cases}$$

Для непериодической функции (рис. 16-1, в) те же условия сохраняют силу на всей оси времени t .

Согласно (16-4) и (16-5):

$$F(j\omega) = \int_{-t_1}^{t_1} e^{-j\omega t} dt = 2t_1 \frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1};$$

$$\dot{F}_n = \frac{2}{T} \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{4t_1}{T} \frac{\sin n\omega_1 t_1}{n\omega_1 t_1}.$$

Представление непериодической функции в виде совокупности гармонических колебаний позволяет на основании спектральной характеристики судить о распределении энергии в спектре и оценивать значимость отдельных частотных полос этого спектра. Например, полученное выражение

$$F(j\omega) = 2t_1 \frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1}$$

показывает (рис. 16-1, в), что функция $F(j\omega)$ обращается в нуль при $\omega = \frac{\pi}{t_1}k$ ($k=1, 2 \dots$). По мере уменьшения t_1 интервал между нулями функции $F(j\omega)$ возрастает.

Рассматриваемая здесь непериодическая функция $f(t)$ (рис. 16-1, в) выражается формулой (16-3) как совокупность гармонических колебаний бесконечного спектра частот. Если же используется часть спектра, то для достаточно правильного воспроизведения функции $f(t)$ требуется тем большая полоса частот, чем меньше t_1 .

Спектральная характеристика $F(j\omega)$ может быть действительной или комплексной.

Приняв в общем случае $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{-j\psi(\omega)}$ получим две частотные характеристики, а именно: амплитудный спектр $|F(j\omega)|$ и фазовый спектр $\psi(\omega)$.

Амплитудный спектр — всегда четная, а фазовый спектр — всегда нечетная функция ω .

Из формул одностороннего преобразования Фурье и Лапласа видно, что если выполняется неравенство (16-1), то при замене комплексного переменного p , входящего в изображение по Лапласу, мнимой величиной $j\omega$ получается выражение для спектральной характеристики

$$F(j\omega) = [F(p)]_{p=j\omega}. \quad (16-7)$$

Такой способ нахождения спектральных характеристик является наиболее простым и удобным, так как он позволяет использовать таблицы оригиналов и изображений (см. примеры 16-1 и 16-2).

Родственная связь, существующая между преобразованиями Лапласа и Фурье, вносит, таким образом, физическое содержание в понятие «изображение» как обобщенную форму спектральной характеристики. Она рас-

Таблица 16-1

Основные свойства одностороннего преобразования Фурье

Наименование	Формула
Свойство линейности	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega)$
Дифференцирование функции времени	$f'(t) \doteq j\omega F(j\omega) - f(0)$
Интегрирование функции времени	$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(j\omega)}{j\omega}$
Дифференцирование спектральной характеристики	$(-jt) f(t) \doteq \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$
Изменение масштаба независимого переменного	$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(j \frac{\omega}{\alpha}\right)$
Смещение функции времени	$f(t \pm t_0) \doteq e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega)$
Смещение спектральной характеристики	$e^{\pm j\omega_1 t} f(t) \doteq F[j(\omega \mp \omega_1)]$
Умножение спектральных характеристик	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq F_1(j\omega) F_2(j\omega)$
Умножение функции времени на косинус или синус	$f(t) \cos \omega_1 t \doteq \frac{1}{2} \{F[j(\omega - \omega_1)] + F[j(\omega + \omega_1)]\}$ $f(t) \sin \omega_1 t \doteq \frac{1}{2j} \{F[j(\omega - \omega_1)] - F[j(\omega + \omega_1)]\}$

пространяется и на основные свойства преобразований Фурье и Лапласа.

В табл. 16-1 приведены основные свойства одностороннего преобразования Фурье, которые в ряде случаев облегчают нахождение функций времени или их спектральных характеристик. Если над некоторой функцией времени, спектральная характеристика которой известна, производится одна из операций, указанных в табл. 16-1, то спектральная характеристика, соответствующая полученной новой функции времени, находится по соответствующему правилу из первоначальной спектральной характеристики (см. пример 16-2).

В свою очередь если спектральная характеристика претерпевает какую-либо операцию, то функция времени, соответствующая новой спектральной характеристике, также находится по известным правилам.

Указанные в табл. 16-1 основные свойства одностороннего преобразования Фурье имеют важный физический смысл. Например, согласно теореме об изменении масштабов независимого переменного при изменении масштаба времени в a раз масштаб частот меняется в $1/a$ раз. Это означает, что ширина спектра увеличивается при сжатии сигнала во времени и сокращается при растяжении сигнала (без изменения самого характера спектра). Поэтому бесконечно короткий импульс должен иметь бесконечно широкий спектр. Здесь под шириной спектра сигнала понимается область частот, в пределах которой заключена основная доля его энергии.

Представление непериодической функции в виде совокупности незатухающих гармонических колебаний дает возможность исследовать переходный процесс в линейной электрической цепи, применяя к спектральной характеристике общие методы расчета установившихся синусоидальных процессов (см. § 16-3) и (16-4).

Пример 16-1. Построить графики амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса (рис. 16-2, а).

Непериодическая функция задана условием

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при } 0 > t > \tau. \end{cases}$$

На основании (16-2)

$$F(j\omega) = \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = \left[\frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \right] e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Тот же результат может быть получен на основании (16-7), если в изображении по Лапласу

$$F(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

заменить p через $j\omega$.

Амплитудный спектр равен:

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \right|.$$

Нули функции $F(j\omega)$ соответствуют значениям $\frac{\omega\tau}{2} = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$). При $\frac{\omega\tau}{2} = \frac{\pi}{2} (2k + 1)$

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|} = \frac{\tau}{\frac{\pi}{2} (2k + 1)}.$$

С учетом знака $\sin \frac{\omega\tau}{2}$ фазовый спектр $\psi(\omega)$ определяется следующим образом:

$$\psi(\omega) = \frac{\omega\tau}{2}$$

$$\text{при } 0 < \omega < \frac{2\pi}{\tau};$$

$$\psi(\omega) = \frac{\omega\tau}{2} - \pi \text{ при } \frac{2\pi}{\tau} <$$

$$< \omega < \frac{4\pi}{\tau} \text{ и т. д.}$$

Кривые $|F(j\omega)|$ и $\psi(\omega)$ изображены на рис. 16-2, б и в.

Следует обратить внимание на то, что в соответствии с формулой сдвига функции времени (см. табл. 16-1) перемещение импульса неизменной длительности τ вдоль оси времени на t_0 не влияет на амплитудный спектр, а изменяет только фазовый спектр на угол ωt_0 ; это видно и из сравнения амплитудных спектров на рис. 16-1, в и 16-2, б.

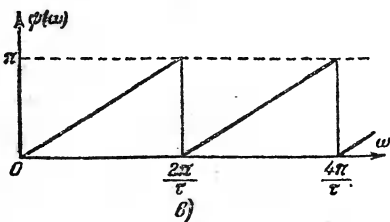
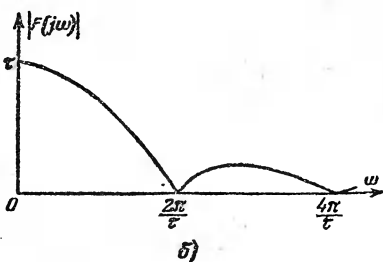
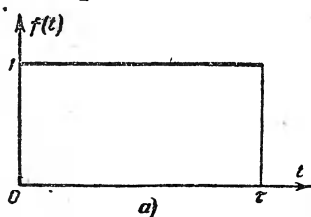


Рис. 16-2. Прямоугольный импульс (а) и его амплитудный (б) и фазовый (в) спектры.

С увеличением длительности импульса τ амплитудный спектр группируется во все более узкой области частот вблизи нулевой частоты, причем значение амплитудного спектра при нулевой частоте, равное τ , возрастает, стремясь в пределе к бесконечности. Это физически означает, что энергия сигнала, выражаемого рассматриваемой функцией, при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности и в основном сосредоточивается около частоты $\omega = 0$. Функции, определяющие сигнал с бесконечной энергией, не удов-

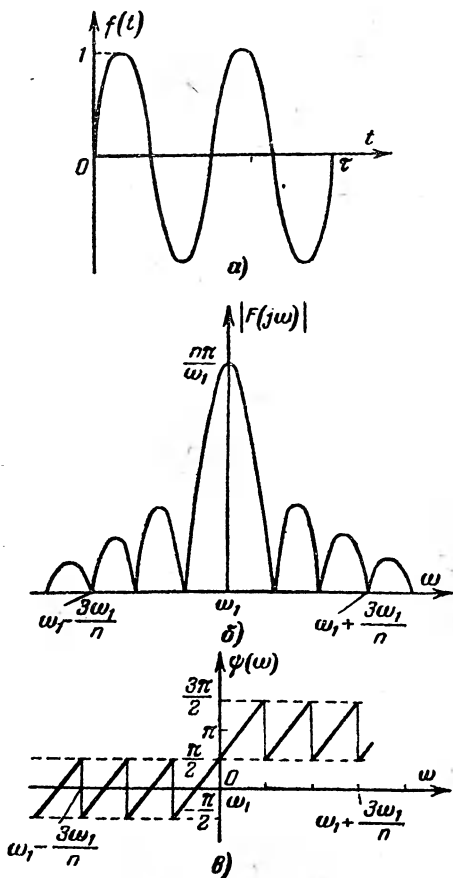


Рис. 16-3. Отрезок синусоиды (а) и его амплитудный (б) и фазовый (в) спектры.

летворяют условию абсолютной интегрируемости, и интеграл (16-2) к такого рода функциям непосредственно неприменим. Чтобы обойти ограничения, накладываемые условием абсолютной интегрируемости, применяют искусственный прием (см. ниже).

Пример 16-2. Построить графики амплитудного и фазового спектров функции в виде отрезка синусоиды, так называемого прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением (рис. 16-3, а). Не-периодическая функция задана условием

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_1 t & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при } 0 > t > \tau. \end{cases}$$

Пусть $\tau = nT = n \frac{2\pi}{\omega_1}$, где T — период синусоиды, а n — число периодов за время τ .

Изображение по Лапласу отрезка синусоиды, заданного в интервале от 0 до $n \frac{2\pi}{\omega_1}$, имеет вид:

$$\frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} (1 - e^{-pnT}).$$

На основании (16-7)

$$F(j\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \left(1 - e^{-j \frac{\omega}{\omega_1} n 2\pi} \right).$$

Тот же результат получится, если воспользоваться спектральной характеристикой прямоугольного импульса $\frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau})$, вычисленной в примере 16-1, и применить формулу умножения функции времени на синус (см. табл. 16-1):

$$F(j\omega) = \frac{1}{2j} \left[\frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_1)\tau}}{j(\omega - \omega_1)} - \frac{1 - e^{-j(\omega + \omega_1)\tau}}{j(\omega + \omega_1)} \right].$$

При $\omega_1\tau = n 2\pi$, где n — целое число,

$$F(j\omega) = \frac{\omega_1 (1 - e^{-j\omega\tau})}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Отсюда можно получить амплитудный спектр

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} 2 \sin \frac{\omega}{\omega_1} n\pi \right|.$$

При $\omega = \omega_1$ эта функция равна предельному значению, которое находится по правилу Лопиталья:

$$|F(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \left| \frac{\omega_1 \frac{n\pi}{\omega_1} - 2 \cos \frac{\omega}{\omega_1} n\pi}{-2\omega} \right| = \frac{n\pi}{\omega_1};$$

при $\frac{\omega}{\omega_1} n = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеем $|F(j\omega)| = 0$.

Кривые $|F(j\omega)|$ и $\psi(\omega)$ изображены на рис. 16-3,б и в. При увеличении n амплитудный спектр группируется во все более узкой области частот вблизи ω_1 . При $n \rightarrow \infty$ составляющая амплитудного спектра, соответствующая $\omega = \omega_1$, также стремится к бесконечности. Физический смысл этого аналогичен тому, что было сказано ранее.

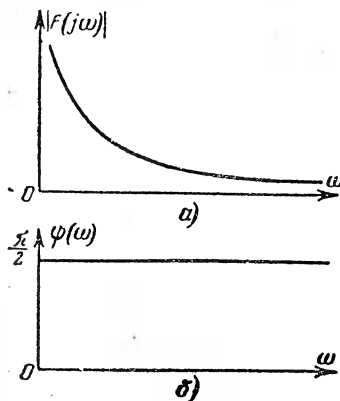


Рис. 16-4. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры единичной функции.

Как отмечалось выше, интеграл (16-2) непосредственно неприменим к функциям времени, которые не удовлетворяют условию (16-1), т. е. не сходятся абсолютно. Сюда относятся и некоторые функции с показателем роста, равным нулю ($c_0 = 0$), например: единичная функция, синусоидальная и др. Умножив такого рода функцию $f(t)$ на множитель e^{-at} ($a > 0$), «гасящий» $f(t)$ при больших значениях аргумента, можно вычислить спектральную характеристику для измененной функции $e^{-at}f(t)$; затем,

устремив a к нулю, найти предельное значение спектральной характеристики, которое будет представлять собой спектральную характеристику исходной функции $f(t)$.

Например, убывающая показательная функция $e^{-at} \cdot 1(t)$ имеет спектральную характеристику $\frac{1}{a + j\omega}$.

Ее пределом при $a \rightarrow 0$ является выражение $1/j\omega$, которое и определит спектральную характеристику единичной функции $1(t)$. Амплитудный и фазовый спектры единичной функции показаны на рис. 16-4.

Умножение заданной функции на гасящий множитель e^{-at} с последующим нахождением предельного значения

$F(j\omega)$ при $a \rightarrow 0$, вообще говоря, не требуется, если для этой функции, имеющей показатель роста, равный нулю, известно изображение по Лапласу. Тогда в силу сказанного выше (см. § 16-1) достаточно в изображении заменить p на $j\omega$, чтобы получить сразу спектральную характеристику заданной функции.

Пример 16-3. Найти спектр синусоидальной функции (равной нулю при $t < 0$).

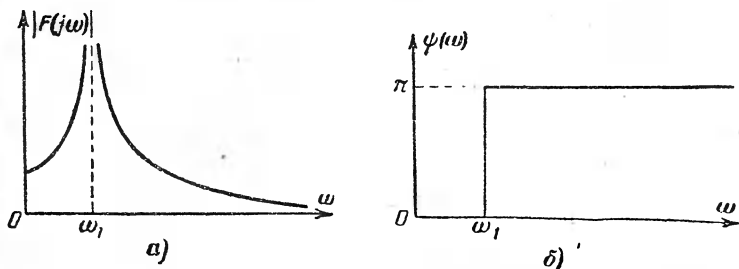


Рис. 16-5. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры синусоидальной функции, начинающейся в момент $t=0$.

На основании преобразования Лапласа

$$\sin \omega_1 t \div \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} = F(p).$$

Спектральная характеристика получается заменой p на $j\omega$:

$$F(\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

На рис. 16-5 показаны кривые амплитудного и фазового спектров этой функции.

16-3. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ДВУХПОЛЮСНИКЕ

Как отмечалось в § 16-2, представление непериодической функции в виде суммы бесконечного множества незатухающих гармонических колебаний бесконечно малой амплитуды дает возможность применять к бесконечно малым гармоническим составляющим напряжений и токов обычные методы расчета установившихся синусоидальных процессов в линейных электрических цепях и затем, пользуясь методом наложения, определять результирующие напряжения и токи.

Положим, что линейный двухполюсник, имеющий комплексное сопротивление $Z(j\omega)$, присоединяется в момент $t=0$ при нулевых начальных условиях к источнику э. д. с. $e(t)$.

Если через $E(j\omega)$ обозначить спектральную характеристику воздействующей э. д. с., то спектральная характеристика тока найдется по формуле

$$I(j\omega) = Y(j\omega) E(j\omega); \quad (16-8)$$

здесь $Y(j\omega)$ — комплексная проводимость цепи; она определяется в установившемся режиме для всего спектра частот.

Переходный ток в двухполюснике следует найти по формуле (16-3):

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16-9)$$

Вычисление $i(t)$ непосредственно по формуле (16-9) не имеет преимуществ по сравнению с вычислением при помощи обратного преобразования Лапласа.

Для вычисления $i(t)$ можно воспользоваться одним из правил нахождения функции времени по спектральной характеристике, которые аналогичны правилам нахождения оригинала по изображению Лапласа (с заменой p на $j\omega$).

Рассматривая функцию $Y(j\omega)$ как спектральную характеристику некоторой функции времени $y_\delta(t)$ и имея в виду, что $E(j\omega)$ соответствует $e(t)$, можно также применить формулу умножения спектральных характеристик (см. табл. 16-1):

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) y_\delta(t - \tau) d\tau = \int_0^t e(t - \tau) y_\delta(\tau) d\tau. \quad (16-10)$$

Данная формула совпадает с формулой (15-33), приведенной в § 15-11, причем $y_\delta(t)$ означает реакцию цепи на импульсную функцию.

В случае, когда воздействующая э. д. с. $e(t)$ задана в виде единичной, синусоидальной или косинусоидальной функции, причем известна частотная характеристика активной или реактивной проводимости двухполюсника, можно воспользоваться интегральной формой выражения этой функции, вытекающей из преобразования Фурье.

Рассмотрим, например, включение в момент $t=0$ источника постоянной э. д. с. E в цепь двухполюсника, имеющего комплексную проводимость

$$Y(j\omega) = g(\omega) - jb(\omega).$$

Пользуясь известной интегральной формой выражения единичной функции [Л. 2]

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

находим ток в контуре:

$$i(t) = \frac{E}{2Z(0)} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\omega |Z(j\omega)|} d\omega = \frac{E}{2Z(0)} + \\ + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \varphi \sin \omega t}{\omega |Z(j\omega)|} d\omega - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi \cos \omega t}{\omega |Z(j\omega)|} d\omega.$$

Вводя в подынтегральное выражение активную и реактивную проводимости

$$g(\omega) = \frac{\cos \varphi}{|Z(j\omega)|} \text{ и } b(\omega) = \frac{\sin \varphi}{|Z(j\omega)|},$$

получаем:

$$i(t) = \frac{Eg(0)}{2} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \\ - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} b(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (16-11)$$

Это выражение, справедливое для любого момента времени, должно обращаться в нуль при $t < 0$. Следовательно, при $t > 0$ $i(-t) = 0$, или, что то же,

$$\frac{Eg(0)}{2} - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \\ - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} b(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = 0. \quad (16-12)$$

Вычитая (16-12) из (16-11), находим:

$$i(t) = i(t) - i(-t) = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (\text{при } t > 0). \quad (16-13)$$

По этой формуле вычисляется переходный ток в двух-полюснике, если известна частотная характеристика только его активной проводимости $g(\omega)$. Знания частотной характеристики реактивной проводимости $b(\omega)$ при этом не требуется, потому что последняя функционально связана с первой.

Аналогичная формула может быть получена и для включения синусоидальной э. д. с. [Л. 2].

Таким образом, если задана характеристика $g(\omega)$, то указанный метод расчета переходного тока является наиболее целесообразным.

16-4. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКЕ

Для линейной электрической цепи общие методы и теоремы, относящиеся к установившемуся синусоидальному процессу (см. гл. 7 и 9), применимы к спектральным характеристикам непериодических функций переходного режима.

Например, если к входным зажимам четырехполюсников подведено напряжение, спектральная характеристика которого равна $U_1(j\omega)$, то спектральные характеристики напряжения и тока на выходе четырехполюсника выражаются соответственно через передаточную функцию по напряжению $K_U(j\omega)$ и передаточную проводимость $Y_{21}(j\omega)$ установившегося режима:

$$U_2(j\omega) = K_U(j\omega) U_1(j\omega); \quad I_2(j\omega) = Y_{21}(j\omega) U_1(j\omega).$$

Напряжение и ток на выходе четырехполюсника вычисляются по формулам (16-3), (16-10). В частном случае, когда передаточная функция

$$K_U(j\omega) = |K_U(j\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$$

имеет постоянный модуль, а фазу, пропорциональную частоте, т. е.

$$|K_U(j\omega)| = K = \text{const}, \quad \theta(\omega) = \omega t_s, \quad (16-14)$$

то напряжение на выходе четырехполюсника на основании теоремы смещения функции времени (см. табл. 16-1, строка 6) равно:

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega) K e^{-j\omega t_3} \doteq K u_1(t - t_3).$$

Таким образом, если модуль коэффициента передачи по напряжению не зависит от частоты, а фазовая характеристика линейна, то кривая напряжения на выходе четырехполюсника подобна кривой напряжения на входе: она изменяется в K раз и сдвигается по оси времени на t_3 — время запаздывания; последнее определяется крутизной фазовой характеристики

$$t_3 = \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{\theta(\omega)}{\omega}.$$

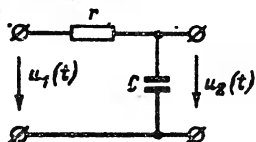


Рис. 16-6. Пример 16-4.

Иначе говоря, условия (16-14) характеризуют отсутствие амплитудных и фазовых искажений при передаче любых электрических сигналов через четырехполюсник.

Частотные свойства линейной электрической цепи при установившемся синусоидальном режиме однозначно определяют переходный процесс в этой цепи при нулевых начальных условиях.

Применение преобразования Фурье к исследованию переходных процессов в линейных электрических цепях позволяет распространить на переходный режим многие понятия и свойства цепей, рассмотренные ранее для установившегося режима.

Например, ввиду равенства $Y_{12}(j\omega)$ и $Y_{21}(j\omega)$, которое свойственно обратимым цепям, теорема обратимости или взаимности (см. § 7-6) сохраняет силу и в переходном режиме.

Пример 16-4. Найти спектр и временную зависимость напряжения на выходе четырехполюсника, изображенного на рис. 16-6, если на входе приложено напряжение $u_1(t) = U e^{-at} \mathbf{1}(t)$.

Коэффициент передачи напряжению равен:

$$K_U(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega C r}.$$

Приложенное напряжение имеет спектральную характеристику

$$U_1(j\omega) = \frac{U}{a + j\omega}.$$

Следовательно, спектральная характеристика выходного напряжения равна:

$$U_2(j\omega) = \frac{U}{(a + j\omega)(1 + j\omega rC)}.$$

Заменяя $j\omega$ на p и пользуясь таблицей изображений по Лапласу, получаем:

$$u_2(t) = \frac{U}{1 - arC} \left(e^{-at} - e^{-\frac{1}{rC}t} \right).$$

Тот же результат получается и по формуле (16-10), если рассматривать функцию $K_U(j\omega)$ как спектральную характеристику функции времени:

$$y_\delta(t) = \frac{1}{rC} e^{-\frac{1}{rC}t};$$

$$u_2(t) = \int_0^t \frac{U}{rC} e^{-a\tau} e^{-\frac{1}{rC}(t-\tau)} d\tau = \frac{U}{1 - arC} \left(e^{-at} - e^{-\frac{1}{rC}t} \right).$$

16-5. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

16-1. Найти амплитудный и фазовый спектры непериодической убывающей показательной функции $e^{-at} \cdot 1(t)$ и построить частотные характеристики.

16-2. Найти амплитудный и фазовый спектры непериодической затухающей синусоиды $e^{-at} \sin \omega_1 t \cdot 1(t)$ и построить частотные характеристики.

16-3. Найти амплитудный и фазовый спектры прямоугольного импульса с косинусоидальным заполнением (число периодов целое) и построить частотные характеристики.

16-4. Решить задачу 16-3, применив формулу дифференцирования функции времени, если известна спектральная характеристика прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением.

16-5. Симметричный Т-образный четырехполюсник, состоящий из двух сопротивлений r в продольных ветвях и емкости C в поперечной ветви, закорочен на выходе и затем подключен к источнику постоянной э. д. с. E . Определить ток в закороченных зажимах четырехполюсника спектральным методом.

О т в е т: $\frac{E}{2r} \left(1 - e^{-\frac{2}{rC}t} \right).$

16-6. Найти спектральную характеристику треугольного импульса.

16-7. Сопротивление r , индуктивность L и емкость C , соединенные параллельно, приключены при $t=0$ к источнику постоянного то-

ка 1. Найти напряжение на зажимах цепи при нулевых начальных условиях спектральным методом.

16-8. Доказать, что пилообразная функция с высотой зубцов, равной 1, и шириной каждого зубца, равной a , имеет спектральную характеристику

$$\frac{1}{a(j\omega)^2} - \frac{e^{-j\omega a}}{j\omega(1 - e^{-j\omega a})}.$$

16-9. Сравнить спектральные характеристики затухающих синусоид вида $e^{-at} \sin 314 t$ при $a=50$ и $a=500$.

16-10. Какая связь существует между спектральной характеристикой и коэффициентом ряда Фурье?

16-11. В чем заключается родственность преобразований Фурье и Лапласа?

16-12. О чем можно судить на основании спектральной характеристики электрического сигнала?

16-13. Доказать применимость теоремы обратимости (взаимности) в переходном режиме линейной цепи при нулевых начальных условиях.

16-14. Доказать применимость теоремы об эквивалентном источнике к расчету переходных процессов с помощью преобразования Фурье.

16-15. Сформулировать условия, при которых переходный процесс на выходе четырехполюсников, имеющих разную структуру, одинаков.

16-16. Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике, вывести общее условие эквивалентности источников напряжения и тока: $E(j\omega) = Z(j\omega)I(j\omega)$, где $E(j\omega)$ и $I(j\omega)$ — спектры э. д. с. и соответственно тока эквивалентных источников; $Z(j\omega)$ — их внутреннее комплексное сопротивление (т. е. сопротивление последовательной ветви источника напряжения, равное сопротивлению параллельной ветви источника тока).

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

17-1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ СИНТЕЗА

При проектировании различного рода устройств автоматического управления, каналов электропроводной и радиосвязи и т. п. возникает необходимость подбора схем и параметров электрических цепей, отвечающих определенным требованиям. Нахождение схемы и элементов цепи, удовлетворяющей заданным условиям, составляет задачу синтеза электрической цепи.

Ввиду того что установившийся и переходный процессы во всякой линейной электрической цепи зависят от частотных свойств цепи, задача синтеза обычно сво-

дится к нахождению цепи по заданной частотной характеристике. Искомым может быть двухполюсник с заданной зависимостью сопротивления (или проводимости) от частоты либо четырехполюсник с заданной передаточной функцией или частотной зависимостью его параметров. Построение схемы пассивной цепи по заданной частотной функции принято называть реализацией или осуществлением функции.

В отличие от задачи анализа, в которой искомая величина — реакция цепи на приложенное воздействие — получается однозначно, задача синтеза может иметь несколько решений (или вовсе не иметь решения). Заданная частотная функция считается реализуемой или осуществимой, если соответствующая ей электрическая цепь может быть составлена из сопротивлений, индуктивностей и емкостей (возможно также применение трансформаторов).

Поскольку задача синтеза может иметь несколько решений, возникает необходимость сопоставления полученных вариантов и выбора оптимального решения.

В этом вопросе не имеется вполне определенного критерия, так как приходится сравнивать схемы с различными элементами. При этом обычно руководствуются следующими соображениями. Желательны схемы с наименьшим количеством элементов, имеющие практически приемлемые параметры, причем предпочтение следует отдавать схемам, содержащим простейшие элементы — сопротивления и емкости.

Индуктивность — менее желательный элемент цепи. Если в схеме последовательно включены индуктивность и сопротивление, то они могут быть практически выполнены в виде индуктивной катушки. Однако при этом приходится считаться с витковой емкостью, которая может внести в работу цепи искажения при высоких частотах.

Еще менее желательным элементом схемы является трансформатор, практическое осуществление которого сопряжено с появлением тепловых потерь и межвитковых емкостей. Кроме того, коэффициент связи может не совпадать с расчетным.

В задачах синтеза частотные характеристики сопротивлений, проводимостей или передаточных функций могут быть заданы графически или аналитически. Если характеристика задана графически или не является рацио-

нальной функцией, то она приближенно аппроксимируется рациональной функцией, т. е. отношением двух полиномов, которое по определенным правилам синтеза реализуется в виде двух- или четырехполюсника.

Таким образом, первым этапом в задаче синтеза является аппроксимация заданной частотной характеристики рациональной функцией; этот этап, относящийся к области математики, здесь не рассматривается. Второй этап заключается в реализации рациональной функции, что и составляет основное содержание данной главы.

17-2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХПОЛЮСНИКА ПРИ КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЕ

При исследовании переходных процессов в линейных электрических цепях мы пользовались понятиями комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$ и обобщенного сопротивления $Z(p)$. Если $Z(j\omega)$ представляет собой комплексное сопротивление цепи, то обобщенное сопротивление получается заменой $j\omega$ через p .

Расположение нулей и полюсов функции $Z(p)$ на комплексной плоскости характеризует частотные свойства линейной электрической цепи, от которых в свою очередь зависят установившийся и переходный процессы в данной цепи.

Нули функции $Z(p)$ двухполюсника являются корнями характеристического уравнения (см. гл. 14). Они могут быть любыми числами, но обязательно с отрицательной действительной частью, так как эта часть физически определяет затухание свободных токов в данной цепи. Это условие распространяется также на нули функции $Z(p)$ дуального двухполюсника, которая равна функции $Y(p)$ исходного двухполюсника, где $Y(p) = 1/Z(p)$. Но нули функции $Y(p)$ есть в то же время полюсы функции $Z(p)$. Поэтому полюсы $Z(p)$, так же как и нули, располагаются в левой части комплексной плоскости.

В общем случае, пользуясь комплексной частотой p , можно представить обобщенное сопротивление $Z(p)$ как отношение двух полиномов, которые не имеют общих корней,

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (17-1)$$

Таким образом, $Z(p)$ является рациональной функцией p . Обозначив через $p_1, p_3, \dots, p_{2n-1}$ корни числителя (число их равно степени полинома n) и через $p_2, p_4, \dots, p_{2m}$ корни знаменателя (число их равно степени полинома m), разложим числитель и знаменатель на множители:

$$Z(p) = \frac{H(p-p_1)(p-p_3)\cdots(p-p_{2n-1})}{(p-p_2)(p-p_4)\cdots(p-p_{2m})}; \quad (17-2)$$

здесь $H = a_n/b_m$ — постоянный множитель (действительное число); p_{2h-1} — нули функции $Z(p)$; p_{2h} — полюсы функции $Z(p)$.

Коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе (17-1) должны быть положительными и действительными, так как только в этом случае корни этих полиномов, соответствующие нулям и полюсам функции $Z(p)$, как уже было отмечено выше, располагаются в левой полуплоскости. Следует заметить, что если некоторые нули полинома расположены на мнимой оси, то в полиноме могут отсутствовать некоторые степени p . Когда все нули лежат на мнимой оси, полином имеет только четные или только нечетные степени p .

В § 17-3 будет показано, что кратные нули и полюсы $Z(p)$ могут быть в левой полуплоскости, исключая мнимую ось; нули и полюсы на мнимой оси могут быть только простыми, т. е. однократными.

Степени полиномов в числителе и знаменателе (17-1) различаются не более чем на единицу. Только при таком условии нуль и полюс в бесконечности простые.

В случае реактивных двухполюсников полиномы могут содержать только четные или только нечетные степени p , при этом $Z(p)$ представляется в виде отношения полиномов, один из которых содержит четные, а другой — нечетные степени p . Это положение доказано ниже в § 17-4.

В общем случае при наличии потерь полиномы содержат как четные, так и нечетные степени p .

Выражение (17-2) может быть переписано в показателной форме. Обозначив через M_{2h-1} и a_{2h-1} модуль и аргумент бинома $(p-p_{2h-1})$, а через M_{2h} и a_{2h} модуль и аргумент бинома $(p-p_{2h})$ получим:

$$Z(p) = H \frac{M_1 < \alpha_1 \cdot M_3 < \alpha_3 \cdots M_{2n-1} < \alpha_{2n-1}}{M_2 < \alpha_2 \cdot M_4 < \alpha_4 \cdots M_{2m} < \alpha_{2m}},$$

или

$$\left. \begin{aligned} Z(p) &= H \frac{M_1 M_3 \dots M_{2n-1}}{M_2 M_4 \dots M_{2m}} < \alpha; \\ \alpha &= (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1}) - \\ &\quad - (\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2m}). \end{aligned} \right\} \quad (17-3)$$

Следовательно, для выбранного значения p модуль функции $Z(p)$ определяется отношением произведения модулей $(p-p_{2k-1})$ к произведению модулей $(p-p_{2k})$; аргумент функции $Z(p)$ определяется разностью суммы аргументов $(p-p_{2k-1})$ и суммы аргументов $(p-p_{2k})$.

При исследовании частотных свойств двухполюсника в установившемся режиме текущая переменная p берется на мнимой оси ($p=j\omega$).

Если у двухполюсников, имеющих разные структуры, нули и соответственно полюсы функции $Z(p)$ совпадают, а множители H одинаковы, то такие двухполюсники эквивалентны; их частотные характеристики одинаковы.

По расположению нулей функции $Z(p)$ можно судить о наличии или отсутствии потерь электрической энергии в двухполюснике. Чем ближе расположены комплексные нули функции к мнимой оси, тем меньше при прочих равных условиях потери.

В случае, когда двухполюсник состоит только из реактивных элементов, т. е. если

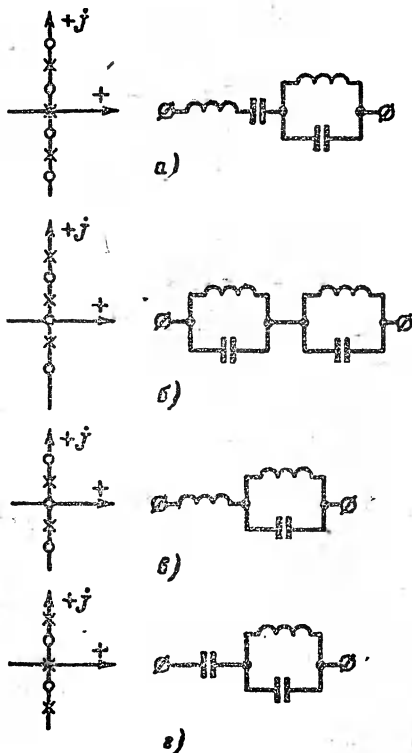


Рис. 17-1. Расположение нулей и полюсов $Z(p)$ в случае реактивного двухполюсника.

потери электрической энергии в нем отсутствуют, аргумент сопротивления составляет $\pm 90^\circ$. В соответствии с (17-3) прямой угол возможен только при том условии, что все нули и полюсы лежат на мнимой оси. При этом общее число нулей и полюсов нечётно (числа нулей и полюсов разнятся на единицу); следовательно, в начале координат (т.е. в точке $p=0$) должен находиться нуль или полюс.

Нули или полюсы должны обязательно чередоваться. Если бы за нулем следовал нуль или за полюсом — по-

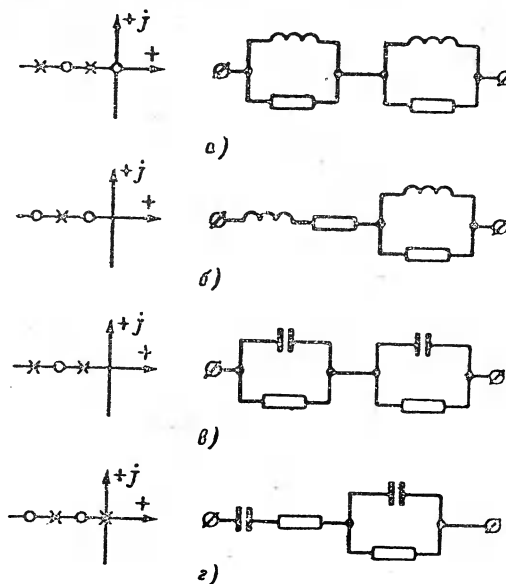


Рис. 17-2. Расположение нулей и полюсов $Z(p)$ в случае двухполюсников типов r, L (а и б) и r, C (в и г).

люс, то в соответствии с (17-3) при некоторых частотах угол бы был равен $\pm 180^\circ$, что противоречило бы исходному условию, что на зажимах реактивного двухполюсника фазовый угол между напряжением и током не превышает 90° . Таким образом, для реактивных двухполюсников характерным является расположение нулей и полюсов, показанное на рис. 17-1.

В случае, когда двухполюсник состоит из элементов r, L или r, C , нули и полюсы $Z(p)$ располагаются по дей-

ствительной оси (в левой полуплоскости). Аргумент комплексного сопротивления такого двухполюсника не достигает $\pm 90^\circ$; поэтому нули и полюсы должны быть не только простыми, но и чередоваться. Числа нулей и полюсов могут разниться не более чем на единицу.

При частоте, равной нулю, сопротивление двухполюсника типа r, L в зависимости от его структуры равно нулю или имеет действительное значение. Поэтому нуль $Z(p)$ такого двухполюсника либо совпадает с началом координат (рис. 17-2, а), либо смещен влево по действительной оси (рис. 17-2, б); при этом ближайшим к началу координат является нуль, а не полюс. При бесконечной частоте сопротивление двухполюсника типа r, L действительно или бесконечно велико.

Что касается сопротивления двухполюсника типа r, C , то при частоте, равной нулю, оно имеет действительное значение (рис. 17-2, в) или бесконечно велико (рис. 17-2, г).

Ближайшим к началу координат является полюс, а не нуль. При бесконечной частоте сопротивление обращается в нуль или действительное число.

Поменяв местами нули и полюсы $Z(p)$, получим картину расположения нулей и полюсов $Y(p)$.

Следует заметить, что при наличии потерь, когда нули и полюсы функции являются действительными или комплексными величинами, сопротивление и проводимость не могут принимать нулевые или бесконечно большие значения при частотах, лежащих на мнимой оси. Однако при частоте, соответствующей проекции полюса p_k на мнимую ось, т. е. при частоте, соответствующей мнимой части полюса, когда модуль разности $j\omega - p_k$ снижается до минимума, абсолютное значение исследуемой функции проходит через максимум, а при частоте, соответствующей проекции нуля на мнимую ось, оно проходит через минимум. Чем меньше действительные части полюсов и нулей, тем резче выражаются максимумы и минимумы функции.

Симметричное расположение нулей и полюсов относительно действительной оси, обязательное для всех линейных двухполюсников, свидетельствует на основании (17-3) о том, что модули функции $Z(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ четны относительно ω , так как все модули в (17-3) для $+j\omega$ и $-j\omega$ одинаковы, а аргументы их нечетны относительно ω .

Итак, по расположению на комплексной плоскости нулей и полюсов обобщенного сопротивления $Z(p)$ можно судить как о характере самой цепи, так и о ее частотных свойствах.

17-3. СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ КАК ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Функция $Z(p)$ комплексного переменного p называется положительной действительной функцией, если она удовлетворяет двум требованиям:

- 1) комплексным числам p в правой полуплоскости соответствуют значения $Z(p)$, расположенные также в правой полуплоскости, т. е. действительная часть функции $Z(p)$ при положительных действительных частях p положительна (отсюда название «положительная» функция);
- 2) функция $Z(p)$ действительна при действительных значениях p (отсюда название «действительная» функция).

Убедимся теперь в том, что обобщенное сопротивление двухполюсника $Z(p)$, представляющее собой рациональную функцию вида (17-1), удовлетворяет указанным двум условиям.

В самом деле, поскольку полюсы $Z(p)$ могут находиться лишь в левой полуплоскости или на мнимой оси, $Z(p)$ аналитична в правой полуплоскости. Кроме того, при любой частоте ω средняя мощность, поступающая в пассивную цепь, не отрицательна:

$$P = \operatorname{Re} [Z(j\omega)] I^2 \geq 0.$$

Так как $I^2 > 0$, то и действительная часть комплексного сопротивления не отрицательна:

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] \geq 0. \quad (17-4)$$

На основании принципа максимума и минимума модуля следует, что наибольшие и наименьшие значения действительной части функции $Z(p)$, аналитичной в правой полуплоскости, достигаются только в граничных точках области. В данном случае границей области является мнимая ось, где $Z(p)$ принимает значения $Z(j\omega)$.

Следовательно, с учетом (17-4)

$$\operatorname{Re} [Z(p)] \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} p \geq 0. \quad (17-5)$$

Если на мнимой оси расположены полюсы, то они могут быть обойдены дугами окружностей сколь угодно

малого радиуса и предыдущие рассуждения могут быть отнесены к оставшейся части.

Итак, согласно (17-5) для $Z(p)$ выполняется первое условие: $Z(p)$ — положительная функция.

Ввиду того что все коэффициенты полиномов в (17-1) действительны, функция $Z(p)$ принимает действительные значения при действительном аргументе. Следовательно, выполняется и второе условие: $Z(p)$ — действительная функция.

Таким образом, обобщенное сопротивление любого пассивного двухполюсника представляет собой положительную действительную функцию.

Обобщенная проводимость пассивного двухполюсника также является положительной действительной функцией. В этом легко убедиться, приняв $Z(p) = r(c, \omega) + jx(c, \omega)$, где $p = c + j\omega$.

Очевидно,

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2}.$$

В правой полуплоскости $r > 0$ и $\frac{r}{r^2 + x^2} > 0$; при этом действительным значениям p соответствуют действительные значения $Y(p)$.

Таким образом, $Y(p)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к положительным действительным функциям.

Если обобщенное сопротивление (или проводимость) двухполюсника задано в виде рациональной дроби (17-1), то построение соответствующей схемы двухполюсника может быть выполнено по определенным правилам, основанным на общих свойствах положительных действительных функций.

Рассмотрим некоторые из этих свойств.

1. Если на мнимой оси имеются полюсы или нули, то все они простые, причем вычеты в полюсах и производные в нулях действительны и положительны.

Допустим, что функция $Z(p)$ имеет m -кратный полюс в точке $p = j\omega_0$. Разложение Лорана в окрестности полюса записывается в виде

$$Z(p) = \frac{c_{-m}}{(p - j\omega_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(p - j\omega_0)^{m-1}} + \dots + \\ + \frac{c_{-1}}{p - j\omega_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (p - j\omega_0)^k.$$

В достаточно малой окрестности точки $p=j\omega_0$ поведение функции $Z(p)$ определяется первым членом разложения

$$Z(p) \approx \frac{c_{-m}}{(p-j\omega_0)^m}.$$

Пусть $c_{-m}=Ae^{j\theta}$ и $p-j\omega_0=\rho e^{j\psi}$, где $\rho>0$ — сколь угодно малая величина (рис. 17-3).

Для действительной части функции $Z(p)$ получается выражение

$$\operatorname{Re} Z(p) \approx \operatorname{Re} \frac{A}{\rho^m} e^{j(\theta-m\psi)} = \frac{A}{\rho^m} \cos(m\psi - \theta).$$

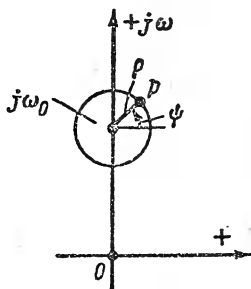
При обходе вокруг $j\omega_0$ по окружности радиусом ρ угол ψ изменяется от 0 до 2π , значение же θ сохраняется неизменным.

Знак действительной части функции определяется в этом случае знаком $\cos(m\psi - \theta)$, который при обходе m -кратного полюса изменяется $2m$ раз.

Если $Z(p)$ — положительная функция, то действительная часть ее в правой полуплоскости положительна и не меняет знака. Следовательно, полюс, расположенный на мнимой оси, должен быть простым ($m=1$), причем угол θ должен быть равен нулю, а величина $A=c_{-1}$ должна быть положительной, только при этих условиях $\operatorname{Re} Z(p) \approx$

$$\approx \frac{c_{-1}}{\rho} \cos \psi \text{ сохраняет положительный знак}$$

Рис. 17-3. Полюс на мнимой оси.



в правой полуплоскости p , где $-\pi/2 < \psi < \pi/2$; здесь c_{-1} — вычет функции $Z(p)$ в точке $p=j\omega_0$.

Поскольку $Y(p)=1/Z(p)$ — положительная действительная функция, то указанное выше свойство распространяется и на $Y(p)$, а именно: если на мнимой оси имеются полюсы функции $Y(p)$, то они простые и вычеты в этих полюсах действительны и положительны. Но простой полюс функции $Y(p)$ есть простой нуль функции $Z(p)$, а вычет функции $Y(p)$ в простом полюсе обратен производной $dZ(p)/dp$ в нуле функции $Z(p)$. Следовательно, на мнимой оси нули могут быть только простыми, причем производные в них действительны и положительны.

2. Нули и соответственно полюсы рациональной положительной действительной функции могут быть действительными или сопряженно-комплексными.

Данное положение следует из того, что рациональная функция (17-1) является положительной действительной функцией только в том случае, если все коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе действительны и одинакового знака. Замена комплексного аргумента p сопряженной величиной p^* дает при таком условии сопряженную функцию $Z(p^*)=\bar{Z}(p)$. Поэтому если p_0 — комплексный нуль функции $Z(p)$, то наряду с равенством $Z(p_0)=0$ обязательно должно выполняться равенство $\bar{Z}(p_0)=Z(p_0^*)=0$; иначе говоря, p_0^* также является нулем функции $Z(p)$.

То же положение распространяется на нули функции $Y(p) = 1/Z(p)$, т. е. на полюсы функции $Z(p)$.

На основании сказанного комплексные нули и соответственно полюсы $Z(p)$ и $Y(p)$ располагаются симметрично относительно действительной оси, т. е. образуют сопряженные пары.

3. Наибольшие и соответственно наименьшие показатели степеней p в числителе и знаменателе рациональной положительной действительной функции не могут различаться более чем на единицу.

С ростом $|p|$ функция (17-1) или, что то же, (17-2) стремится к Hr^{n-m} .

Ввиду того что бесконечно удаленную точку можно считать лежащей на мнимой оси, на основании свойства 1 нуль или полюс соответствующий нуль или полюс функции должен быть простым.

Если $p=\infty$ есть простой нуль или полюс, то степень числителя на единицу ниже или выше степени знаменателя. Возможны три случая при $p \rightarrow \infty$:

1) $Z(p) \rightarrow Hr$, когда $n - m = 1$;

2) $Z(p) \rightarrow \frac{H}{p}$, когда $n - m = -1$;

3) $Z(p) \rightarrow H > 0$, когда $n - m = 0$.

Поскольку точка $p=0$ (начало координат) принадлежит мнимой оси, на основании свойства 1 нуль или полюс в точке $p=0$ должен быть простым. Следовательно, наименьшие показатели степеней в числителе и знаменателе положительной действительной функции (17-1) не могут различаться более чем на единицу. Возможны три случая при $p \rightarrow 0$:

1) $Z(p) \rightarrow \frac{a_0}{b_0}$, когда $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$;

2) $Z(p) \rightarrow \frac{a_0}{b_1 p}$, когда $a_0 \neq 0$, $b_0 = 0$;

3) $Z(p) \rightarrow \frac{a_1 p}{b_0}$, когда $a_0 = 0$, $b_0 \neq 0$.

17-4. УСЛОВИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ФУНКЦИИ

В задачах синтеза функция $Z(p)$ может быть задана непосредственно или получена из частотной характеристики $Z(j\omega)$ с помощью подстановки $j\omega = p$.

Функция считается физически реализуемой, если соответствующая ей электрическая цепь может быть составлена из элементов (сопротивлений, индуктивностей, емкостей) с положительными действительными параметрами.

Для всякой положительной действительной функции может быть построен двухполюсник, для которого она является обобщенным сопротивлением (или проводимостью). Поэтому условие положительности и действитель-

ности функции является достаточным для ее реализуемости. В связи с этим если требуется построить двухполосник по заданной рациональной функции, то предварительно выясняют, является ли она положительной и действительной.

В соответствии с тем, что было сказано в предыдущем параграфе, рациональная функция является положительной и действительной, если одновременно выполняются следующие условия:

1) все коэффициенты полиномов действительны (условие действительности функции);

2) в правой полуплоскости полюсы отсутствуют (условие аналитичности функции);

3) в бесконечно удаленной точке функция ведет себя, как $H\rho$, H или H/ρ (свойство 3);

4) полюсы на мнимой оси могут быть только простыми с действительными и положительными вычетами (свойство 1);

5) действительная часть функции на мнимой оси не отрицательна [условие (17-4)].

Перечисленные условия являются *необходимыми и достаточными*, чтобы заданная рациональная функция была положительной и действительной. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то заданная функция не есть положительная действительная функция.

Действительная часть функции на мнимой оси $[\operatorname{Re} Z(j\omega)]$ сравнительно просто находится, если полиномы $A(p)$ и $B(p)$ в числителе и знаменателе (17-1) представить как суммы полиномов с четными и нечетными степенями p :

$$A(p) = A_{\text{ч}}(p) + A_{\text{н}}(p); \quad B(p) = B_{\text{ч}}(p) + B_{\text{н}}(p).$$

При этом

$$Z(p) = \frac{A(p) B(-p)}{B(p) B(-p)} = \frac{[A_{\text{ч}}(p) + A_{\text{н}}(p)][B_{\text{ч}}(-p) + B_{\text{н}}(-p)]}{B(p) B(-p)}.$$

откуда с учетом равенств $B_{\text{ч}}(-p) = B_{\text{ч}}(p)$ и $B_{\text{н}}(-p) = -B_{\text{н}}(p)$.

$$\begin{aligned} Z(p) = & \frac{A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p) - A_{\text{н}}(p) B_{\text{н}}(p)}{B(p) B(-p)} + \\ & + \frac{A_{\text{н}}(p) B_{\text{ч}}(p) - A_{\text{ч}}(p) B_{\text{н}}(p)}{B(p) B(-p)}. \end{aligned}$$

При $p = j\omega$ первое слагаемое, четное относительно частоты ω , выражает активное сопротивление двухполосника, а второе слагаемое, нечетное относительно частоты, выражает реактивное сопротивление.

Итак,

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \left[\frac{A_{\text{ч}}(p) B_{\text{н}}(p) - A_{\text{н}}(p) B_{\text{ч}}(p)}{B(p) B(-p)} \right]_{p=j\omega}. \quad (17-6)$$

В случае реактивного двухполюсника выражение (17-6) обращается в нуль, т. е. выполняется условие (при $p=j\omega$)

$$A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p) = A_{\text{н}}(p) B_{\text{н}}(p).$$

При этом

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{A_{\text{ч}}(p) + A_{\text{н}}(p)}{B_{\text{ч}}(p) + B_{\text{н}}(p)} = \\ &= \frac{A_{\text{ч}}(p) + \frac{A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p)}{B_{\text{н}}(p)}}{B_{\text{ч}}(p) + B_{\text{н}}(p)} = \frac{A_{\text{ч}}(p)}{B_{\text{н}}(p)} = \frac{A_{\text{н}}(p)}{B_{\text{ч}}(p)}. \end{aligned}$$

Следовательно, в случае реактивного двухполюсника полином в числителе (17-1) содержит только четные, а в знаменателе — только нечетные степени, или наоборот.

Пример 17-1. Проверить положительность и действительность функции

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 2}{p + 1}.$$

- 1) коэффициенты полиномов действительны;
- 2) в правой полуплоскости полюсы отсутствуют;
- 3) в бесконечности функция ведет себя, как p ;
- 4) на мнимой оси полюсов нет;

$$5) \operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2} \geq 0.$$

Проверка показывает, что заданная функция является положительной действительной.

17-5. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДВУХПОЛЮСНИКА ПО ЗАДАННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Для построения двухполюсника по заданной положительной действительной функции применяются различные методы синтеза.

Ниже рассмотрены два метода: 1) метод последовательного выделения нулей и полюсов и 2) метод разложения в непрерывную дробь.

Метод последовательного выделения нулей и полюсов.

Если $Z(p)$ есть рациональная положительная действительная функция (17-1), причем степень числителя на

единицу превосходит степень знаменателя, то, выполнив деление, получим:

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + Z_0(p); \quad (17-7)$$

здесь $\alpha_{\infty} = H$ — действительная положительная величина.

Действительная часть $\alpha_{\infty} p$ на мнимой оси равна нулю; поэтому

$$\operatorname{Re} Z_0(j\omega) = \operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0.$$

Ввиду того что функция $Z_0(p)$, получившаяся из $Z(p)$ после выделения $\alpha_{\infty} p$, не отрицательна на мнимой оси, $Z_0(p)$ — положительная действительная функция.

Если $Z(p)$ и соответственно $Z_0(p)$ имеет полюсы $\pm j\omega_k$ и 0 на мнимой оси с вычетами α_k и α_0 , причем на основании свойства 1 (см. § 17-3) эти полюсы простые, а α_k и α_0 — действительные положительные числа, то разложение $Z_0(p)$ на простейшие дроби дает¹:

$$\begin{aligned} Z_0(p) &= \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k}{p + j\omega_k} + \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k}{p - j\omega_k} + Z_1(p) = \\ &= \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Z_1(p). \end{aligned} \quad (17-8)$$

На мнимой оси выражения α_0/p и $\frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ принимают мнимые значения. Поэтому

$$\operatorname{Re} Z_1(j\omega) = \operatorname{Re} Z_0(j\omega) = \operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$$

и, следовательно, $Z_1(p)$ — положительная действительная функция.

Функция $Z_1(p)$, получившаяся из $Z_0(p)$ после выделения всех полюсов, лежащих на мнимой оси, может иметь полюсы в левой полуплоскости. Если все полюсы $Z_0(p)$ лежат на мнимой оси, то $Z_1(p)$ не имеет особых точек и поэтому на основании теоремы Лиувилля $Z_1(p)$ есть постоянная.

Подстановка (17-8) в (17-7) дает:

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Z_1(p). \quad (17-9)$$

¹ Вычеты α_k в сопряженных мнимых полюсах равны в силу того, что они действительны.

Полученному выражению соответствует схема, изображенная на рис. 17-4.

Полюс $p = \infty$ обусловлен наличием в схеме индуктивности α_∞ , а полюс $p = 0$ — наличием емкости $1/\alpha_0$. Если $Z_1(p)$ — постоянная, то она реализуется как активное сопротивление.

Аналогично можно доказать, что если $Z_1(p)$ — рациональная положительная функция, имеющая нули $\pm j\omega_k$

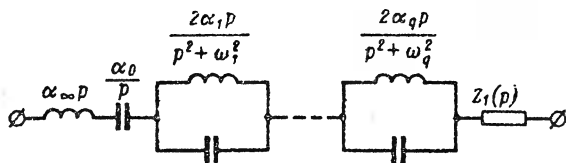


Рис. 17-4. Двухполюсник, соответствующий выражению (17-9).

и ∞ , причем степень числителя на единицу меньше степени знаменателя, то

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \alpha_\infty p + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Y_2(p), \quad (17-10)$$

где α_k и α_0 — вычеты $Y(p)$ в $\pm j\omega_k$ и 0, $Y_2(p)$ — рациональная положительная действительная функция.

Если все нули функции $Z(p)$ лежат на мнимой оси, то $Y_2(p)$ есть постоянная (реализуемая как активная проводимость).

Выражению (17-10) соответствует схема, показанная на рис. 17-5.

Когда все нули и полюсы заданной рациональной функции $Z(p)$ лежат на отрицательной действительной полуоси, в соответствии с (17-9)

$$Z(p) = \alpha_\infty p + Z_1(p),$$

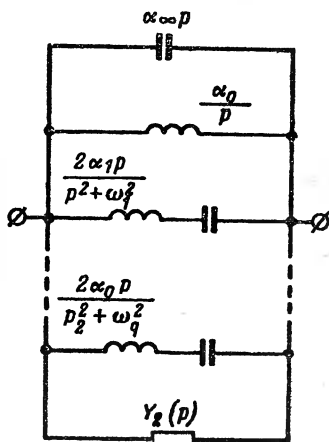


Рис. 17-5. Двухполюсник, соответствующий выражению (17-10).

где $Z_1(p)$ — положительная действительная функция, нули и полюсы которой расположены в левой полуплоскости.

Функция $Z_1(p)$ аналитична в бесконечности, так как степень числителя не превышает степени знаменателя.

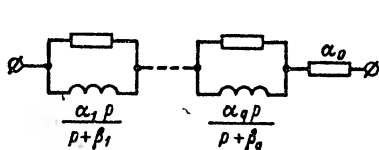


Рис. 17-6. Двухполюсник, соответствующий выражению (17-11).

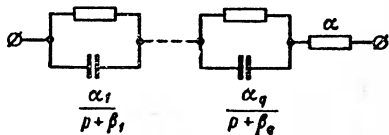


Рис. 17-7. Двухполюсник, соответствующий выражению (17-12).

Если постоянное слагаемое в числителе $Z_1(p)$ равно нулю, то $p=0$ является нулем функции $Z_1(p)$. В этом случае $Z_1(p)$ раскладывается на сумму дробей:

$$Z_1(p) = \sum_{k=0}^q \frac{\alpha_k p}{p + \beta_k}, \quad (17-11)$$

где β_k принимает действительные положительные значения.

При $\beta_0=0$ разложение (17-11) содержит постоянное слагаемое α_0 .

Функция (17-11) может быть осуществлена по схеме на рис. 17-6.

Если постоянное слагаемое в числителе $Z_1(p)$ не равно нулю, то $Z_1(p)$ раскладывается на простые дроби:

$$Z_1(p) = \sum_{k=0}^q \frac{\alpha_k}{p + \beta_k} + \alpha, \quad (17-12)$$

где α — положительная постоянная.

Условие $\beta_0=0$ отвечает наличию полюса в точке $p=0$ при равенстве нулю постоянного слагаемого в знаменателе выражения для $Z_1(p)$.

Функция (17-12) осуществима по схеме на рис. 17-7.

В общем случае полюсы и нули заданной положительной действительной функции могут лежать на мнимой оси и в левой полуплоскости.

Такая функция осуществляется шаг за шагом путем выделения непосредственно реализуемых элементов.

Первоначально могут быть выделены все полюсы функции $Z(p)$, лежащие на мнимой оси. При этом в соответствии с (17-9) получится новая, более простая функция $Z_1(p)$, которая уже не будет иметь полюсов на мнимой оси; такая функция называется функцией минимального реактивного сопротивления.

Таким образом, после выделения полюсов, лежащих на мнимой оси, задача сводится к осуществлению функции минимального реактивного сопротивления $Z_1(p)$.

Если нули и полюсы $Z_1(p)$ лежат на отрицательной действительной полуоси, то $Z_1(p)$ реализуется с помощью двухполюсника типа rL или rC в соответствии с (17-11) и (17-12).

В случае если $Z_1(p)$ имеет нули на мнимой оси, они выделяются на основании (17-10), в результате чего получается обобщенная проводимость $Y_2(p)$, которая не имеет полюсов на мнимой оси; такая функция называется функцией минимальной реактивной проводимости. Следовательно, после выделения нулей $Z_1(p)$, лежащих на мнимой оси, задача сводится к осуществлению функции минимальной реактивной проводимости $Y_2(p)$.

Выделение полюсов и нулей продолжается до тех пор, пока не получатся непосредственно реализуемые элементы.

В предыдущих рассуждениях реализация заданной функции начиналась с выделения полюсов, лежащих на мнимой оси. Однако реализация той же функции может быть начата с выделения нулей, лежащих на мнимой оси. В этом случае получится схема двухполюсника, отличная от предыдущей, причем в зависимости от конкретных условий и требований может быть выбрана та или иная схема.

Пример 17-2. Требуется осуществить положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{2p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 1}.$$

Заданная функция имеет на мнимой оси полюсы в точках $\pm j1$. Вычет функции $Z(p)$ относительно полюса $j1$ (или $-j1$) равен:

$$\text{Res } Z(p) = \left[\frac{2p^2 + p + 1}{3p^2 + 2p + 1} \right]_{p=j1} = \frac{-2 + j + 1}{-3 + 2j + 1} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, согласно (17-9)

$$Z(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + Z_1(p).$$

где $Z_1(p)$ — функция минимального реактивного сопротивления:

$$Z_1(p) = \frac{2p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 1} - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p + 1}.$$

Дробь $\frac{p}{p^2 + 1}$ реализуется с помощью индуктивности $L=1$ и емкости $C=1$, включенных параллельно, а дробь $\frac{1}{p + 1}$ — с помощью сопротивления $r=1$ и емкости $C=1$, включенных параллельно.

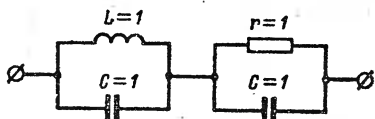


Рис. 17-8. Пример 17-2.

Таким образом, функция $Z(p)$ реализуется в виде двух-полюсника, показанного на рис. 17-8.

Пример 17-3. Требуется осуществить положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{p^5 + 5p^4 + 9p^3 + 18p^2 + 8p + 4}{(p^2 + 1)(p^3 + 2p^2 + 4p + 2)}.$$

Заданная функция имеет на мнимой оси полюсы в точках $\pm j1$. Вычет функции $Z(p)$ относительно полюса $j1$ (или $-j1$) равен:

$$\text{Res } Z(p) = \lim_{p \rightarrow j1} (p - j1) Z(p) = \frac{3}{2}.$$

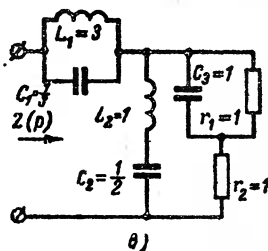
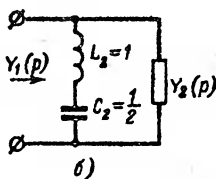
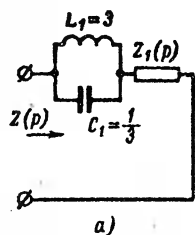


Рис. 17-9. Пример 17-3.

Следовательно, на основании (17-9)

$$Z(p) = \frac{3p}{p^2 + 1} + Z_1(p),$$

т. е. $Z(p)$ реализуется по схеме на рис. 17-9, а, где $Z_1(p)$ — функция минимального реактивного сопротивления:

$$Z_1(p) = Z(p) - \frac{3p}{p^2 + 1} = \frac{p^3 + 2p^2 + 2p + 4}{p^3 + 2p^2 + 4p + 2} = \frac{(p^2 + 2)(p + 2)}{p^3 + 2p^2 + 4p + 2}.$$

$Z_1(p)$ имеет на мнимой оси нули в точках $\pm j\sqrt{2}$. Вычет функции $Y_1(p) = 1/Z_1(p)$ относительно полюса $j\sqrt{2}$ (или $-j\sqrt{2}$) равен:

$$\text{Res } Y_1(p) = \lim_{p \rightarrow j\sqrt{2}} (p - j\sqrt{2}) Y_1(p) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, на основании (17-10)

$$Y_1(p) = \frac{p}{p^2 + 2} + Y_2(p),$$

т. е. $Y_1(p)$ реализуется по схеме на рис. 17-9, б, где $Y_2(p)$ — функция минимальной реактивной проводимости:

$$Y_2(p) = Y_1(p) - \frac{p}{p^2 + 2} = \frac{p+1}{p+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p+1}}.$$

Первое слагаемое в знаменателе выражения для $Y_2(p)$ означает сопротивление, а второе — параллельное соединение емкости и сопротивления; эти элементы включаются последовательно.

Итак, функция $Z(p)$ реализуется в виде двухполюсника, показанного на рис. 17-9, в.

Метод разложения в непрерывную дробь.

Наряду с рассмотренными выше схемами двухполюсника, отвечающими функции (17-1), существуют цепные схемы типа, изображенного на рис. 17-10, сопротивления

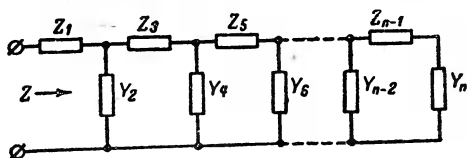


Рис. 17-10. Цепная схема.

которых могут быть выражены непрерывной дробью (в схеме на рис. 17-10 последовательные ветви обозначены сопротивлениями, а параллельные — проводимостями):

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \dots + \frac{1}{Z_{n-1} + \frac{1}{Y_n}}}}}$$

Разложение заданной дробно-рациональной функции $Z(p)$ в непрерывную дробь осуществляется делением числителя на знаменатель, причем оно продолжается до тех пор, пока получаемое в остатке выражение не представит собой сопротивления или проводимости некоторого известного двухполюсника. Этот двухполюсник является конечным звеном цепной схемы, соответствующей полученному разложению в непрерывную дробь.

Следует заметить, что непрерывные дроби и соответствующие им цепные схемы различны в зависимости от того, располагаются ли полиномы в числителе и знаменателе заданной дробно-рациональной функции по восходящим или нисходящим степеням p . Кроме того, вместо функции $Z(p)$ в непрерывную дробь может быть разложена функция $Y(p) = 1/Z(p)$, числитель и знаменатель которой также могут располагаться по восходящим или нисходящим степеням p . В результате этого могут быть получены дополнительные разновидности цепных схем.

Наконец, возможно разложение в непрерывную дробь, при котором в процессе деления сначала соблюдается один, а затем другой порядок расположения степеней p .

В отдельных случаях некоторые или даже все полученные варианты разложения в непрерывную дробь не допускают физической реализации двухполюсника.

Построение двухполюсника методом разложения $Z(p)$ в непрерывную дробь проиллюстрировано ниже примерами 17-4 и 17-5.

Пример 17-4. Требуется осуществить положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + 2p + 1}.$$

Заданная функция разлагается в непрерывную дробь:

$$Z(p) = \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + 1}}}.$$

Этому выражению соответствует цепная схема, изображенная на рис. 17-11.

Пример 17-5. Требуется осуществить положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1}.$$

Степень числителя выше степени знаменателя, следовательно, функция имеет полюс в бесконечности, что указывает на наличие последовательной индуктивности.

Начав с расположения полиномов по возрастающим степеням p и изменяя в процессе деления порядок расположения степеней p , можно заданную функцию представить в следующем виде:

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{1 + 2p + 2p^2}{1 + p + p^2}} =$$

$$= p + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1 + p + p^2}{p + p^2}}} = p + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{1}{p} + 1}}}$$

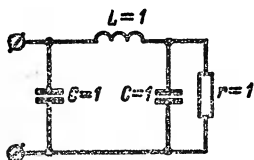


Рис. 17-11. Пример 17-4.

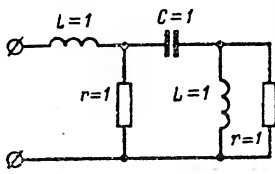


Рис. 17-12. Пример 17-5.

Полученной непрерывной дроби соответствует схема двухполюсника, показанная на рис. 17-12.

17-6. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПРИ КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЕ

Так же как и в случае двухполюсников, введение комплексной частоты $p = c + j\omega$ расширяет возможности исследования общих свойств четырехполюсников.

Передаточная функция четырехполюсника может быть выражена отношением полиномов вида (17-1). При этом в отличие от сопротивления или проводимости двухполюсника степени полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции четырехполюсника могут разниться более чем на единицу.

Передаточная функция четырехполюсника, представляющая собой отношение электрических величин в двух разных контурах или узлах, свободна от некоторых ограничений, свойственных сопротивлению и проводимости двухполюсника. Так, например, передаточные сопротив-

ления и проводимость четырехполюсника могут иметь отрицательную действительную часть.

Что касается полюсов передаточной функции, представляющей собой отношение электрических величин на выходе и входе линейного четырехполюсника, то, так же как и в случае двухполюсника, полюсы не могут иметь положительной действительной части: они располагаются в левой полуплоскости, так как совпадают с полюсами входного сопротивления или входной проводимости четырехполюсника.

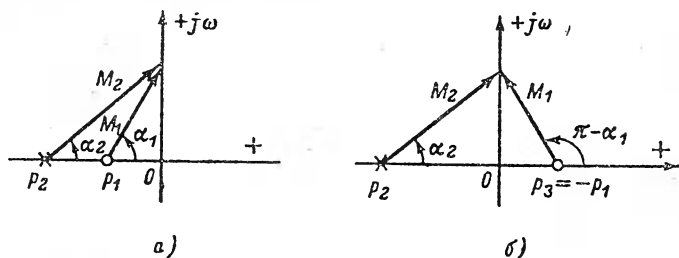


Рис. 17-13. Размещение нулей и полюсов передаточных функций минимальной (а) и неминимальной (б) фаз.

Однако подобное ограничение не распространяется на нули передаточной функции четырехполюсника: нули могут находиться как в левой, так и в правой полуплоскости.

Передаточная функция, не имеющая нулей в правой полуплоскости, называется функцией минимальной фазы, а передаточная функция, нули которой располагаются в правой полуплоскости, называется функцией неминимальной фазы. Соответственно различают и цепи минимальной и неминимальной фаз.

На рис. 17-13 в виде примера показано размещение нулей и полюсов передаточных функций минимальной (рис. 17-13, а) и неминимальной (рис. 17-13, б) фаз.

Амплитудная и фазовая характеристики могут быть построены на основе (17-3). В рассматриваемом случае отношения M_1/M_2 равны друг другу, и поэтому при равенстве множителей H амплитудные характеристики совпадают. Фазовые же характеристики неодинаковы: передаточная функция минимальной фазы характеризуется всегда меньшим в алгебраическом смысле фазовым сдви-

гом, чем функция неминимальной фазы при той же амплитудной характеристике. Это видно из рис. 17-13, где угол α_1 меньше угла, дополняющего его до 180° .

Существенной особенностью функций минимальной фазы является то, что амплитудная и фазовая характеристики однозначно определяют друг друга: имея одну из этих характеристик, можно найти другую характеристику.

В цепных схемах ток в нагрузке может быть равен нулю в том случае, когда какое-либо из сопротивлений продольных ветвей бесконечно велико или какое-либо из сопротивлений поперечных ветвей равно нулю. Поэтому передаточная функция для цепной схемы всегда является функцией минимальной фазы: ее нули обуславливаются полюсами сопротивлений продольных и нулями сопротивлений поперечных ветвей цепной схемы, которые всегда располагаются в левой полуплоскости.

Интересной разновидностью передаточных функций неминимальной фазы служит функция, нули которой располагаются в правой полуплоскости в виде зеркальных изображений полюсов (полюсы и нули располагаются по окружности). Четырехполюсник, обладающий такой передаточной функцией, отличается той особенностью, что он пропускает все частоты с одинаковым затуханием. Действительно, для всех точек мнимой оси модуль выражения (17-3) сохраняется постоянным. Аргумент выражения (17-3), т. е. фазовый сдвиг между электрическими величинами на выходе и входе четырехполюсника, при этом зависит от частоты. Характеристика передаточной функции на комплексной плоскости представляет собой окружность.

Такое изменение фазы при постоянной амплитуде свойственно, например, симметричному мостовому четырехполюснику, нагруженному согласованно. Четырехполюсники подобного типа применяются в технике связи в качестве устройств, корректирующих фазу.

Построение четырехполюсника по заданным частотным характеристикам представляет в общем случае задачу более сложную, чем построение двухполюсников [Л. 2 и 8]. В зависимости от условий задачи в основу построения четырехполюсников в ряде случаев могут быть положены общие методы синтеза двухполюсников.

17-7. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

17-1. Показать, что

$$\frac{p^2 + p + 4}{p^2 + p + 1};$$
$$\frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}; \quad \frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$$

— положительные действительные функции.

17-2. Показать, что

$$\frac{p(p^2 + 5)}{(p^2 + 1)^2};$$
$$\frac{p^2 + 2p + 1}{p^2}; \quad \frac{p^3 + 7p^2 + 15p + 9}{p^4 + 6p^3 + 9}$$

не являются положительными действительными функциями.

17-3. Осуществить

$$Z(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)}; \quad Z(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^3 + 2p};$$

$$Y(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^3 + 2p}$$

разложением на простейшие дроби.

17-4. Решить задачу 17-3 разложением в непрерывную дробь.

17-5. Осуществить

$$Z(p) = \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}{p(p^2 + 4)}$$

последовательным выделением полюсов и нулей.

17-6. Решить задачу 17-5 разложением в непрерывную дробь.

17-7. В каких случаях полином, все корни которого расположены на мнимой оси, содержит только нечетные степени p ?

17-8. Основываясь на формуле (17-3), показать для реактивного двухполюсника, что нули и полюсы чередуются.

17-9. Почему полюсы передаточной функции не могут находиться в правой полуплоскости, между тем как на нули передаточной функции это ограничение не распространяется?

17-10. Почему обобщенные сопротивления и проводимости двухполюсников представляют собой положительные действительные функции?

МЕТОД СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ¹

В гл. 7 при выборе независимых контуров для записи уравнений по второму закону Кирхгофа использовалось понятие графов. Однако графы применяются не только для выбора контуров, но и для решения систем уравнений, записанных для электрической цепи. Для этой цели используются сигнальные графы.

Возьмем, например, систему уравнений, полученных для схемы рис. 7-6 в примере 7-2. Для построения сигнального графа необходимо сначала разрешить каждое уравнение относительно одной переменной (разной для разных уравнений). Разрешим, например, первое уравнение относительно $\dot{I}_1$, второе — относительно $\dot{I}_2$ и третье — относительно $\dot{I}_3$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= t_{12}\dot{I}_2 + t_{13}\dot{I}_3; \\ \dot{I}_2 &= t_{21}\dot{I}_1 + t_{23}\dot{I}_3; \\ \dot{I}_3 &= t_{31}\dot{I}_1 + t_{32}\dot{I}_2 + t_{34}\dot{E}. \end{aligned} \right\} \quad (I-1)$$

Здесь коэффициенты передачи:

$$\begin{aligned} t_{12} &= \frac{z_5}{z_1 + z_2 + z_5}; & t_{13} &= \frac{z_2}{z_1 + z_2 + z_5}; \\ t_{21} &= \frac{z_5}{z_3 + z_4 + z_5}; & t_{23} &= \frac{z_{23}}{z_3 + z_4 + z_5}; \\ t_{31} &= \frac{z_2}{z_2 + z_3 + z_6}; & t_{32} &= \frac{z_3}{z_2 + z_3 + z_6}; \\ t_{34} &= \frac{1}{z_2 + z_3 + z_6}. \end{aligned}$$

Полученной системе уравнений соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. I-1, а.

Сигнальный граф обладает следующими свойствами:

1. Сигнальный граф состоит из узлов и ветвей. Ветвь изображается направленным отрезком, соединяющим два узла сигнального графа. Направление ветви указывается стрелкой.
2. Каждая ветвь графа характеризуется коэффициентом передачи ветви t_{ik} . Первый индекс (i) соответствует номеру узла, в ко-

¹ Написано Ш. Н. Хусанновым.

торый входит ветвь, а второй (k) — номеру узла, из которого она выходит.

3. В каждом узле графа имеется сигнал, который передается от узла по всем ветвям, выходящим из него. При решении уравнений электрических цепей под сигналами понимаются токи, напряжения и т. д.

4. При прохождении по ветви сигнал умножается на коэффициент передачи ветви.

5. Результирующий сигнал в узле равен сумме всех сигналов, приходящих в данный узел по ветвям, входящим в этот узел.

В соответствии с вышесказанным ток $\dot{I}_1$ представляет сигнал в вершине графа 1 на рис. I-1, а, ток $\dot{I}_2$ — сигнал в вершине 2, ток

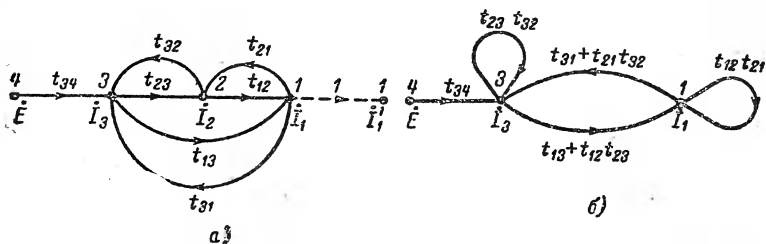


Рис. I-1.

$\dot{I}_3$ — сигнал в вершине 3 и э. д. с. $\dot{E}$ — сигнал в вершине 4. Согласно первому уравнению системы (I-1) в вершину 1 должны входить ветвь с коэффициентом передачи t_{12} , выходящая из вершины 2, и ветвь с коэффициентом передачи t_{13} , выходящая из вершины 3 (рис. I-1, а). В вершину 1 по этим ветвям согласно четвертому свойству приходят сигналы $t_{12}\dot{I}_2$ и $t_{13}\dot{I}_3$ соответственно, так что результирующий сигнал $\dot{I}_1$ в вершине 1 удовлетворяет первому уравнению системы (I-1). Аналогичные рассуждения относятся и к остальным ветвям графа, изображенного на рис. I-1, а.

Выше отмечалось, что для построения сигнального графа следует каждое уравнение разрешить относительно одной переменной. Очевидно, это можно сделать по-разному. Например, первое уравнение рассмотренной выше системы уравнений можно разрешить относительно $\dot{I}_2$, а не $\dot{I}_1$, второе уравнение — относительно $\dot{I}_3$ третье — относительно $\dot{I}_2$. В результате получится система уравнений, отличная по форме от системы (I-1), и соответственно сигнальный граф для такой системы будет отличаться от графа на рис. I-1, а.

Таким образом, для данной системы уравнений можно построить различные графы, но данному графу соответствует совершенно определенная система уравнений.

После построения сигнального графа для данной системы уравнений решение ее сводится к вычислению коэффициентов передач графа.

Коэффициентом передачи сигнального графа от источника, откуда только выходят ветви графа, к стоку, куда только входят ветви графа, называется отношение сигнала в стоке к сигналу в источнике.

Узел 4 графа на рис. I-1, а является источником. Узел 1 не является стоком, но можно добавить узел 1' с сигналом $\dot{I}'_1$ и соединить его с узлом 1 ветвью с единичным коэффициентом передачи, что соответствует уравнению $\dot{I}'_1 = \dot{I}_1$. Узел 1' является стоком, тогда коэффициент передачи от узла 4 к узлу 1'

$$T_{1'4} = \frac{\dot{I}'_1}{\dot{E}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{E}},$$

откуда $\dot{I}_1 = T_{1'4} \dot{E}$, т.е. зная передачу графа от узла 4 к узлу 1', можно определить ток $\dot{I}_1$.

Ниже рассмотрены два метода нахождения коэффициента передачи сигнального графа: 1) последовательным упрощением графа и 2) вычислением коэффициента передачи графа по формуле Мейсона.

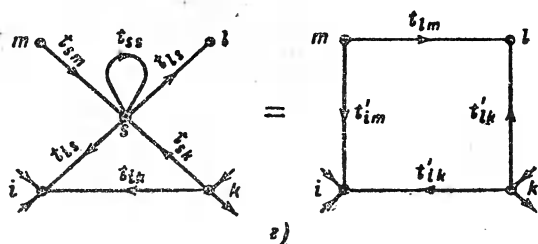
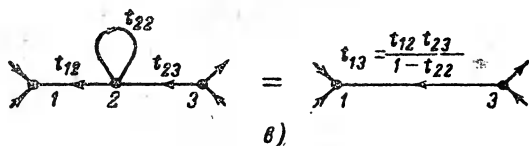
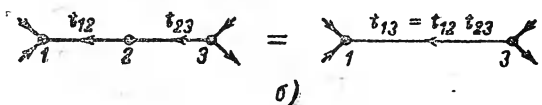
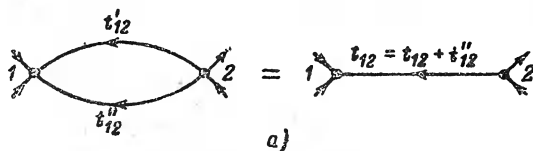


Рис. I-2.

Метод упрощения сигнального графа основан на следующих правилах:

1. Параллельно соединенные ветви, направленные в одну сторону, заменяются одной ветвью, коэффициент передачи которой равен сумме коэффициентов передачи параллельно соединенных ветвей (рис. 1-2, а).

2. Последовательно соединенные ветви, направленные в одну сторону, заменяются одной ветвью, коэффициент передачи которой равен произведению коэффициентов передачи ветвей (рис. 1-2, б).

3. Если в точке соединения двух ветвей с коэффициентом передачи t_{12} и t_{23} имеется петля с коэффициентом передачи t_{22} (петля — это ветвь, выходящая из того же узла, куда она входит), то все эти три ветви заменяются одной ветвью с коэффициентом передачи

$$t_{13} = \frac{t_{12} t_{23}}{1 - t_{22}} \quad (\text{рис. 1-2, в}).$$

Указанные выше правила являются частными случаями общего правила устранения вершин. При устранении вершины графа устраняется и сигнал, соответствующий этой вершине, т. е. устранение вершины равносильно исключению переменной из системы уравнений. Вообще всякому преобразованию графа соответствует определенное преобразование системы уравнений.

При устранении некоторой вершины (рис. 1-2, г) удаляются все ветви, входящие или выходящие из этой вершины. Коэффициенты передачи оставшихся ветвей (вблизи удаленного узла) соответствующим образом меняются. Если в исходном графе имеется ветвь, идущая из узла k в узел s с коэффициентом передачи t_{sk} , и ветвь, идущая из узла s в узел i с коэффициентом передачи t_{is} (рис. 1-2, г), то новый коэффициент передачи ветви между узлами k и i вычисляется по формуле

$$t'_{ik} = t_{ik} + \frac{t_{is} t_{sk}}{1 - t_{ss}}, \quad (1-2)$$

где t_{ss} — коэффициент передачи петли в вершине s .

Если в исходном графе отсутствует ветвь между узлами k и i , то в формуле (1-2) следует положить $t_{ik} = 0$. Аналогично при отсутствии петли в вершине s $t_{ss} = 0$. В частном случае вершины i и k могут совпадать, что приведет к появлению петли в новом графе. Коэффициенты передач t'_{im} , t'_{lm} и t'_{lk} находятся по формуле, аналогичной формуле (1-2).

В качестве примера применения формулы (1-2) устраним вершину 2 из графа на рис. 1-1, а. В результате получится граф, изображенный на рис. 1-1, б. Выражения для коэффициентов передач ветвей указаны на рисунке.

Далее можно удалить узел 3 из графа на рис. 1-1, б; получится граф, содержащий узлы 1 и 4, причем в узле 1 будет петля. Для удаления этой петли можно добавить ветвь с единичным коэффициентом передачи, как указано было ранее (пунктирная линия на рис. 1-1, а), и устранить узел 1. Окончательно получится граф, содержащий единственную ветвь с коэффициентом передачи $T_{1,4} = \dot{I}_4 / \dot{E}$. Указанные преобразования предлагается выполнить читателю в качестве упражнения и результат сравнить с (1-5).

Описанный выше метод является громоздким. Более удобно вычислять коэффициент передачи сигнального графа по формуле Мейсона.

Коэффициент передачи графа от источника к стоку равен:

$$T = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}, \quad (1-3)$$

где Δ — определитель графа; P_k — величина k -го пути в графе от источника до стока; Δ_k — алгебраическое дополнение пути. Суммирование выполняется по всем возможным путям.

Путь в графе берется с учетом направления ветвей, т. е., идя от источника до стока, необходимо все время идти в направлении стрелок. Величина пути равна произведению коэффициентов передач всех ветвей пути.

Определитель графа

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,k}^* L_i L_k - \sum_{i,k,m}^* L_i L_k L_m + \dots, \quad (1-4)$$

где L_i — величина i -го контура, равная произведению коэффициентов передач всех ветвей контура. Контур выбирается так, чтобы все ветви в контуре были направлены в одну сторону. Звездочки у знака сумм означают, что следует брать произведения величин двух, трех и т. д. некасающихся контуров.

Алгебраическое дополнение Δ_k вычисляется по той же формуле (1-4), но при этом следует учитывать во всех суммах лишь контуры, не касающиеся пути P_k .

В качестве примера вычислим коэффициент передачи графа на рис. 1-1, а от узла 4 к узлу 1. Определитель графа

$$\Delta = 1 - (t_{23}t_{32} + t_{12}t_{21} + t_{13}t_{31} + t_{13}t_{12}t_{32} + t_{23}t_{12}t_{31}).$$

Все контуры касаются друг друга, поэтому в выражении определителя нет произведений контуров.

$$P_1 = t_{34}t_{23}t_{12}, \quad \Delta_1 = 1,$$

так как все контуры касаются пути P_1 ; $P_2 = t_{34}t_{13}$, $\Delta_2 = 1$ — по той же причине.

Теперь остается подставить выражения определителя, величин путей и их алгебраических дополнений в выражение (1-3)

$$T_{14} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta},$$

что дает:

$$T_{14} = \frac{t_{11}}{E} = \frac{t_{34}t_{23}t_{12} + t_{34}t_{13}}{1 - (t_{23}t_{32} + t_{12}t_{21} + t_{13}t_{31} + t_{13}t_{12}t_{32} + t_{23}t_{12}t_{31})}. \quad (1-5)$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

ПРИЛОЖЕНИЕ II

	Z	Y	H	G	A	B
Z	$Z_{11} \quad Z_{12}$	$\frac{Y_{22}}{ Y } \quad \frac{-Y_{12}}{ Y }$	$\frac{ H }{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}} \quad \frac{-G_{12}}{G_{11}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{ A }{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}} \quad \frac{1}{B_{21}}$
	$Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{-Y_{21}}{ Y } \quad \frac{Y_{11}}{ Y }$	$\frac{-H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$	$\frac{G_{21}}{G_{11}} \quad \frac{ G }{G_{11}}$	$1 \quad \frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{ B }{B_{21}} \quad \frac{B_{11}}{B_{21}}$
Y	$\frac{Z_{22}}{ Z } \quad \frac{-Z_{12}}{ Z }$	$Y_{11} \quad Y_{12}$	$\frac{1}{H_{11}} \quad \frac{-H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{ G }{G_{22}} \quad \frac{G_{12}}{G_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}} \quad \frac{- A }{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}} \quad \frac{-1}{B_{12}}$
	$\frac{-Z_{21}}{ Z } \quad \frac{Z_{11}}{ Z }$	$Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{ H }{H_{11}}$	$\frac{-G_{21}}{G_{22}} \quad \frac{1}{G_{22}}$	$\frac{-1}{A_{12}} \quad \frac{A_{11}}{A_{12}}$	$\frac{- B }{B_{12}} \quad \frac{B_{22}}{B_{12}}$
H	$\frac{ Z }{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$	$H_{11} \quad H_{12}$	$\frac{G_{22}}{ G } \quad \frac{-G_{12}}{ G }$	$\frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \frac{ A }{A_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{11}} \quad \frac{1}{B_{11}}$
	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{ Y }{Y_{11}}$	$H_{21} \quad H_{22}$	$\frac{-G_{21}}{ G } \quad \frac{G_{11}}{ G }$	$\frac{-1}{A_{22}} \quad \frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{- B }{B_{11}} \quad \frac{B_{21}}{B_{11}}$

	Z	Y	H	G	A	B
G	$\frac{1}{Z_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{22}}$	$\frac{H_{22}}{ H }$	G_{11}	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}$
	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{-H_{12}}{ H }$	G_{12}	$\frac{- A }{A_{11}}$	$\frac{-1}{B_{22}}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{-H_{21}}{ H }$	G_{21}	$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{ B }{B_{22}}$
	$\frac{ Z }{Z_{11}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{H_{11}}{ H }$	G_{22}	$\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{B_{12}}{B_{22}}$
A	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{- H }{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}}$	A_{11}	$\frac{B_{22}}{ B }$
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{-H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{G_{11}}{G_{21}}$	A_{21}	$\frac{B_{21}}{ B }$
	$\frac{ Z }{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{21}}$	$\frac{-H_{11}}{H_{21}}$	$\frac{G_{22}}{G_{21}}$	A_{12}	$\frac{B_{12}}{ B }$
	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{- Y }{Y_{21}}$	$\frac{-H_{21}}{H_{21}}$	$\frac{ G }{G_{21}}$	A_{22}	$\frac{B_{11}}{ B }$
B	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$	$\frac{- G }{G_{12}}$	$\frac{A_{22}}{ A }$	B_{11}
	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{H_{22}}{H_{12}}$	$\frac{-G_{11}}{G_{12}}$	$\frac{A_{12}}{ A }$	B_{12}
	$\frac{ Z }{Z_{12}}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{12}}$	$\frac{ H }{H_{12}}$	$\frac{-G_{22}}{G_{12}}$	$\frac{A_{21}}{ A }$	B_{21}
	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{H_{11}}{H_{12}}$	$\frac{-G_{11}}{G_{12}}$	$\frac{A_{11}}{ A }$	B_{22}

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

ПРИЛОЖЕНИЕ III

	Z	Y	H	G	A	B
$ Z $	$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$	$\frac{1}{ Y }$	$\frac{H_{11}}{H_{22}}$	$\frac{G_{22}}{G_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{21}}$	$\frac{B_{12}}{B_{21}}$
$ Y $	$\frac{1}{ Z }$	$Y_{11}Y_{12} - Y_{12}Y_{21}$	$\frac{H_{22}}{H_{11}}$	$\frac{G_{11}}{G_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{12}}$	$\frac{B_{21}}{B_{12}}$
$ H $	$\frac{Z_{11}}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}}$	$\frac{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}}{H_{11}}$	$\frac{1}{ G }$	$\frac{A_{11}}{A_{22}}$	$\frac{B_{22}}{B_{11}}$
$ G $	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{ H }$	$G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}$	$\frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{B_{11}}{B_{22}}$
$ A $	$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$-\frac{H_{12}}{H_{21}}$	$-\frac{G_{12}}{G_{21}}$	$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$	$\frac{1}{ B }$
$ B $	$\frac{Z_{21}}{Z_{12}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{12}}$	$-\frac{H_{21}}{H_{12}}$	$-\frac{G_{21}}{G_{12}}$	$\frac{1}{ A }$	$B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}$

ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ

$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при } 0 > t > \tau \end{cases}$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}; \quad n - \text{целое положительное число}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1 - at) e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^3}$	$t \left(1 - \frac{a}{2} t \right) e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
$\frac{1}{p(p+a)^n}$	$\frac{1}{a^n} \left[1 - e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} \right]$
$\frac{p^n}{(p+a)^{n+1}}$	$e^{-at} \sum_{k=0}^n \frac{n! (-a)^k}{(n-k)! (k)!^2} t^k$
	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \\ \frac{1}{a^n} \left[1 - e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} \right] \\ e^{-at} \sum_{k=0}^n \frac{n! (-a)^k}{(n-k)! (k)!^2} t^k \end{array} \right\} n - \text{целое положительное число}$

$F(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
$\frac{p \cos b - a \sin b}{p^2+a^2}$	$\operatorname{ccs} (at+b)$
$\frac{p \sin b + a \cos b}{p^2+a^2}$	$\sin (at+b)$
$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{\sin at}{2a^3} - \frac{t \cos at}{2a^2}$
$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} t \sin at$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin at + at \cos at)$
$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{t \operatorname{ch} at}{2a^3} - \frac{\operatorname{sh} at}{2a^2}$
$\frac{p}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} t \operatorname{sh} at$

$F(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \frac{\sin bt}{b}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
$\frac{(p+a) \cos \psi - b \sin \psi}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos (bt + \psi)$
$\frac{(p+a) \sin \psi + b \cos \psi}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin (bt + \psi)$
$\frac{1}{(p+a)^2 - b^2}$	$e^{-at} \frac{\text{sh } bt}{b}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 - b^2}$	$e^{-at} \text{ch } bt$
$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{3}{p^2}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акульшин П. К., Евланов С. Н., Основы теории электрической связи, Связьиздат, 1960.
2. Атабеков Г. И., Теория линейных электрических цепей, изд-во «Советское радио», 1960.
3. Атабеков Г. И., Основы теории цепей, изд-во «Энергия», 1969.
4. Бессонов Л. А., Теоретические основы электротехники, изд-во «Высшая школа», 1967.
5. Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л., Переходные процессы в линейных системах, Физматгиз, 1961.
6. Гоноровский И. С., Радиотехнические цепи и сигналы, ч. 1, изд-во «Советское радио», 1966.
7. Жуховицкий Б. Я., Негневицкий И. Б., Теоретические основы электротехники, ч. 2, изд-во «Энергия», 1965.
8. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В., Основы теории цепей, изд-во «Энергия», 1965.
9. Зелях Э. В., Основы общей теории линейных электрических схем, Изд-во АН СССР, 1951.
10. Ионкин П. А., Мельников Н. А., Даревский А. И., Кухаркин Е. С., Теоретические основы электротехники, изд-во «Высшая школа», 1965.
11. Караев Р. И., Переходные процессы в линиях большой протяженности, Госэнергоиздат, 1963.
12. Круг К. А., Основы электротехники, ч. 1 и 2, Госэнергоиздат, 1946.
13. Поливанов К. М., Теоретические основы электротехники, ч. 1, изд-во «Энергия», 1965.
14. Нейман Л. Р., Демирчян К. С., Теоретические основы электротехники, т. 1, изд-во «Энергия», 1966.
15. Реза Ф., Сили С., Современный анализ электрических цепей, изд-во «Энергия», 1964.
16. Сешу С., Балабанян Н., Анализ линейных электрических цепей, Госэнергоиздат, 1963.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная диэлектрическая про-
ницаемость 36
— магнитная проницаемость 35
Автотрансформатор 242
Активная проводимость 71
— составляющая напряжения 69
— — тока 72
— (средняя) мощность 61, 73, 427
— цепь 19
Активное сопротивление 61
Активный двухполюсник 143
— четырехполюсник 253
— элемент цепи 19
Амплитуда 53
— комплексная 80
Амплитудно-фазовые характери-
стики 278
Амплитудно-частотные характери-
стики 278
Амплитудные искажения 347
Амплитудный спектр 533
Аналогии электромеханические 210
Апериодический процесс 456
Аргумент (фаза) 80
Асинхронный двигатель 164, 389,
400
Базисный узел 176
Баланс мощностей 98
Бегущие волны 335
Безындукционный фильтр 293, 322
Биекции колебаний 461
Близости эффект 33
Вариометр 230
Вектор вращающийся 81
Векторная диаграмма 83
Ветвь 42
— намагничивания 234
Взаимная индуктивность 28, 217
— (передаточная) проводимость 184
Взаимное (передаточное) сопротив-
ление 185
Взаимно обратные двухполюсники
299
Взаимности (обратимости) теоре-
ма 187
Вихревые токи 33
Включение цепи rC 450, 505, 520
— — rL 443, 503, 516
— — rLC 454, 496, 521
Внешняя характеристика 44
Взаимное затухание четырехполюс-
ника 275
— сопротивление 133, 239
Воздействующая функция 462, 516
Волна обратная 336, 471
— отраженная 336, 473
— падающая 336

Волна прямая 335, 471
— стоячая 352
Волновое сопротивление линии 333,
337
— — операторное 525
— (характеристическое) сопротив-
ление контура 129
Волны бегущие 335
Вольт-амперная характеристика 24,
40, 44
Вращающееся магнитное поле 384
— — — круговое 385
— — — эллиптическое 388
Вращающийся вектор 81
Вторичные параметры линии 341
Входная проводимость цепи 184
Входное сопротивление линии 357
— — трансформатора 239
— — цепи 185
— — четырехполюсника 266
Высшие гармоники 410
— — в трехфазной цепи 430
Гармоники 409
Гармонический ряд 411
Главные ветви 169
Г-образный четырехполюсник 253
Годограф 152
Граф 169, 569
Групповая скорость 335
Двигатель асинхронный 164, 389
— синхронный 390
Двустороннее преобразование
Фурье 530
Двухполюсник 143, 539
— активный 143
— двухэлементный 145
— многоэлементный 148, 249
— одноэлементный 144
— пассивный 143
— приведенный 149
— реактивный 143, 548
— с потерями 143, 548
Двухполюсники взаимно обратные
299
— эквивалентные 149, 549
Двухполюсников классификация 143
Двухфазное короткое замыкание
397
Действительная положительная
функция 552
Действующее значение комплекс-
ное 66
— — функции несинусоидальной 426
— — — синусоидальной 57
Декремент колебаний 460
Дерево 169
Диаграмма векторная 83

- Диаграмма круговая 153
 — потенциальная 46, 100
 — проводимостей 155
 — сопротивлений 155
 — топографическая 100
 Дифференциальные уравнения линии 330
 — трансформатора 233
 Дифференцирование изображения 484
 — оригинала (теорема дифференцирования) 483
 Дифференцирующее звено 449
 Диэлектрическая проницаемость 36
 Длина волны 334
 Добротность катушки 70
 — конденсатора 73
 — контура (цепи) 129, 136
 Дуальные цепи 207
 Единичная функция 481
 Емкостные цепи 204
 Емкость 28
 — кабеля 329
 — конденсатора 36
 — линии 329
 Зависимый (неавтономный) источник 190
 Заграждающий (режекторный) фильтр 301, 325
 Закон Джоуля — Ленца 24
 — Кирхгофа 47, 166
 — коммутации 437
 — Ленца 26
 — Ома 23
 — при переменном токе 63, 68, 84
 — сохранения количества электричества 206
 — Фарадея — Максвелла (электромагнитной индукции) 25
 Замкнутая форма периодической несинусоидальной функции 425, 518
 Замыкание ветви 506
 Заряд электрический 19, 29, 438
 Затухание вносимое 275
 — контура 133
 — собственное четырехполюсника 269
 Звено, дифференцирующее, интегрирующее 449, 454
 Идеализация элементов цепи 19, 32
 Идеальный источник напряжения 37
 — тока 38
 — трансформатор 236
 Изображение по Карсону 480
 — Лапласу 479
 Индуктивная катушка 34, 70, 128
 — связь 243
 Индуктивно-связанные цепи 216
 — контуры 316
 Индуктивность 25
 — взаимная 28, 217
 — кабеля 329
 — катушки 35
 — линии 329
 — рассеяния 227
 Интеграл Дюамеля 489, 514
 — Фурье 527
 Интегрирование изображения 484
 — оригинала (теорема интегрирования) 484
 Интегрирующее звено 449
 Искажение 317
- Искусственная линия 363
 Источник бесконечной мощности 38, 39
 Источник зависимый (неавтономный) 190
 — напряжения 37, 195
 — независимый (автономный) 183
 — тока 38, 137, 200
 — э. д. с. 37
 — электрической энергии 18
 Источники эквивалентные 116, 195
 Каскадное соединение четырехполюсников 279, 281
 Классификация двухполюсников 143
 — фильтров 291
 — четырехполюсников 252
 Классический метод расчета переходных процессов 435
 Колебания затухающие 459
 — незатухающие 460
 — энергии 63, 65, 66
 Колебательная цепь 125
 Колебательный контур 126, 241, 459
 — процесс 458
 Коммутация 436
 Компенсация теорема 189
 Комплексная амплитуда 80
 — мощность 94
 — проводимость 89
 — форма расчета 80
 — частота 462, 479, 547
 Комплексное действующее значение 86
 — сопротивление 86
 Комплексный ток 86
 Конденсатор 28, 73, 128
 Контур 43
 — независимый 168
 — параллельный колебательный 126, 136
 — последовательный колебательный 126
 — с малыми потерями 139
 Контурный ток 171
 Короткое замыкание 200, 394, 452
 — однородной линии 353
 — цепи C 452
 — rL 446
 Коэффициент амплитуды 430
 — бегущей волны 356
 — затухания линии 334
 — искажения 429
 — мощности 73, 429
 — отражения 276, 337
 — передачи (передаточная функция) 277
 — полезного действия 96, 248
 — распространения 333
 — операторный 524
 — связи 227
 — критический 250
 — трансформации 234
 — усиления 278
 — фазы линии 334
 — четырехполюсника 269
 — формы кривой 429
 Коэффициенты ряда Фурье 411, 417
 — четырехполюсника 258, 576
 Круговая диаграмма 153
 Круговое вращающееся магнитное поле 385
 Лапласа преобразование 479
 Линейная электрическая цепь 40

Линейное напряжение 371
 Линейный ток 371
 — элемент цепи 40
 Линия без искажений 346
 — длинная 336
 — без потерь 349
 — искусственная 363
 — как элемент резонансной цепи 362
 — однородная 328
 Логарифмический декремент колебания 460
 Магнитная индукция 56
 — постоянная 35
 — проводимость 218
 — проникаемость 35
 Магнитное поле 25
 — вращающееся 384
 — пульсирующее 385
 Матрица соединений (инцидентий) 108
 Матричные уравнения 203, 281
 Мера передачи 269
 Метод выделения нулей и полюсов 567
 — двух узлов 117
 — единичного тока (метод подобия) 110
 — комплексных амплитуд 80
 — контурных токов 171
 — наложения 180
 — подобия (метод единичного тока) 110
 — разложения в непрерывную дробь 563
 — симметричных составляющих 391
 — узловых напряжений 176
 Методы синтеза цепей 545
 Механическая цепь 211
 Механический четырехполюсник 256
 Многоэлементный двухполюсник 148, 547
 Модуль 80
 Мостовая схема 121, 170, 175, 179, 253
 Мостовой фильтр 318
 — четырехполюсник 253, 288
 Мощност активная (средняя) 61, 73, 427
 — искажения 428
 — комплексная 94
 — мгновенная 22, 31, 61
 — полная 75, 428
 — реактивная 75, 428
 — средняя (активная) 61, 73, 427
 — трехфазной цепи 374, 382
 Намагничивание ветвь 234
 Намагничивающая сила 35, 235
 Намагничивающий ток 235
 Напряжение 20
 — активное 69
 — комплексное 84
 — линейное 371
 — реактивное 69
 — смещения нейтрали 378
 — узловое 176
 — фазное 172
 — холостного хода 193
 Напряженность электрического поля 30
 Начальная фаза 53
 Начальные условия 438, 455, 467, 496, 506

Независимый (автономный) источник 163
 — контур 168
 Неискаженная передача 346, 543
 Нейтральная точка 370
 Нейтральный провод 371
 Ненулевые начальные условия 438, 496, 506
 Необратимая цепь 255
 Необратимый четырехполюсник 255, 264
 Непер 273
 Непланируемая цепь 175
 Несвязанная трехфазная цепь 366
 Несимметрия поперечная 394
 — продольная 399
 Несинусоидальный периодический процесс 409
 Неуставившийся процесс 436
 Нулевая последовательность 392
 — точка 370
 Нулевые начальные условия 438
 Нуль функции 145, 548
 Обобщенная воздействующая функция 462
 — расстройка контура 249
 Обобщенные (операторные) проводимость, сопротивление 463, 466, 498, 507, 548
 Обратимая цепь 188
 Обратимый четырехполюсник 255, 259, 278
 Обратности (взаимности) теорема 187
 Обратная волна 336, 471
 — последовательность 392
 — связь 289
 Обратное преобразование Лапласа 490
 — — Фурье 528
 Обращение в комплексной плоскости 152
 Обрыв фазы 400
 Общая проводимость узлов 177
 Общее сопротивление контуров 172
 Однородная линия 328
 Одностороннее преобразование Лапласа 479
 — — Фурье 528
 Однофазное короткое замыкание 398
 Однофазный синусоидальный ток 52
 Одноэлементные двухполюсники 144
 — четырехполюсники 283
 Оператор вращения (поворота) 81
 Операторное волновое сопротивление 525
 Операторные (обобщенные) проводимость, сопротивление 463, 466, 498, 507, 548
 Опережение по фазе 69
 Определители, выраженные через коэффициенты четырехполюсника 576
 Оригинал 479
 Основная частота 410
 Острота настройки 131
 Относительная диэлектрическая проницаемость 36
 — магнитная проницаемость 35
 — расстройка частоты 129
 Отражение волн 336, 473
 Отставание по фазе 68

- Падающая волна 335
- Параллельное соединение 70, 88, 100, 157
- — — четырехполюсников 282
- Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников 282
- Параллельный колебательный контур 126, 136
- Параметр связи 251
- Параметры однородной линии вторичные 341
- — — первичные 327
- — — четырехполюсника 257
- — — характеристическое 268
- — — холостого хода и короткого замыкания 262
- Пассивная цепь 19
- Пассивный двухполюсник 143
- — — четырехполюсник 254
- — — элемент цепи 19
- Первичные параметры линии 327
- Передающая (взаимная) проводимость 184
- функция (коэффициент передачи) 277, 546
- Передающее (взаимное) сопротивление 185
- Передача максимума мощности 95
- неискаженная 147, 543
- Переменный ток 14
- Переходная проводимость 513
- Переходный процесс 436
- — — в цепи с распределенными параметрами 470, 523
- — — — — сосредоточенными параметрами 435, 496
- Период 52
- Периодический процесс 52, 409
- Планарная (плоская) цепь 175
- П-образный четырехполюсник 253, 264, 287
- Поверхностный эффект 33
- Поле магнитное 25
- вращающееся 384
- пульсирующее 385
- электрическое 28
- Полная мощность 75, 428
- Положительная действительная функция 552
- Положительное направление тока и напряжения 19
- Полоса задерживания (затухания) 292
- пропускания 132, 250, 292
- Полосовой фильтр 293—324
- Полус функции 146
- Поперечная несимметрия 394
- Последовательное соединение 67, 84, 104, 155
- — — четырехполюсников 281
- Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников 283
- Последовательность (чередование) фаз 380, 392
- Последовательный колебательный контур 126
- Постоянная времени 445, 450, 459
- магнитная 35
- электрическая 36
- Постоянный ток 14, 45, 46
- Потенциальная диаграмма 46, 100
- Поток магнитный 35
- рассеяния 228
- Потокосцепление 25, 228
- Правило левой руки 56
- правой руки 56
- правоходного винта 26, 220
- Предельные соотношения 488
- Преобразование дробно-линейное 160
- звезды в треугольник 115
- симметричных схем 121
- схем с двумя узлами 117
- — — источниками 116, 119
- — — со смешанным соединением 108
- треугольника в звезду 112
- Фурье 527
- Приведенный двухполюсник 149
- Принцип непрерывности заряда 437
- — — потокосцепления 438
- — — суммарного заряда 440
- Проводимость 23
- активная 71
- взаимная (передаточная) 184
- входная 184
- емкостная 65
- индуктивная 63
- комплексная 89
- обобщенная (операторная) 498
- общая узлов 177
- передаточная (взаимная) 184
- переходная 513
- полная 71
- реактивная 71
- электрическая удельная 32
- Продольная несимметрия 399
- Проницаемость диэлектрическая 36
- магнитная 35
- Процесс неперiodический (переходный) 436
- периодический 52, 409
- Прямая волна 335, 471
- последовательность 392
- Пульсирующее магнитное поле 385
- Размыкание ветви 508
- Разность потенциалов 20
- фаз 60, 68, 72
- Разряд конденсатора аперiodический 457
- — — колебательный 459
- Расположение нулей и полюсов 149, 458, 547—567
- Рассеяния индуктивность 228
- поток 228
- сопротивление 235
- Реактивная мощность 75, 428
- проводимость 71
- составляющая напряжения 69
- тока 72
- Реактивный двухполюсник 143
- фильтр 293
- Реакция цепи 468, 513
- Реализация четырехполюсника 265, 565
- функции 546, 555
- Регулярность соединения четырехполюсника 283
- Режим неустановившийся (переходный) 436
- принужденный 441
- свободный 441
- синусоидальный 52, 332
- установившийся (периодический) 52, 408, 441, 518
- Резонанс напряжений 69, 125

Резонанс полный 245
 — пьезоэлектрический 318
 — сложный 245
 — токов 72, 126, 136
 — частный 245
 Резонансная кривая 126, 131, 248
 — цепь 125, 243, 362
 — частота 126
 Ряд гармонический (Фурье) 411
 Связанная трехфазная цепь 367
 Связанные колебательные контуры 243
 Связь обратная 289
 Сдвиг фаз 60
 Симметричная трехфазная цепь 372
 Симметричный четырехполюсник 254, 261, 288
 Симметричные составляющие 391
 — схемы 121
 Синтез электрических цепей 545
 Синусоида эквивалентная 430
 Синусоидальный режим 52
 — — в линии 332
 Синхронный генератор 54
 — двигатель 390
 Скольжение 390
 Скорость групповая 335
 — фазовая волны 335
 Смешанное соединение 108, 158
 Смещение нейтрали 378
 Собственная проводимость узла 177
 — частота контура 459
 Собственное затухание четырехполюсника 269
 — сопротивление контура 171
 Согласование сопротивлений 240, 269, 279, 298, 338
 Соединение звездой 369
 — параллельное 70, 88, 100, 157
 — последовательное 67, 84, 104, 155
 — смешанное 108
 — треугольником 370
 Соединения четырехполюсников 281
 Сопротивление 22
 — активное 61
 — ветви намагничивания 235
 — взаимное (передаточное) 185
 — вносимое из вторичной цепи в первичную 239
 — волновое 333, 337
 — входное 185, 239, 266, 357
 — двухполюсника 144, 547
 — емкостное 65
 — индуктивное 63
 — кабеля 329
 — комплексное 86
 — линии 329, 357
 — обобщенное (операторное) 468, 498, 547
 — общее контуров 171
 — передаточное (взаимное) 185
 — полное 68
 — приведенное к первичной обмотке 234
 — проводника 32
 — рассеяния 235
 — собственное контура 171
 — характеристическое 129, 268
 — электрическое удельное 32
 Спектр (спектральная характеристика) 529
 — амплитудный 533
 — фазовый 533
 Среднее значение периодической

функции 57
 — — — несинусоидальной 427
 Средняя (активная) мощность 61, 73
 Стоячая волна 352
 Схема замещения автотрансформатора 242
 — асинхронного двигателя 164
 — вторичного контура 245
 — индуктивной катушки 35
 — конденсатора 36
 — первичного контура 244
 — приведенная трансформатора 234
 — трансформатора 234
 — четырехполюсника 263
 — мостовая 123, 170, 175, 253
 — симметричная 121
 — цепная 109, 563
 — электрическая 18
 Таблица изображений и оригиналов 495
 Телеграфные уравнения 331
 Теорема взаимности (обратимости) 187
 — дифференцирования 483
 — запаздывания 484, 486
 — интегрирования 483
 — компенсации 189
 — об изменении токов при изменении сопротивлений 191
 — эквивалентном источнике напряжения 195
 — — — тока 195
 — подобия 484
 — разложения 491
 — свертывания 485, 489
 — смещения 484, 488
 Тепловые потери в диэлектрике 36
 Т-образный четырехполюсник 253, 265, 287
 Ток 19
 — активный 72
 — аperiodический 457
 — комплексный 86
 — контурный 171
 — короткого замыкания 200, 394
 — линейный 371
 — намагничивающий 235
 — несинусоидальный 408
 — однофазный 52
 — переменный 14
 — переноса 19
 — переходный 442
 — постоянный 20, 45
 — принужденный 441
 — проводимости 19, 29
 — реактивный 72
 — свободный 441
 — синусоидальный 54
 — смещения 30
 — трехфазный 366
 — установившийся 84, 441
 — фазный 371
 Токи вихревые 33
 Топографическая диаграмма 100
 Точка нейтральная 370
 — нулевая 370
 Трансформатор 231
 — идеальный 236
 — напряжения 402
 — тока 402
 Треугольник мощностей 94
 — напряжений 88

- Треугольник проводимостей 90
 - сопротивлений 88
 - токов 90
- Трехфазная цепь 366
 - — несвязанная 366
 - — несимметричная 377
 - — связанная 367
 - — симметричная 372
- Трехфазный генератор 367
 - ток 366
- Тригонометрическая форма ряда Фурье 408
- Угловая частота 53, 459
- Угол диэлектрических потерь 73
 - сдвига фаз 60
- Узел 42
- Узловое напряжение 176
- Узлы стоячих волн 353
- Умножение напряжений (теорема свертывания) 485, 489
- Уравнение колебаний струны 471
 - характеристическое 442
- Уравнения контурных токов 172, 501
 - линии (телеграфные) 331
 - матричные 210, 280
 - механические цепей 210
 - трансформатора 232
 - узловых напряжений 176
 - четырехполюсника 257, 270, 280
- Установившийся ток 84, 441
- Фаза 366
 - начальная 53
- Фазное напряжение 372
- Фазный ток 371
- Фазовая скорость волны 335
- Фазовращатель 163
- Фазовые искажения 347
- Фазовый сдвиг 60
 - спектр 533
- Фазоуказатель 380
- Фильтр 292
 - безындукционный 322
 - верхних частот 293—323
- заграждающий (режекторный) 293—325
 - мостовой 293, 318
 - нижних частот 293—322
 - полосовой 293—325
- Фильтр пьезоэлектрический 318
 - реактивный (идеальный) 293, 298
 - типа k 299
 - — m 308
- Фильтров классификация 293
- Фильтры симметричных составляющих 401
- Формулы включения 511
- Функция воздействующая 462, 516
 - единичная 481
 - импульсная 513
- минимального реактивного сопротивления 561
- минимальной реактивной проводимости 561
 - — фазы 566
- минимальной фазы 566
- передаточная 277
- периодическая 52, 409
- — несинусоидальная 409
- положительная действительная 552
 - синусоидальная 53
- Характеристические сопротивления (параметр) четырехполюсника 268
- Характеристическое (волновое) сопротивление контура 129
 - уравнение 442
- Холостой ход 193
 - — однородной линии 354
- Цепи дуальные 207
 - эквивалентные 111
- Цепная схема 109
- Цепь активная 19
 - емкостная 204
 - линейная 40
 - механическая 211
 - непланарная 175
 - однофазная 52
 - пассивная 19
 - планарная (плоская) 175
 - резонансная (колебательная) 125
 - с обратной связью 289
 - — распределенными параметрами 327
 - — сосредоточенными параметрами 32
 - трехфазная 366
 - электрическая 18
- Частота 52
 - комплексная 462, 479, 547
 - основная 410
 - резонансная 126, 245
 - собственных (свободных) колебаний 459
 - среза 296
 - угловая 53
- Частотные свойства цепи 547
 - характеристики 126
- Чередование (последовательность) фаз 380, 391
- Четырехполюсник активный 253
 - Г-образный 253, 285
 - механический 256
 - мостовой 253, 288
 - необратимый 255
 - несимметричный 255
 - обратимый 255
 - одноэлементный 283
 - пассивный 254
 - П-образный 253, 287
 - симметричный 254, 288
 - Т-образный 253, 287
- Эквивалент тепловой 24
- Эквивалентная синусоида 430
- Эквивалентные звезда и треугольник 112
 - двухполюсники 549
 - источники напряжения и тока 116, 506
 - цепи 111
 - четырехполюсники 254
- Электрическая постоянная 36
 - схема 41
 - цепь 18
 - — линейная 40
- Электрический заряд 19, 29, 438
- Электрическое поле 28
- Электродвижущая сила 26, 37, 55, 462, 496
 - — взаимной индукции 28, 220
 - — самоиндукции 26, 220
- Элементы механической цепи 211
 - электрической цепи 18
- Эллиптическое вращающееся поле 388
- Энергия магнитного поля 27, 64, 439
 - электрического поля 31, 66, 439

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр

Предисловие к четвертому изданию первой части	5
Предисловие к третьему изданию	5
Условные обозначения	10
Введение	13

1. Глава первая

Основные законы, элементы и параметры электрических цепей	18
1-1. Электрическая цепь	18
1-2. Положительные направления тока и напряжения	19
1-3. Мгновенная мощность и энергия	22
1-4. Сопротивление	22
1-5. Индуктивность	25
1-6. Емкость	28
1-7. Замещение физических устройств идеализированными элементами цепи	32
1-8. Источник напряжения и источник тока	37
1-9. Линейные электрические цепи	40
1-10. Основные определения, относящиеся к электрической схеме	41
1-11. Вольт-амперная характеристика участка цепи с источником	44
1-12. Распределение потенциала вдоль цепи с сопротивлениями и источниками напряжения	46
1-13. Законы Кирхгофа	47
1-14. Задачи и вопросы для самопроверки	49

Глава вторая

1. Электрическая цепь однофазного синусоидального тока	52
2-1. Синусоидальные электрические величины	52
2-2. Генерирование синусоидальной э. д. с.	54
2-3. Среднее и действующее значения функции	57
2-4. Синусоидальный ток в сопротивлении	60
2-5. Синусоидальный ток в индуктивности	62
2-6. Синусоидальный ток в емкости	64
2-7. Последовательное соединение	67
2-8. Параллельное соединение	70
2-9. Мощность в цепи синусоидального тока	73
2-10. Задачи и вопросы для самопроверки	77

Глава третья

1. Применение комплексных чисел и векторных диаграмм к расчету электрических цепей	80
3-1. Представление синусоидальных функций в виде проекций вращающихся векторов	80

3-2. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме....	84
3-3. Зависимость между сопротивлениями и проводимостями участка цепи	92
3-4. Комплексная форма записи мощности	93
3-5. Условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику	95
3-6. Условие передачи источником максимума мощности при заданном коэффициенте мощности приемника	97
3-7. Баланс мощностей	98
3-8. Потенциальная (топографическая) диаграмма	100
3-9. Задачи и вопросы для самопроверки	102

Глава четвертая

1. Преобразование схем электрических цепей	104
4-1. Последовательное и параллельное соединения	104
4-2. Смешанное соединение	108
4-3. Эквивалентные участки цепи с последовательным и параллельным соединениями	110
4-4. Преобразование треугольника в эквивалентную звезду	112
4-5. Преобразование звезды в эквивалентный треугольник	115
4-6. Эквивалентные источники напряжения и тока....	116
4-7. Преобразование схем с двумя узлами	117
4-8. Перенос источников в схеме	119
4-9. Преобразование симметричных схем	121
4-10. Задачи и вопросы для самопроверки	124

Глава пятая

1. Резонанс в электрических цепях	125
5-1. Резонансные (колебательные) цепи	125
5-2. Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений	126
5-3. Параллельный колебательный контур. Резонанс токов	136
5-4. Частотные характеристики реактивных двухполюсников	143
5-5. Задачи и вопросы для самопроверки	150

Глава шестая

1. Геометрические места на комплексной плоскости.....	151
6-1. Графическое изображение зависимостей комплексных величин от параметра	151
6-2. Преобразование вида $Y=1/Z$	153
6-3. Диаграммы сопротивлений и проводимостей простейших электрических цепей	155
6-4. Преобразование вида $W = \frac{A+Bk}{C+Dk}$	160
6-5. Задачи и вопросы для самопроверки	165

Глава седьмая

1 Методы расчета сложных электрических цепей.....	166
7-1. Применение законов Кирхгофа для расчета сложных цепей	166
7-2. Метод контурных токов	171
7-3. Метод узловых напряжений	176
7-4. Метод наложения	180
7-5. Входные и передаточные проводимости и сопротивления	183
7-6. Теорема обратимости (или взаимности)	187
7-7. Теорема компенсации	189
7-8. Теорема об изменении токов в электрической цепи при изменении сопротивления в одной ветви.....	191
7-9. Теорема об эквивалентном источнике	194
7-10. Применение матриц к расчету электрических цепей	200
7-11. Некоторые особенности расчета электрических цепей с емкостями	204
7-12. Дуальные цепи	207
7-13. Электромеханические аналогии	210
7-14. Задачи и вопросы для самопроверки	215

Глава восьмая

1 Индуктивно связанные электрические цепи	216
8-1. Основные положения и определения	216
8-2. Полярности индуктивно связанных катушек; э. д. с. взаимной индукции	218
8-3. Комплексная форма расчета цепи с взаимной индукцией	223
8-4. Коэффициент индуктивной связи. Индуктивность рассеяния	227
8-5. Уравнения и схемы замещения трансформатора без ферромагнитного сердечника	231
8-6. Энергия индуктивно связанных обмоток	237
8-7. Входное сопротивление трансформатора	239
8-8. Автотрансформатор	242
8-9. Индуктивно связанные колебательные контуры....	243
8-10. Настройка связанных контуров	245
8-11. Резонансные кривые и полоса пропускания связанных контуров	248
8-12. Задачи и вопросы для самопроверки	251

Глава девятая

2 Четырехполюсники	252
9-1. Основные определения и классификация четырехполюсников	252
9-2. Системы уравнений четырехполюсника	256
9-3. Уравнения четырехполюсника в форме $ A $	260
9-4. Параметры холостого хода и короткого замыкания	262
9-5. Схемы замещения четырехполюсника	263
9-6. Входное сопротивление четырехполюсника при произвольной нагрузке	266

	Стр.
9-7. Характеристические параметры четырехполюсника	268
9-8. Вносимое затухание четырехполюсника	275
9-9. Передаточная функция	277
9-10. Каскадное соединение четырехполюсников, основанное на согласовании характеристических сопротивлений	279
9-11. Уравнения сложных четырехполюсников в матричной форме	280
9-12. Одноэлементные четырехполюсники	283
9-13. Г-образный четырехполюсник	285
9-14. Т-образный и П-образный четырехполюсники	287
9-15. Симметричный мостовой четырехполюсник	288
9-16. Обратная связь	289
9-17. Задачи и вопросы для самопроверки	290

Глава десятая

Электрические фильтры	291
10-1. Основные определения и классификация электрических фильтров	291
10-2. Условие пропускания реактивного фильтра	293
10-3. Фильтры типа k	299
10-4. Фильтры типа m	308
10-5. Индуктивно связанные контуры как фильтрующая система	316
10-6. Мостовые фильтры. Пьезоэлектрические резонаторы	318
10-7. Безындукционные фильтры	322
10-8. Задачи и вопросы для самопроверки	325

Глава одиннадцатая

Цепи с распределенными параметрами	327
11-1. Первичные параметры однородной линии	327
11-2. Дифференциальные уравнения однородной линии	330
11-3. Синусоидальный режим в однородной линии	332
11-4. Вторичные параметры однородной линии	341
11-5. Линия без искажений	346
11-6. Линия без потерь	349
11-7. Режимы работы линии без потерь. Стоячие волны	351
11-8. Входное сопротивление линии	357
11-9. Линия как элемент резонансной цепи	362
11-10. Искусственные линии	363
11-11. Задачи и вопросы для самопроверки	364

Глава двенадцатая

Цепи трехфазного тока	366
12-1. Трехфазные электрические цепи	366
12-2. Соединение звездой и треугольником	369
12-3. Симметричный режим работы трехфазной цепи	372
12-4. Несимметричный режим работы трехфазной цепи	377
12-5. Мощность несимметричной трехфазной цепи	382
12-6. Вращающееся магнитное поле	384

12-7. Принцип действия асинхронного и синхронного двигателей	389
12-8. Метод симметричных составляющих	391
12-9. Поперечная несимметрия	394
12-10. Продольная несимметрия	399
12-11. Фильтры симметричных составляющих	401
12-12. Задачи и вопросы для самопроверки	406

Глава тринадцатая

Цепи периодического несинусоидального тока	408
13-1. Тригонометрическая форма ряда Фурье	408
13-2. Случаи симметрии	414
13-3. Перенос начала отсчета	419
13-4. Комплексная форма ряда Фурье	420
13-5. Применение ряда Фурье к расчету периодического несинусоидального процесса	422
13-6. Действующее и среднее значения периодической несинусоидальной функции	426
13-7. Мощность в цепи периодического несинусоидального тока	427
13-8. Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции	429
13-9. Высшие гармоники в трехфазных электрических цепях	430
13-10. Задачи и вопросы для самопроверки	433

Глава четырнадцатая

Переходные процессы в электрических цепях. Классический метод расчета	435
14-1. Возникновение переходных процессов	435
14-2. Законы коммутации и начальные условия	437
14-3. Принужденный и свободный режимы	441
14-4. Переходный процесс в цепи r, L	443
14-5. Переходный процесс в цепи r, C	450
14-6. Переходный процесс в цепи r, L, C	454
14-7. Расчет переходного процесса в разветвленной цепи	461
14-8. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами	470
14-9. Задачи и вопросы для самопроверки	476

Глава пятнадцатая

Применение преобразования Лапласа к расчету переходных процессов	477
15-1. Общие сведения	477
15-2. Прямое преобразование Лапласа. Оригинал и изображение	479
15-3. Изображения некоторых простейших функций	480
15-4. Основные свойства преобразования Лапласа	482
15-5. Нахождение оригинала по изображению с помощью обратного преобразования Лапласа	480
15-6. Теорема разложения	491

	Стр.
15-7. Таблицы оригиналов и изображений	495
15-8. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений электрических цепей	496
15-9. Учет ненулевых начальных условий методом эквивалентного источника	506
15-10. Формулы включения	511
15-11. Расчет переходного процесса с помощью формул наложения	512
15-12. Нахождение в замкнутой форме установившейся реакции цепи на периодическую несинусоидальную воздействующую функцию	518
15-13. Исследование переходных процессов в цепях с распределенными параметрами с помощью преобразования Лапласа	523
15-14. Задачи и вопросы для самопроверки	525
 <i>Глава шестнадцатая</i>	
Применение преобразования Фурье к расчету переходных процессов	527
16-1. Преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа	527
16-2. Спектральная характеристика	529
16-3. Переходный процесс в двухполюснике ...	539
16-4. Переходный процесс в четырехполюснике	542
16-5. Задачи и вопросы для самопроверки	544
 <i>Глава семнадцатая</i>	
Синтез линейных электрических цепей	545
17-1. Характеристика задач синтеза	545
17-2. Исследование двухполюсника при комплексной частоте	547
17-3. Спротивление и проводимость как положительная действительная функция	552
17-4. Условия физической реализуемости функции	555
17-5. Методы построения двухполюсника по заданной частотной характеристике	557
17-6. Исследование четырехполюсника при комплексной частоте	565
17-7. Задачи и вопросы для самопроверки	568
 ПРИЛОЖЕНИЯ	
I. Метод сигнальных графов	569
II. Соотношения между коэффициентами четырехполюсника	574
III. Определители, выраженные через коэффициенты четырехполюсника ..	576
IV. Оригиналы и изображения по Лапласу	577
Литература	580
Алфавитный указатель	581

